Unidad V: TÓPICOS ESPECIALES

5.1 La Función Gamma y Funciones Relacionadas

5.1.1. Función Gamma

La **función Gamma** (denotada como $\Gamma(z)$) es una función que aparece en muchos tópicos de la Física-Matemática. La notación fue ideada por Adrien-Marie Legendre en 1814.

Consideremos la integral

$$I_n = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt \tag{5.1.1}$$

con n un número entero positivo. Integrando por partes obtenemos la relación de recurrencia

$$I_n = t^n e^{-t}|_0^\infty + n\int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt = n\int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt \tag{5.1.2}$$

o,

$$I_n = nI_{n-1} \tag{5.1.3}$$

Con la condición inicial $I_0 = 1$.

Usando la relación de recurrencia en forma consecutiva obtenemos

$$I_n = n(n-1)(n-2)\cdots 1 \times I_0 = n! \tag{5.1.4}$$

Cuando n no es un número entero la fórmula (5.1.3) aún es válida. La función Gamma está definida como

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \tag{5.1.5}$$

La integral converge para toda $x > 0$. Integrando por partes obtenemos la propiedad básica

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{5.1.6}$$

con $\Gamma(1) = 1$. Cuando $x = n$ entero, $\Gamma(n+1) = n!$. El factorial de cero se define por:

$$0! = \Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1. \tag{5.1.7}$$

La propiedad básica, Ec. (5.1.6), permite extender la definición de la función Gamma a la región $x < 0$. Así, el cálculo de $\Gamma(x+n+1)$, con n entero conduce a

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n+1)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \tag{5.1.8}$$

Como $x + n + 1 > 0$, entonces $\Gamma(x)$ está bien definida cuando $x > -(n + 1)$, excepto en los puntos $x = 0, -1, -2, \ldots, -n$. Definimos la función Gamma como

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt & x > 0 \\ \dfrac{\Gamma(x+n+1)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} & -n-1 < x < 0, \;\; x \neq 0, -1, -2, \ldots \end{cases} \tag{5.1.9}$$

De la definición anterior se sigue que

$$\lim_{x \to 0^\pm, -1^\pm, -2^\pm, \ldots} \Gamma(x) = \pm\infty \tag{5.1.10}$$

En la Figura 1 se muestra la gráfica de la función Gamma.

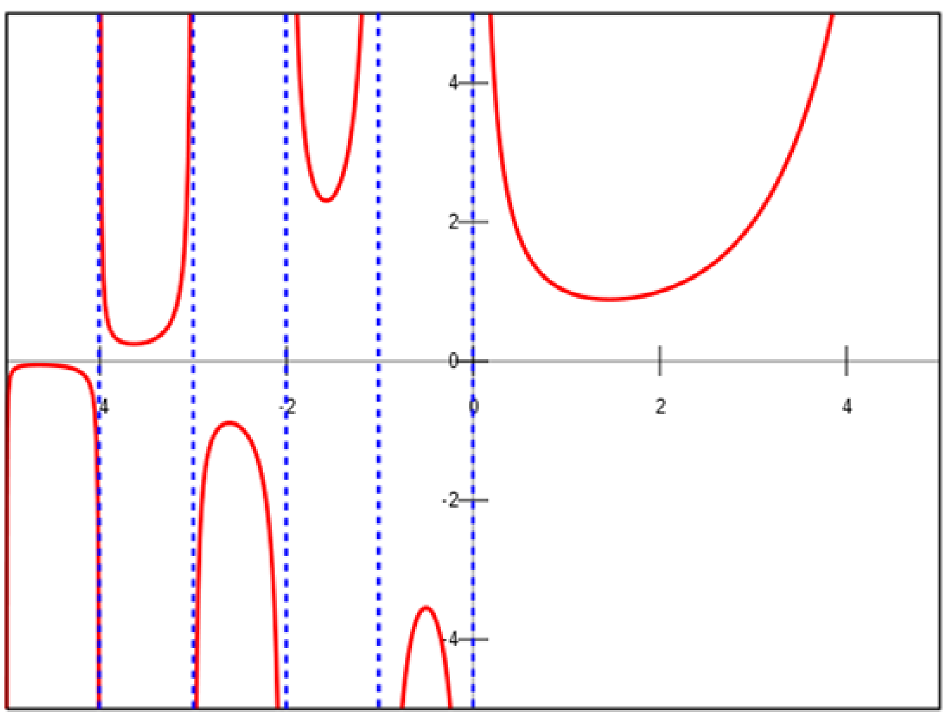

Figura 1. Función Gamma

5.1.2 La Función Beta

La **función Beta** (denotada como $B(x, y)$) es una función ligada a la función Gamma. Consideremos el producto de dos funciones Gamma

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty u^{x-1}\, e^{-u} du \int_0^\infty v^{y-1}\, e^{-v} dv$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty u^{x-1}\, v^{y-1}\, e^{-(u+v)} dudv \qquad (5.1.11)$$

Cambiando a las variables

$$u = p^2 \qquad \text{y} \qquad v = q^2 \qquad (5.1.12)$$

obtenemos

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty p^{2x-1}\, q^{2y-1}\, e^{-(p^2+q^2)} dpdq \qquad (5.1.13)$$

Usando coordenadas polares en el plano p - q, la integración queda limitada al primer cuadrante

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4 \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^{2x+2y-1}\, e^{-r^2} cos^{2x-1}\varphi sen^{2y-1}\varphi drd\varphi$$

$$= 4 \int_0^\infty r^{2x+2y-1}\, e^{-r^2} dr \int_0^{\pi/2} cos^{2x-1}\varphi sen^{2y-1}\varphi d\varphi \qquad (5.1.14)$$

Cambiando a la variable: $t = r^2$

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 2 \int_0^\infty t^{(x+y)-1}\, e^{-t} dt \int_0^{\pi/2} cos^{2x-1}\varphi sen^{2y-1}\varphi d\varphi \qquad (5.1.15)$$

así que

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 2\Gamma(x+y) \int_0^{\pi/2} cos^{2x-1}\varphi sen^{2y-1}\varphi d\varphi \qquad (5.1.16)$$

Se define la función Beta como

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} cos^{2x-1}\varphi sen^{2y-1}\varphi d\varphi \qquad (5.1.17)$$

o bien, con el cambio de variable: $t = cos^2\varphi$

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \qquad (5.1.18)$$

La relación entre las funciones Beta y Gamma es:

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{5.1.19}$$

De esta expresión se sigue que la función Beta es simétrica en sus argumentos, es decir $B(x,y) = B(y,x)$. Además, usando la propiedad básica de la función Gamma, se obtiene la propiedad básica de la función Beta

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y} B(x,y). \tag{5.1.20}$$

En la Figura 2 se muestra la gráfica de la función Beta.

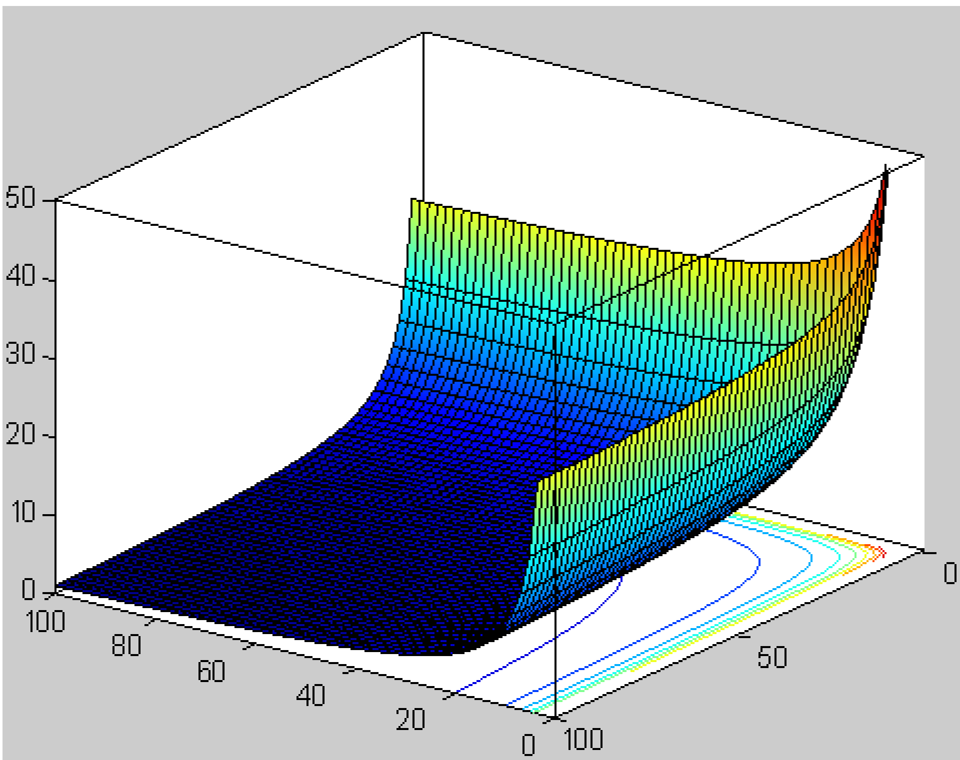

Figura 2. Función Beta

5.1.3 Función de Error

La **función de Error** (denotada $\mathrm{erf}(x)$) se define como:

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \tag{5.1.21}$$

$$\mathrm{erfc}(x) = 1 - \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

normalizada tal que $\mathrm{erf}(\infty) = 1$.

Esta función juega un papel importante en la teoría de la probabilidad.

La integral de la función de Error no se puede realizar con funciones elementales, pero si se desarrolla el integrando en una serie de Taylor, se obtiene la serie de Taylor de la función de Error:

$$\mathrm{erf(x)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} \tag{5.1.22}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} - \cdots \right)$$

Se basa en el desarrollo

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}. \tag{5.1.23}$$

La Figura 3 muestra la gráfica de la función de error.

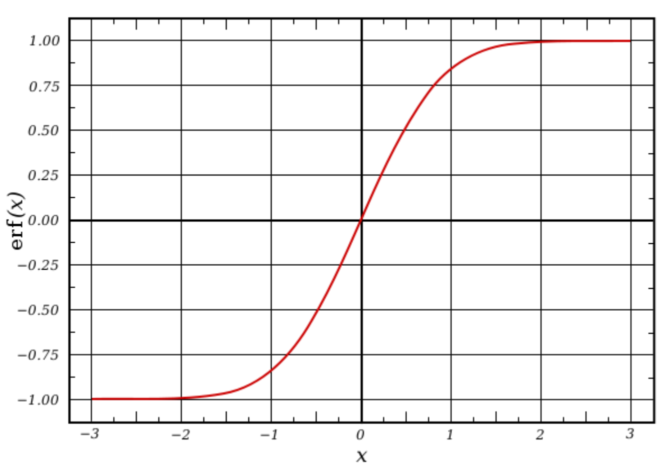

Figura 3. Función de Error.