Métodos Matemáticos de la Física I
Primera Tarea
(Fecha de entrega: Lunes 25 de Agosto)

Secciones 1a y 1b:

1. Verifique que

   (a) $(\sqrt{2}-i)-i(1-\sqrt{2}i)=-2i$;

   (b) $(2,-3)(-2,1)=(-1,8)$;

   (c) $(3,1)(3,-1)\left(\frac{1}{5},\frac{1}{10}\right)=(2,1)$.

2. Considerando que z es un número complejo, muestre que $(1+z)^2=1+2z+z^2$.

3. Verifique que cada uno de los dos números $z=1\pm i$ satisfacen la ecuación $z^2-2z+2=0$.

4. Verifique

   (a) la ley asociativa para la suma de números complejos, la cual establece que

   $$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$$

   (b) la ley distributiva para números complejos, que se enuncia como $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.

5. Resuelva la ecuación $z^2+z+1=0$ para $z=(x,y)$ escribiéndola como

   $$(x,y)(x,y)+(x,y)+(1,0)=(0,0)$$

   y luego resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas para x e y que resulta.

   RESPUESTA. $z=\left(-\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

6. Reduzca cada una de las siguientes cantidades a un número real:

   (a) $\frac{1+2i}{3-4i}+\frac{2-i}{5i}$;

   (b) $\frac{5i}{(1-i)(2-i)(3-i)}$;

   (c) $(1-i)^4$

   RESPUESTA. (a) $-2/5$; (b) $-1/2$; (c) -4.

7. Localiza gráficamente los números complejos $w_1=z_1+z_2$ y $w_2=z_1-z_2$ cuando

   (a) $z_1=2i,\ z_2=\frac{2}{3}-i$;

   (b) $z_1=(-\sqrt{3},1),\ z_2=(\sqrt{3},0)$;

   (c) $z_1=(-3,1),\ z_2=(1,4)$;

(d) $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_1 - iy_1$.

8. Considerando los números complejos $z_1 = 3 + 4i$ y $z_2 = 2 - i$, represéntelos en un Diagrama de Argand (plano complejo o plano z) junto al número w tal que

(a) $w = z_1 + z_2$;

(b) $w = z_1 - z_2$;

(c) $w = z_1 z_2$;

(d) $w = \frac{z_1}{z_2}$;

(e) $w = z_1 z_1$;

Sección 1c:

9. Verifique que $\sqrt{2}|z| \geq |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$.

10. En cada caso, bosqueje el conjunto de puntos determinados por la condición dada:

(a) $|z - 1 + i| = 1$;

(b) $|z + i| \leq 3$;

(c) $|3z - 5 + i| > 6$;

(d) $|2z - 4i| \geq 7$.

11. Use las propiedades de conjugados y módulos para mostrar que

(a) $\overline{\bar{z} + 3i} = z - 3i$;

(b) $\overline{iz} = -i\bar{z}$;

(c) $\overline{(2 + i)^2} = 3 - 4i$;

(d) $\left|(2\bar{z} + 5)\left(\sqrt{2} - i\right)\right| = \sqrt{3}|2z + 5|$.

12. Bosqueje el conjunto de puntos determinados por la condición

(a) $\mathrm{Re}(\bar{z} - i) = 2$;

(b) $|2\bar{z} + i| = 4$.

13. Pruebe que

(a) z es real si y sólo si $\bar{z} = z$;

(b) z es ya sea real o imaginario puro si y sólo si $\bar{z}^2 = z^2$.

14. Usando las expresiones

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{z+\bar{z}}{2} \text{ e } \mathrm{Im}\, z = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

muestre que la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ se puede escribir como $z^2 + \bar{z}^2 = 2$.

Sección 1d:

15. Encuentre el valor principal del argumento, $\operatorname{Arg} z$, cuando

(a) $z = \frac{i}{-2-2i}$;

(b) $z = \left(\sqrt{3} - i\right)^6$.

RESPUESTA. (a) $-3\pi/4$; (b) π.

16. Use la *fórmula de Moivre* para obtener las siguientes identidades trigonométricas:

(a) $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$;

(b) $\sin 3\theta = 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta$.

17. Considerando que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, use el desarrollo de $e^{i\frac{\pi}{12}}$ para evaluar $\cot\frac{\pi}{12}$.

RESPUESTA. $2 + \sqrt{3}$.

18. Sean z un número complejo no nulo y n un entero negativo ($n = -1, -2, \cdots$). Considere escribir $z = re^{i\theta}$ y $m = -n = 1,2,\cdots$. Usando las expresiones

$$z^m = r^m e^{im\theta} \quad \text{y} \quad z^{-1} = \left(\frac{1}{r}\right) e^{-i\theta}$$

verifique que $(z^m)^{-1} = (z^{-1})^m$ y entonces la definición $z^n = (z^{-1})^m$ puede escribirse de manera alterna como $z^n = (z^m)^{-1}$.

19. Pruebe que dos números complejos no nulos z_1 y z_2 tienen los mismo módulos si y sólo si hay dos números complejos c_1 y c_2 tales que $z_1 = c_1 c_2$ y $z_2 = c_1\overline{c_2}$.

SUGERENCIA: Note que

$$\exp\left(i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\exp\left(i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right) = \exp(i\theta_1)$$

y

$$\exp\left(i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\overline{\exp\left(\imath\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)} = \exp(i\theta_2)$$

20. Evalúe las siguientes expresiones:

(a) $\operatorname{Re} e^{2iz}$

(b) $\left|e^{\sqrt{i}}\right|$

(c) e^{i^3}

(d) i^i

RESPUESTA. (a) $e^{-2y}\cos 2x$; (b) $e^{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$; (c) $\cos 1 - i\sin 1$; (d) $e^{-\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}$.

Sección 1e:

21. En cada caso, encuentre todas las raíces en notación rectangular, muéstrelas como los vértices de ciertos cuadrados e indique cuál de ellas es la raíz principal:

(a) $(-16)^{1/4}$;

(b) $\left(-8-8\sqrt{3}i\right)^{1/4}$.

RESPUESTAS: (a) $\pm\sqrt{2}(1+i)$, $\pm\sqrt{2}(1-i)$; (b) $\pm\left(\sqrt{3}-i\right)$, $\pm\left(1+\sqrt{3}i\right)$.

22. En cada caso, encuentre todas las raíces en notación rectangular, muéstrelas como los vértices de ciertos polígonos regulares e identifique la raíz principal:

(a) $(-1)^{1/3}$;

(b) $8^{1/6}$.

RESPUESTAS: (b) $\pm\sqrt{2}$, $\pm\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}}$, $\pm\frac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}}$.

23. (a) Sea a cualquier número real fijo y muestre que las dos raíces cuadradas de $a+i$ son

$$\pm\sqrt{A}\exp\left(i\frac{\alpha}{2}\right)$$

donde $A=\sqrt{a^2+1}$ y $\alpha=\operatorname{Arg}(a+i)$.

(b) Con la ayuda de las identidades trigonométricas

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1+\cos\alpha}{2} \text{ y } \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

muestre que las raíces cuadradas obtenidas en la parte (a) se pueden escribir como

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{A+a}+i\sqrt{A-a}\right)$$

24. Encuentre los cuatro ceros (raíces) del polinomio z^4+4, siendo uno de ellos

$$z_0=\sqrt{2}e^{i\pi/4}=1+i$$

Luego use estos ceros para factorizar z^4+4 en factores cuadráticos con coeficientes reales.

RESPUESTA: $(z^2+2z+2)(z^2-2z+2)$.

25. Encuentre cada una de las raíces indicadas, localícelas gráficamente e identifique a la raíz principal.

(a) $\left(2\sqrt{3}-2i\right)^{1/2}$;

(b) $(-4+4i)^{1/5}$;

(c) $\left(2+2\sqrt{3}i\right)^{1/3}$;

(d) $(-16i)^{1/4}$;

(e) $(64)^{1/6}$;

(f) $(i)^{2/3}$.

26. Encuentre todas las raíces indicadas, localícelas en el plano complejo e identifique a la raíz principal.

(a) Raíz cúbica de 8;

(b) Raíz cuadrada de $4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$;

(c) Raíz quinta de $-16 + 16\sqrt{3}i$;

(d) Raíz sexta de $-27i$.

27. Encuentre las raíces cuadradas de (a) $5 - 12i$, (b) $8 + 4\sqrt{5}i$.

RESPUESTA: (a) $3 - 2i, -3 + 2i$; (b) $\sqrt{10} + \sqrt{2}i, -\sqrt{10} - \sqrt{2}i$.

Sección 1f:

28. Bosqueje los siguientes conjuntos y determine cuáles son dominios:

(a) $|z - 2 + i| \leq 1$;

(b) $|2z + 3| > 4$;

(c) $\operatorname{Im} z > 1$;

(d) $\operatorname{Im} z = 1$;

(e) $0 \leq \arg z \leq \pi/4 \ (z \neq 0)$;

(f) $|z - 4| \geq |z|$.

RESPUESTA: (b), (c) son dominios.