5.2 Polinomios de Legendre y Funciones de Bessel.

5.2.1Ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden.

En Física Teórica, el estudio de una gran cantidad de sistemas de interés requiere de la solución de ecuaciones diferenciales parciales que en forma general pueden escribirse como:

$$\hat{L}\Psi = F \tag{5.2.1}$$

en donde $\hat{L}$ es un operador diferencial

$$\hat{L} = \hat{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t}, x, y, z\right) \tag{5.2.2}$$

F es una función conocida, y Ψ es una función escalar (o vectorial) desconocida. La Ec. (5.2.1) es lineal en Ψ y es de 2º orden (aunque puede darse el caso de órdenes más altos).

Casos especiales de la Ec. (5.2.1):

1. Ecuación de Laplace

$$\nabla^2\Psi = 0 \tag{5.2.3}$$

donde Ψ puede ser:

i) Potencial gravitacional en una región sin materia.
ii) Potencial electrostático en una región sin cargas.
iii) Temperatura de estado estacionario sin fuentes de calor.
iv) Potencial de velocidad en un fluido incompresible sin vórtices, ni fuentes, ni sumideros.

2. Ecuación de Poisson

$$\nabla^2\Psi = f(x, y, z) \tag{5.2.4}$$

con Ψ igual que para la Ec. (5.2.3) pero con fuentes.

3. Ecuación de difusión o de flujo de calor

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{5.2.5}$$

donde Ψ puede ser:

i) Temperatura de estado no estacionario (varía con el tiempo) en una región sin fuentes.
ii) Concentración de una sustancia difundiéndose (α se conoce como constante de difusividad).

4. Ecuación de onda

$$\nabla^2\Psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \tag{5.2.6}$$

aquí Ψ puede representar:

i) Desplazamiento desde el equilibrio de una cuerda vibrante o de una membrana, o en acústica, de un medio vibrante (gas, líquido o sólido).

ii) La corriente o potencial en una línea de transmisión.

iii) Componente del campo eléctrico $\vec{E}$ o del campo magnético $\vec{H}$ en una onda electromagnética (*v* es la velocidad de propagación de las ondas).

5. Ecuación de onda de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V(r)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{5.2.7}$$

y la ecuación de estados estacionarios de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\varphi + V(r)\varphi = E\varphi \tag{5.2.8}$$

donde Ψ representa la función de onda asociada a un ensemble de partículas microscópicas y φ es la parte espacial (independiente del tiempo) de la función de onda, $V(r)$ es el potencial, E la energía de las partículas y m su masa, y $\hbar$ es la constante de Planck dividida entre 2π.

6. Ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2\varphi + k^2\varphi = 0 \tag{5.2.9}$$

La función φ representa la parte espacial (independiente del tiempo) de la solución de la ecuación de difusión o de la ecuación de onda.

5.2.2 Ecuación de Helmholtz y el método de separación de variables.

Debido a que la ecuación de Helmholtz, Ec. (5.2.9), puede obtenerse a partir de la ecuación de difusión, de la ecuación de onda, de la ecuación de onda de Schrödinger, y se reduce a la ecuación de Laplace cuando $k^2 = 0$, obtendremos su solución explícita (analítica) en diferentes sistemas de coordenadas.

La ecuación de Helmholtz es una ecuación diferencial en derivadas parciales que puede resolverse usando el método de separación de variables. La ecuación se separa en ecuaciones diferenciales ordinarias que pueden resolverse por el método de Fröbenius; no siempre puede separarse pero cuando esto ocurre resulta ser el método más simple.

Existen 14 sistemas de coordenadas de interés, en 11 de los cuales la ecuación de Helmholtz es separable:

1. Cartesianas rectangulares
2. Polares esféricas
3. Cilíndricas circulares
4. Cilíndricas elípticas
5. Cilíndricas parabólicas
6. Bipolares
7. Esferoidales prolatas
8. Esferoidales oblatas
9. Parabólicas
10. Toroidales
11. Biesféricas
12. Elipsoidales confocales
13. Cónicas
14. Parabólicas confocales

Excepto para los sistemas coordenados bipolar, toroidal y biesférico, todos los sistemas coordenados son derivables de las coordenadas elipsoidales confocales.

El operador Laplaciano ∇^2 en los sistemas de coordenadas más conocidos adopta la forma:

Coordenadas rectangulares,

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{5.2.10}$$

Coordenadas esféricas,

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sen^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{5.2.11}$$

Coordenadas cilíndricas,

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{5.2.12}$$

5.2.3 Ecuación de Helmholtz en coordenadas rectangulares

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + k^2\varphi = 0 \tag{5.2.13}$$

Se propone una solución de la forma:

$$\varphi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z) \tag{5.2.14}$$

y se sustituye en la Ec. (5.2.13)

$$YZ\frac{d^2X}{dx^2} + XZ\frac{d^2Y}{dy^2} + XY\frac{d^2Z}{dz^2} + k^2XYZ = 0 \tag{5.2.15}$$

dividiendo entre $\varphi = XYZ$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} + k^2 = 0 \tag{5.2.16}$$

reescribiendo,

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -k^2 - \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} - \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} \tag{5.2.17}$$

La ecuación se satisface si cada miembro es igual a la misma constante (de separación), así se tiene que

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -k_x^2 \tag{5.2.18}$$

$$-k^2 - \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} - \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -k_x^2 \tag{5.2.19}$$

de aquí se sigue que

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -k^2 + k_x^2 - \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} \tag{5.2.20}$$

de nuevo, esta ecuación se satisface si cada miembro es igual a una constante

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -k_y^2 \tag{5.2.21}$$

$$-k^2 + k_x^2 - \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -k_y^2 \tag{5.2.22}$$

Rescribiendo la última ecuación como

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -k^2 + k_x^2 + k_y^2 = -k_z^2 \tag{5.2.23}$$

Como resultado de este procedimiento, la ecuación de Helmholtz se ha separado en tres ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d^2X}{dx^2} + k_x^2 X = 0, \quad \frac{d^2Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0, \quad \frac{d^2Z}{dz^2} + k_z^2 z = 0 \tag{5.2.24}$$

con $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$.

La solución más general de la ecuación de Helmholtz es

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{k_x, k_y, k_z}^{\infty} A_{k_x, k_y, k_z} X(k_x x) Y(k_y y) Z(k_z z) \tag{5.2.25}$$

5.2.4 Ecuación de Helmholtz en coordenadas polares esféricas y Polinomios de Legendre.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sen\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 sen^2\theta}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} + k^2 \varphi = 0 \tag{5.2.26}$$

Consideremos el caso de simetría acimutal, es decir, en el que no hay dependencia de la coordenada ϕ. La solución propuesta es

$$\varphi(r, \theta) = R(r)\mathrm{P}(\theta) \tag{5.2.27}$$

sustituyendo en la Ec. (5.2.26) y dividiendo entre $\varphi = RP$, queda

$$\frac{1}{R}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\mathrm{P}}\frac{1}{sen\theta}\frac{d}{d\theta}\left(sen\theta \frac{dP}{d\theta}\right) + k^2 = 0 \tag{5.2.28}$$

multiplicando por r^2 la ecuación se separa como sigue

$$\frac{1}{\mathrm{P}}\frac{1}{sen\theta}\frac{d}{d\theta}\left(sen\theta \frac{dP}{d\theta}\right) = -\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) - k^2 r^2 = -\lambda \tag{5.2.29}$$

o,

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} + (k^2 r^2 - \lambda) = 0 \tag{5.2.30}$$

$$\frac{1}{sen\theta}\frac{d}{d\theta}\left(sen\theta \frac{dP}{d\theta}\right) + \lambda P = 0 \tag{5.2.31}$$

La Ec. (5.2.31) es la ecuación diferencial de Legendre. Las soluciones físicamente aceptables en el intervalo $[0,2\pi]$ corresponden a los valores de $\lambda = \ell(\ell+1)$ donde $\ell = 0,1,2,\ldots$ Estas soluciones son los Polinomios de Legendre, $P_\ell(\theta)$.

Para escribir la ecuación en una forma más usual, cambiamos a la variable

$$x = cos\theta \tag{5.2.32}$$

así se tiene que

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta}\frac{d}{dx} = -sen\theta\,\frac{d}{dx}$$

$$sen\theta\,\frac{d}{d\theta} = -sen^2\theta\,\frac{d}{dx} = -(1-x^2)\,\frac{d}{dx}$$

$$\frac{1}{sen\theta}\frac{d}{d\theta}\left(sen\theta\,\frac{d}{d\theta}\right) = \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\,\frac{d}{dx}\right] \tag{5.2.33}$$

de aquí,

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\,\frac{dP}{dx}\right] + \lambda P = 0 \tag{5.2.35}$$

o,

$$(1-x^2)\,\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\,\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0 \tag{5.2.36}$$

Cuando $\lambda = n(n+1)$, con n entero positivo, las soluciones de la ecuación de Legendre, Ec. (5.2.36), en el intervalo $[-1,1]$ son los polinomios de Legendre de grado *n*, $P_n(x)$. Algunos polinomios de Legendre son:

n	$P_n(x)$
0	1
1	x
2	$\frac{1}{2}(3x^2-1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3-3x)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$
5	$\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$

La Figura 4 muestra la gráfica de los primeros polinomios de Legendre:

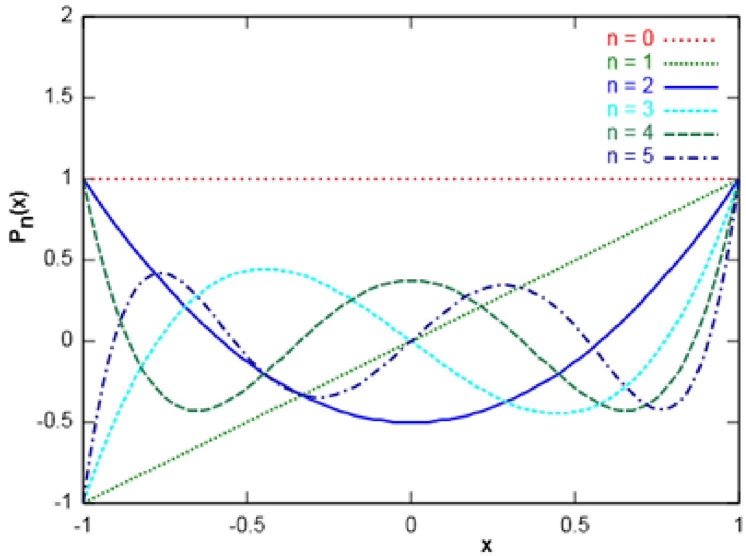

Figura 4. Polinomios de Legendre

5.2.4.1 Fórmula de Rodrigues.

Los polinomios de Legendre se pueden escribir en términos de la fórmula de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \tag{5.2.37}$$

5.2.4.2 Función generadora.

Los polinomios de Legendre pueden ser obtenidos mediante una función generadora. La función generadora $G(x,t)$ de los polinomios de Legendre es

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \tag{5.2.38}$$

La función generadora tiene una interpretación geométrica muy simple, es el inverso de la distancia entre dos puntos, ya que la distancia del punto $\vec{r}$ al punto $\vec{r}_0$ es

$$|\vec{r}-\vec{r}_0| = \sqrt{r^2 - 2rr_0 cos\theta + r_0^2}, \tag{5.2.39}$$

donde θ es el ángulo entre $\vec{r}$ y $\vec{r}_0$. Supongamos que $r > r_0$, entonces

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1-2tcos\theta+t^2}} \tag{5.2.40}$$

donde $t = r_0/r$, el lado derecho de la expresión anterior es la función generadora de los polinomios de Legendre y por lo tanto podemos escribir

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(cos\theta). \tag{5.2.41}$$

La expresión anterior puede ser interpretada físicamente como el potencial eléctrico en el punto $\vec{r}$ producido por la unidad de carga colocada en el punto $\vec{r}_0$.

5.2.5 Ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas circulares y funciones de Bessel.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + k^2\varphi = 0 \tag{5.2.42}$$

Se propone una solución de la forma

$$\varphi(\rho,\phi,z) = \mathrm{R}(\rho)\Phi(\phi)\mathrm{Z}(z) \tag{5.2.43}$$

sustituyendo en la Ec. (5.2.42)

$$\Phi\mathrm{Z}\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\mathrm{R}}{d\rho}\right) + \mathrm{RZ}\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \mathrm{R}\Phi\frac{d^2\mathrm{Z}}{dz^2} + k^2\mathrm{R}\Phi\mathrm{Z} = 0 \tag{5.2.44}$$

dividiendo entre $\varphi = R\Phi Z$

$$\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\mathrm{R}}{d\rho}\right) + \frac{1}{\Phi}\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \frac{1}{\mathrm{Z}}\frac{d^2\mathrm{Z}}{dz^2} + k^2 = 0 \tag{5.2.45}$$

de aquí,

$$\frac{1}{\mathrm{Z}}\frac{d^2\mathrm{Z}}{dz^2} = -k^2 - \frac{1}{\mathrm{R}}\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\mathrm{R}}{d\rho}\right) - \frac{1}{\Phi}\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} \tag{5.2.46}$$

la Ec. (5.2.46) se satisface si cada miembro es igual a una constante

$$\frac{1}{\mathrm{Z}}\frac{d^2\mathrm{Z}}{dz^2} = -k_z^2 \tag{5.2.47}$$

$$-k^2 - \frac{1}{\mathrm{R}}\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\mathrm{R}}{d\rho}\right) - \frac{1}{\Phi}\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -k_z^2 \tag{5.2.48}$$

La última ecuación la multiplicamos por ρ^2

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -\frac{1}{\mathrm{R}}\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\mathrm{R}}{d\rho}\right) + (k_z^2 - k^2)\rho^2 \tag{5.2.49}$$

de nuevo, esta ecuación se satisface si

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -\lambda^2 \tag{5.2.50}$$

$$-\frac{1}{\mathrm{R}}\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\mathrm{R}}{d\rho}\right) + (k_z^2 - k^2)\rho^2 = -\lambda^2 \tag{5.2.51}$$

reescribiendo,

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\mathrm{R}}{d\rho}\right) + [(k^2 - k_z^2)\rho^2 - \lambda^2]R = 0 \tag{5.2.52}$$

La Ec. (5.2.52) es la ecuación diferencial de Bessel. Para escribir la ecuación de Bessel en una forma más usual, cambiamos a la variable

$$x = \sqrt{(k^2 - k_z^2)}\rho \tag{5.2.53}$$

luego,

$$\frac{d}{d\rho} = \frac{dx}{d\rho}\frac{d}{dx} = \sqrt{(k^2 - k_z^2)}\frac{d}{dx}$$

$$\rho\frac{d}{d\rho} = x\frac{d}{dx}$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}\right) = x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\right) \tag{5.2.54}$$

la ecuación queda

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d\mathrm{R}}{dx}\right) + [x^2 - \lambda^2]R = 0 \tag{5.2.55}$$

o,

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + [x^2 - \lambda^2]y = 0 \tag{5.2.56}$$

Las funciones de Bessel son soluciones de la ecuación diferencial de Bessel, Ec. (5.2.56), donde λ es un parámetro real no negativo; la ecuación está definida para $x \geq 0$. La solución general cuando λ no es un entero es

$$y(x) = aJ_\lambda(x) + bJ_{-\lambda}(x) \tag{5.2.57}$$

donde $J_\lambda(x)$ queda expresada por la serie de Bessel

$$J_\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\lambda + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+2k} \tag{5.2.58}$$

Cuando $\lambda = n$, entero, se obtienen las funciones de Bessel de orden entero

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n + k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \tag{5.2.59}$$

Se cumple la relación

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \tag{5.2.60}$$

por lo que $J_{-n}(x)$ no es independiente de $J_n(x)$, y se requiere de una segunda solución. La segunda solución está dada por la función de Neumann

$$N_\lambda(x) = \frac{J_\lambda(x) cos\lambda\pi - J_{-\lambda}(x)}{sen\lambda\pi} \tag{5.2.61}$$

La solución general a la ecuación de Bessel es

$$y(x) = aJ_n(x) + bN_n(x) \tag{5.2.62}$$

La Figura 5 muestra la gráfica de algunas funciones de Bessel de primer tipo, $J_n(x)$.

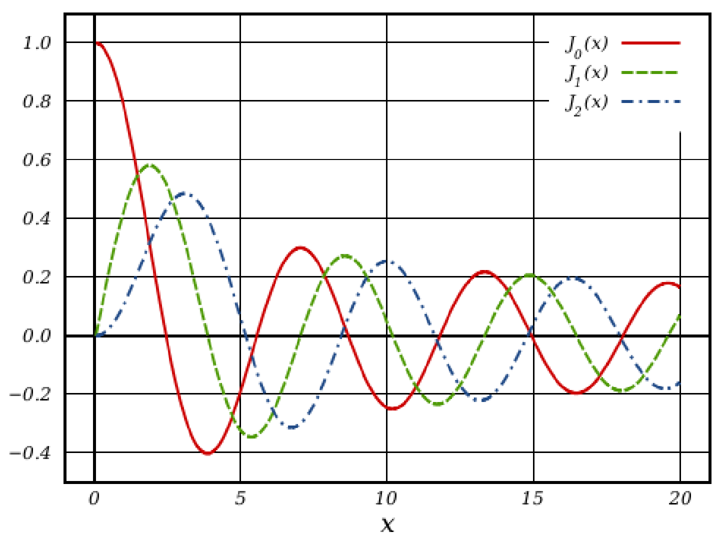

Figura 5. Funciones de Bessel de primer tipo, $J_n(x)$, para n =0, 1,2.

La figura 6 muestra la gráfica de algunas funciones de Bessel de segundo tipo, $N_n(x)$.

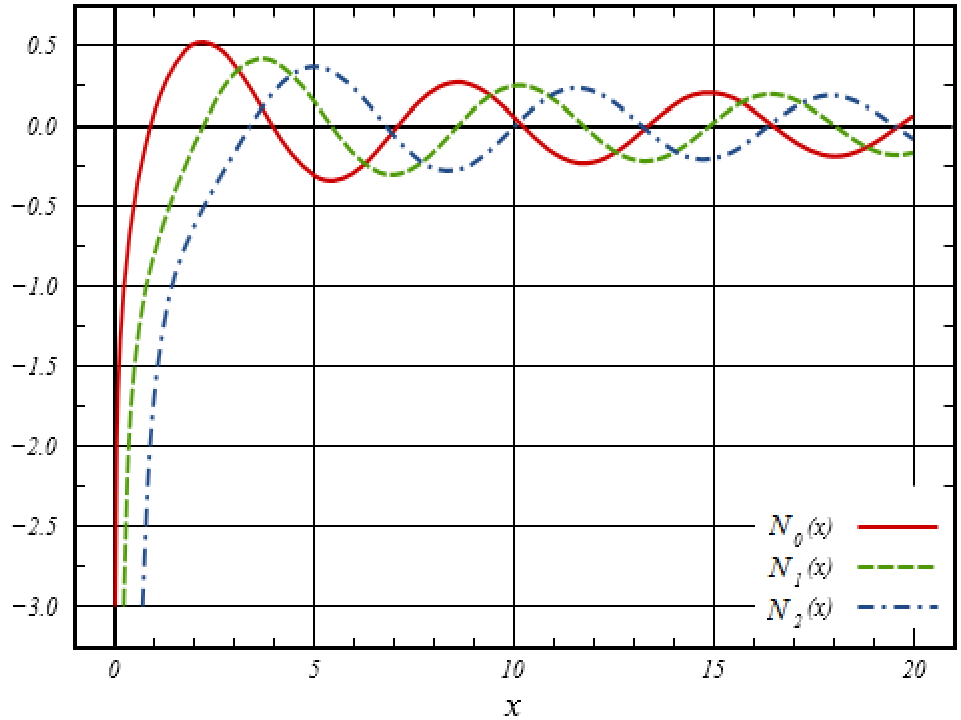

Figura 6. Funciones de Bessel de segundo tipo, $N_n(x)$, para n =0, 1,2.

Cuando en la ecuación de Helmholtz, k = 0, la ecuación se reduce a la ecuación de Laplace $\nabla^2\varphi = 0$; en este caso el método de separación de variables conduce a la ecuación diferencial de Bessel modificada

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\mathrm{R}}{d\rho}\right) - [k_z^2\rho^2 + \lambda^2]R = 0 \tag{5.2.63}$$

Una ecuación semejante a la Ec. (5.2.63) se obtiene cuando se separa la ecuación diferencial

$$\nabla^2\varphi - k^2\varphi = 0 \tag{5.2.64}$$

puesto que en esta caso el método de separación de variables conduce a la ecuación

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d\mathrm{R}}{d\rho}\right) - [(k^2 + k_z^2)\rho^2 + \lambda^2]R = 0 \tag{5.2.65}$$

Realizando el cambio de variable

$$ix = \sqrt{-(k^2 + k_z^2)}\rho = i\sqrt{(k^2 + k_z^2)}\rho \tag{5.2.66}$$

se llega a la ecuación diferencial de Bessel,

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+[(ix)^2-\lambda^2]y=0 \tag{5.2.67}$$

Cuando λ es diferente de un entero, la solución general de la Ec. (5.2.67) es

$$y(x)=aJ_\lambda(ix)+bJ_{-\lambda}(ix) \tag{5.2.68}$$

La forma explícita de $J_\lambda(ix)$ se obtiene de la Ec. (5.2.58)

$$J_\lambda(ix)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^\lambda}{k!\,\Gamma(\lambda+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+2k} \tag{5.2.69}$$

Esta función toma valores en los complejos, por lo que se define la función real

$$I_\lambda(x)\equiv i^{-\lambda}J_\lambda(ix)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma(\lambda+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+2k} \tag{5.2.70}$$

Se define también la función real

$$I_{-\lambda}(x)\equiv i^{\lambda}J_{-\lambda}(ix) \tag{5.2.71}$$

y la solución general de la Ec. (5.2.67) se escribe como una combinación lineal de las funciones de Bessel modificadas

$$y(x)=aI_\lambda(x)+bI_{-\lambda}(x) \tag{5.2.72}$$

Cuando λ es un entero no negativo, las dos funciones de Bessel modificadas son iguales, $I_{-n}(x)=I_n(x)$, y por lo tanto se requiere de una segunda solución independiente de $I_n(x)$.

Se define la función de Bessel modificada de segundo tipo de orden λ como

$$K_\lambda(x)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\lambda}(x)-I_\lambda(x)}{sen\lambda\pi} \tag{5.2.73}$$

La solución general a la función de Bessel modificada es

$$y(x)=aI_n(x)+bK_n(x) \tag{5.2.74}$$

La Figura 7 muestra la gráfica de algunas funciones de Bessel modificadas de primer tipo.

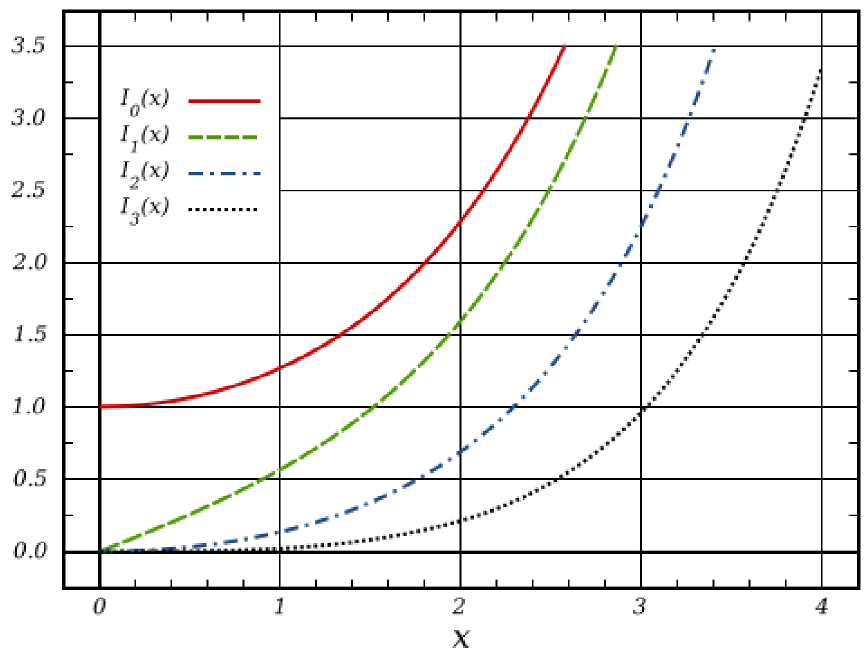

Figura 7. Funciones de Bessel modificadas de primer tipo, $I_n(x)$, para n = 0, 1, 2, 3.

La Figura 8 muestra la gráfica de algunas funciones de Bessel modificadas de segundo tipo.

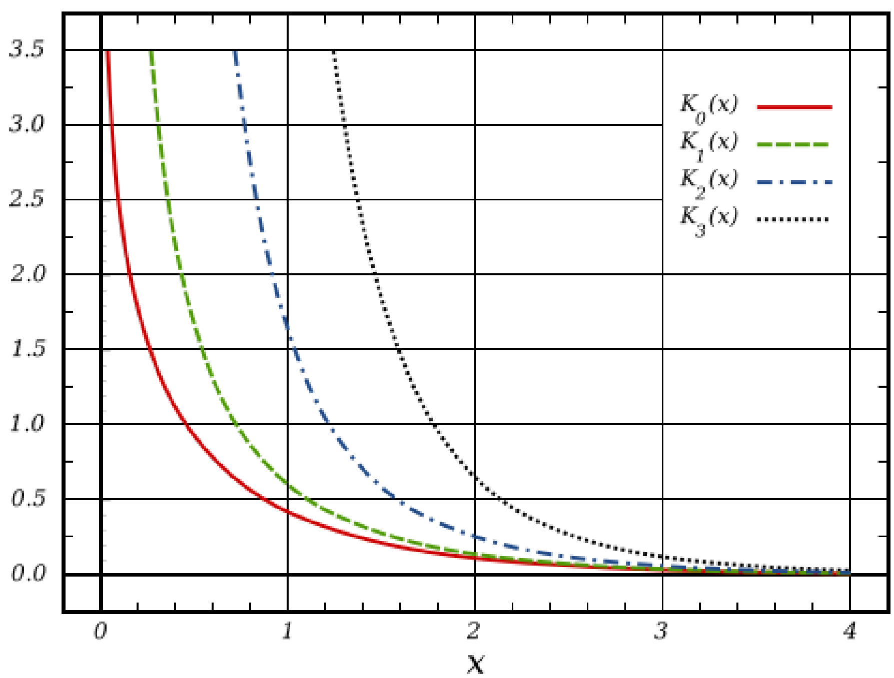

Figura 8. Funciones de Bessel modificadas de segundo tipo, $K_n(x)$, para n = 0, 1, 2, 3.