

Métodos Matemáticos de la Física I
Segunda Tarea
(Fecha de entrega: 08 de Septiembre)

Sección 2a:

1.- Escribe la función $f(z) = z^3 + z + 1$ en la forma $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$.

RESPUESTA: $f(x, y) = (x^3 - 3xy^2 + x + 1) + i(3x^2y - y^3 + y)$.

2.- Suponga que $f(z) = f(x, y) = x^2 - y^2 - 2y + i(2x - 2xy)$, donde $z = x + iy$. Use las expresiones

$$x = \frac{z+z^*}{2} \quad y \quad y = \frac{z-z^*}{2i}$$

para escribir $f(z)$ en términos de z , y simplifique el resultado.

RESPUESTA. $f(z) = z^{*2} + 2iz$.

3.- Represente cada una de las siguientes funciones en términos de z y $z^* (= \bar{z})$, es decir, escriba $f(z)$.

(a) $w = x^2 - y^2 + 2ixy$;

(b) $w = x(x^2 - 3y^2) - iy(3x^2 - y^2)$;

(c) $w = \frac{2(x^2+y^2)-(x+iy)}{4(x^2+y^2)-4x+1}$

RESPUESTA: (a) $f(z) = z^2$; (b) $f(z) = \bar{z}^3$; (c) $f(z) = \frac{z}{2z-1}$

4.- Escriba la función $f(z) = z + \frac{1}{z}$ con ($z \neq 0$) en la forma $f(z) = f(r, \theta) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$.

RESPUESTA. $f(z) = f(r, \theta) = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta + i \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \theta$.

5.- Separe cada una de las siguientes funciones $f(z)$ en sus componentes real e imaginaria, es decir, encuentre las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ tales que $f(z) = u + iv$.

(a) $f(z) = 2z^2 - 3iz$;

(b) $f(z) = z + 1/z$;

(c) $f(z) = \frac{1-z}{1+z}$;

(d) $f(z) = z^{1/2}$;

(e) $f(z) = z + \bar{z}^2 + 5i$.

(f) $f(z) = \frac{i+z}{i-z}$

Sección 2b:

- 6.- Bosqueje la región en la que se mapea el sector $r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/6$ considerando las transformaciones (a) $w = z^2$; (b) $w = z^3$; (c) $w = z^4$.
- 7.- Muestre que las líneas $ay = x$ con $a \neq 0$ se mapea en las espirales $\rho = \exp a\varphi$ bajo la transformación $f(z) = \exp z$, donde $w = \rho \exp i\varphi$.
- 8.- Encuentre la imagen de la tira semiinfinita $x \geq 0, 0 \leq y \leq \pi$ bajo la transformación $f(z) = \exp z$, e identifique los segmentos correspondientes de las fronteras.
- 9.- La transformación $f(z) = \frac{1}{z}$, mapea el interior del círculo unitario $|z| = 1$ en su exterior, y viceversa. Bajo esta transformación, ¿en qué se mapea la línea $\arg z = \text{constante}$?

Sección 2c:

- 10.- Considerando que a, b y c denotan constantes complejas, muestre que

(a) $\lim_{z \rightarrow z_0} (az + b) = az_0 + b$;

(b) $\lim_{z \rightarrow z_0} (z^2 + c) = z_0^2 + c$;

- 11.- Considerando que n es un entero positivo, y $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios tales que $Q(z_0) \neq 0$. Use los teoremas sobre límites que apliquen, haciendo mención explícita de ellos, para encontrar

(a) $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{z^n}$, con $z_0 \neq 0$;

(b) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{iz^3 - 1}{z + i}$;

(c) $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{P(z)}{Q(z)}$.

RESPUESTA. (a) $\frac{1}{z_0^n}$; (b) 0; (c) $\frac{P(z_0)}{Q(z_0)}$.

- 12.- Evalúe los siguientes límites usando los teoremas que apliquen. En cada caso, enuncie precisamente qué teorema (o teoremas) usó.

(a) $\lim_{z \rightarrow 2i} (iz^4 + 3z^2 - 10i)$

(b) $\lim_{z \rightarrow e^{\pi i/4}} \frac{z^2}{z^4 + z + 1}$

(c) $\lim_{z \rightarrow i/2} \frac{(2z-3)(4z+i)}{(iz-1)^2}$

(d) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2+1}{z^6+1}$

(e) $\lim_{z \rightarrow 1+i} \left(\frac{z-1-i}{z^2-2z+2} \right)^2$

- 13.- Demuestre que $\lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{z^2 - z + 1 - i}{z^2 - 2z + 2} = 1 - \frac{1}{2}i$.

Sección 2d:

14.- Use los teoremas sobre límites al infinito para mostrar que

$$(a) \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{4z^2}{(z-1)^2} = 4;$$

$$(b) \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(z-1)^3} = \infty;$$

$$(c) \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2+1}{z-1} = \infty;$$

$$(d) \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{3z^4+2z^2-z+1}{z^4+5} = 3.$$

15.- Con la ayuda de los teoremas sobre límites al infinito, muestre que cuando

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

con $ad - bc \neq 0$, se cumple que

$$(a) \lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = \infty, \text{ si } c = 0;$$

$$(b) \lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = \frac{a}{c} \text{ y } \lim_{z \rightarrow -d/c} T(z) = \infty, \text{ si } c \neq 0.$$

16.- Demuestre que $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^3-3z+2}{z^4+z^2-3z+5} = 0$.