4.- Series. Criterios de convergencia. Series de Taylor y Laurent

a) Introducción. Series de funciones reales.
b) Convergencia de secuencias y series.
c) Series de Taylor.
d) Series de Laurent.
e) Propiedades adicionales de las series.
   i. Continuidad de una serie de potencias.
   ii. Integración y derivación de series de potencias.
   iii. Multiplicación y división de series de potencias

a).- Introducción. Series de funciones reales.

Las series de potencia son, a menudo, una suma infinita de términos. Un ejemplo de una serie de potencias es

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

De forma más general, se dice que una serie de potencias centrada en a es una serie de potencias en $(x-a)$ de la forma

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \cdots$$

En estas series de potencias, los coeficientes c_n son constantes que más adelante veremos cómo se determinan.

Un problema importante que puede representar una serie infinita de potencias es que esta puede divergir, esto es, podría resultar infinita conforme se le añaden cada vez más términos; este tipo de series no son funcionales y en lo que sigue, buscaremos que las series que usemos sean convergentes.

Se dice que **una serie converge** para un valor particular de x si su límite es finito, es decir

$$-\infty < \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n < \infty$$

de lo contrario, se dice que la serie no converge.

Se dice que **una serie converge absolutamente** si la sumatoria de los valores absolutos de sus términos converge, es decir

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left| c_n x^n \right| < \infty$$

Si una serie converge absolutamente, también converge.

La pregunta ahora es: ¿cómo sabemos si una serie converge o no?

La respuesta es sencilla, podemos usar el "criterio del cociente" (ratio test), pero antes generalicemos y ampliemos las ideas anteriores.

Si ahora consideramos la expresión general para una serie de potencias, a saber

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

entonces, la serie converge si existe el siguiente límite de las sumas parciales:

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} c_n (x-a)^n$$

Se llama **intervalo de convergencia** al conjunto de números reales x o intervalo para los que la serie converge.

Se llama **radio de convergencia** al número positivo (o cero) ρ, tal que la serie converge absolutamente si

$$|x-a| < \rho\,,$$

y diverge si

$$|x-a| > \rho\,.$$

La región en la que

$$|x-a| < \rho$$

(donde la serie converge) se llama **intervalo de convergencia**. Dentro de su intervalo de convergencia, una serie de potencias converge absolutamente

Si $\rho = 0$ la serie converge solo para $x = a$, si la serie converge para todo x, entonces escribimos $\rho = \infty$.

Prueba de convergencia (criterio del cociente o "ratio test")

Considerando la serie

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

y suponiendo que $c_n \neq 0$ para todo n, podemos escribir el siguiente cociente

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n (x-a)^n} \right| = |\,x-a\,| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = L$$

Si $L < 1$, la serie converge absolutamente; si $L > 1$, la serie diverge; y si $L = 1$, el criterio no es concluyente.

Un ejemplo sencillo. ¿En qué intervalo, si es que existe, la siguiente serie converge absolutamente?

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,(x-3)^n$$

El primer paso es construir el cociente de los términos $n+1$ y n, es decir

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n(x-a)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(x-3)^{n+1}}{(-1)^n(x-3)^n}\right|$$

es decir

$$L=\left|(-1)(x-3)\right|=\left|x-3\right|<1$$

Lo cual se cumple si x se ubica en el intervalo $2<x<4$, fuera de este intervalo, la serie diverge.

Otro ejemplo. ¿En qué intervalo, si es que existe, la siguiente serie converge absolutamente?

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{5^k}{k!}x^k$$

En este caso, el cociente de los términos $n+1$ y n es

$$L=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\dfrac{5^{k+1}}{(k+1)!}x^{k+1}}{\dfrac{5^k}{k!}x^k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{5}{k+1}x\right|=0<1$$

Lo cual se cumple para toda x, por lo tanto, la serie converge absolutamente para todos los reales.

Un ejercicio. ¿En qué intervalo, si es que existe, la siguiente serie converge absolutamente?

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2x+1)^k}{k^2}$$

Ajustando los índices en una serie.

Una herramienta útil cuando trabajamos con series es el llamado cambio de índices en una serie.

Un ejemplo. Supongamos que se tiene la siguiente serie que inicia en $n=3$:

$$y=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{n^2}$$

Para que inicie en $n = 0$ bastará hacer el siguiente cambio: n se sustituye por $k + 3$

$$y = \sum_{k+3=3}^{\infty} \frac{(2x+1)^{k+3}}{(k+3)^2}$$

y luego se regresa a n:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+1)^{n+3}}{(n+3)^2}$$

Otro ejemplo. Supongamos que se tiene la siguiente serie:

$$y = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{5^k}{k!} x^k$$

Para que inicie en $n = 0$ bastará hacer el siguiente cambio: k se sustituye por $n + 2$

$$y = \sum_{n+2=2}^{\infty} \frac{5^{n+2}}{(n+2)!} x^{n+2}$$

y luego se regresa a k:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^{k+2}}{(k+2)!} x^{k+2}$$

Derivando series de potencias

Una serie de potencias define una función $y(x)$ dada por

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

cuyo dominio es el intervalo de convergencia de la serie, en el cual es continua, derivable e integrable, lo que permite escribir la primera derivada como

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

la segunda derivada como

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

y así sucesivamente.

Series de Taylor de variable real

Uno puede expresar cualquier función continua $f(x)$ como una serie: *la serie de Taylor*.

Definición. La expansión o desarrollo de Taylor de una función $f(x)$ alrededor del punto x_0 se expresa como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Si una función $f(x)$ posee una expansión en series de Taylor en el punto $x = x_0$ con un radio de convergencia diferente de cero, se dice que es analítica en $x = x_0$.

El caso particular de la Serie de Taylor en el que se toma $x_0 = 0$ recibe el nombre de *Serie (o Expansión) de Maclaurin*.

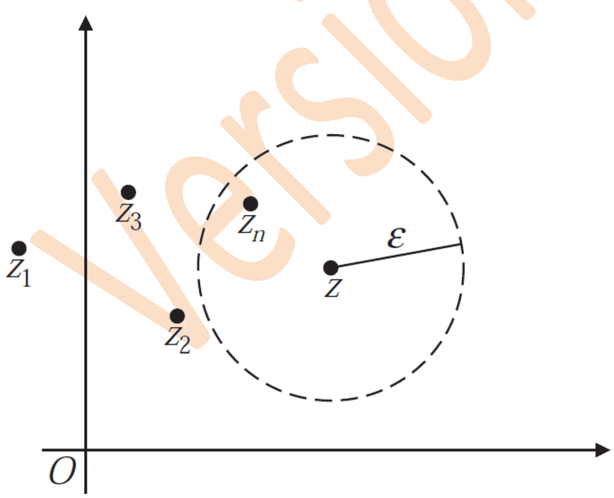
b).- Convergencia de secuencias y series.

A continuación hagamos una extensión de las ideas anteriores (y algunas nuevas) a funciones de variable compleja, $f(z)$. Para ello veamos algunas definiciones.

Definición. La sucesión infinita de números complejos $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ tiene un límite o converge a un número complejo z, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número entero positivo N tal que

$$|z_n - z| < \varepsilon$$

siempre que $n > N$.



Geométricamente, lo anterior significa que para valores suficientemente grandes de n, los puntos z_n se ubican en una vecindad ε alrededor de z.

Debido a que podemos escoger ε tan pequeño como queramos, se sigue que los puntos z_n se ubican arbitrariamente cercanos a z conforme su subíndice se incrementa; lo que permite escribir que

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z$$

Esto significa que cuando el límite de la sucesión $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ existe y es z, entonces se dice que $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a z. Si la sucesión no tiene límite entonces se dice que dicha sucesión diverge.

Teorema para la convergencia de una sucesión.

Sean $z_n = x_n + iy_n$ (para $n = 0, 1, 2, \ldots$), para x_n y y_n números reales, y $z = x + iy$ para x y y números reales. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z$$

si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

Ejemplo. Determine si la sucesión $z_n = \dfrac{1}{n} + i\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ converge y halle el límite si es el caso.

Ejercicio. Analice la convergencia de la sucesión

$$z_n = 2 - i\frac{(-1)^n}{n^2}$$

Si la sucesión es convergente, halle el límite de la sucesión.

Suma de una serie

Definición. Una serie infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + \cdots$$

de números complejos converge a un número complejo S, llamado **suma de la serie**, si la sucesión

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} z_n$$

($N = 0, 1, 2, \ldots$) de sumas parciales converge a S; entonces se escribe

$$\sum_{n=0}^{N} z_n = S$$

Cuando la serie no converge, decimos que dicha serie diverge.

Teorema para la convergencia de una serie.

Sean $z_n = x_n + iy_n$ (para $n = 0, 1, 2, \ldots$), para x_n y y_n números reales, y $S = X + iY$ para X y Y números reales. Entonces,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = S$$

si y sólo si

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = X \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} y_n = Y$$

De hecho, este teorema nos dice que podemos escribir

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x_n + iy_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + i\sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

Si una serie de números complejos converge, entonces el n-ésimo término ($z_n = x_n + iy_n$) converge a cero cuando n tiende a infinito, lo que obliga a que las partes real e imaginaria, lo hagan por separado, es decir

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i\lim_{n\to\infty} y_n = 0 + i0 = 0$$

De lo anterior se sigue que los términos de una serie convergente están acotados, es decir, cuando la serie converge existe una constante positiva M tal que $|z_n| \leq M$ para cualquier entero positivo n.

Otra propiedad importante de las series de números complejos es la que establece que una serie es **absolutamente convergente** si la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}|z_n| = \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{x_n^2 + y_n^2} \quad (z_n = x_n + iy_n)$$

de números reales $\sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ converge.

La convergencia absoluta de una serie de números complejos garantiza la convergencia de la serie.

La pregunta ahora es: ¿cómo sabemos si una serie converge absolutamente o no?

La respuesta es sencilla, al igual que para series reales, podemos usar el “criterio del cociente” (ratio test), que en este caso se reescribe de la siguiente forma.

Considerando la serie

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$$

podemos escribir el siguiente límite

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right|$$

Entonces

- Si $\Gamma(z) < 1$, la serie converge absolutamente;
- si $\Gamma(z) > 1$, la serie diverge; y
- si $\Gamma(z) = 1$ o no existe, el criterio del cociente no es concluyente en cuanto a la convergencia absoluta de la serie.

Ejemplos: Use el criterio del cociente para analizar la convergencia absoluta de las siguientes series:

a).- $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(z + \frac{1}{2} \right)^n$

b).- $\sum_{n=0}^{\infty} n! e^{n^2 z}$

c).- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2+i)^n}{(z+i)^n (n+i)^2}$

d).- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{z} \right)^n$

Remanente de una serie

Definición. Al establecer que la suma de una serie es un número dado S, a menudo es conveniente definir el remanente ρ_N después de N términos, usando la suma parcial S_N, de tal forma que

$$\rho_N = S - S_N$$

Con esto, vemos que $|S_N - S| = |\rho_N - 0|$, lo que nos permite establecer que una serie converge a un número S si y solo si la secuencia de remanentes ρ_N tiende a cero.

c).- Series de Taylor.

A continuación definimos una serie de potencias como una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \cdots + a_n (z - z_0)^n + \cdots$$

donde z_0 y los coeficientes a_n son constantes complejas y z puede ser cualquier punto de una región dada que contiene a z_0.

En estas series que involucran la variable z, denotaremos las sumas, sumas parciales y remanentes, definidas anteriormente, como $S(z)$, $S_N(z)$ y $\rho_N(z)$, respectivamente.

Teorema de convergencia de una serie de potencias

Sea la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

definimos $\alpha = \lim_{n \to \infty} \left(|a_n| \right)^{1/n}$, entonces,

- si $\alpha = \infty$, la serie es convergente en el único punto $z = z_0$;
- si $0 < \alpha < \infty$, la serie es absolutamente convergente en el círculo $|z - z_0| < (1/\alpha)$ y es divergente en el exterior de este círculo; y
- si $\alpha = 0$, la serie es absolutamente convergente en todo el plano complejo.

Lo anterior permite establecer que cuando $0 < \alpha < \infty$ existe un círculo con centro en el punto $z = z_0$, en el interior del cual la serie es absolutamente convergente y en el exterior del cual la serie es divergente.

Este círculo se llama **círculo de convergencia de la serie de potencias** y su radio R (= $1/\alpha$) recibe el nombre de radio de convergencia de la misma.

En los casos límites, cuando $\alpha = \infty$ el círculo de convergencia se reduce al punto $z = z_0$, mientras que cuando $\alpha = 0$ el círculo de convergencia se extiende a todo el plano, de modo que puede considerarse que R es igual a ∞.

El resultado anterior se conoce como ***teorema de Cauchy-Hadamard***, y fue publicado por primera vez en 1821 por Augustin Louis Cauchy, pero pasó relativamente desapercibido hasta que Jacques Hadamard lo redescubrió, al publicarlo por primera vez en 1888.

Un resultado muy útil al aplicar el teorema anterior es el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}$$

Ejemplo: Halle el círculo y radio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$.

Criterio del cociente para la convergencia de una serie de potencias

En muchos casos resulta conveniente determinar el radio de convergencia de una serie de potencias mediante el criterio de cociente, para ello se considera la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

y suponiendo que $a_n \neq 0$ para todo n, podemos escribir el siguiente cociente

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{a_n (z-z_0)^n} \right| = |z - z_0| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

de donde el círculo de convergencia resulta

$$|z - z_0| < R$$

con

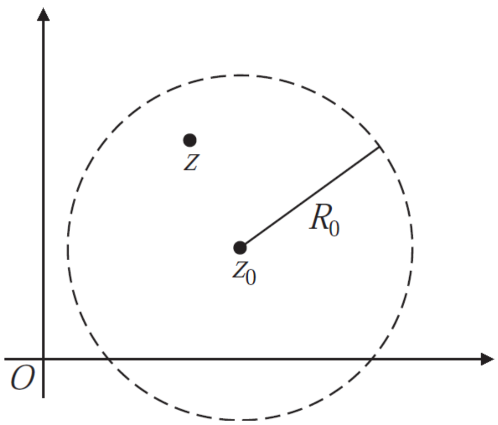
$$R = \frac{1}{\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}$$

Ejemplo: Usando el criterio del cociente, halle el círculo y el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$.

Dada una función analítica ¿es siempre posible encontrar una serie de potencias cuya suma sea dicha función en algún dominio? Dicho de otro modo ¿es posible representar cualquier función analítica por medio de una serie de potencias? La respuesta es afirmativa, como veremos en el siguiente teorema.

Teorema de Taylor

Sea $f(z)$ una función analítica en todo punto del disco C_0, con centro en z_0 y radio R_0. Entonces, en cada punto z del disco C_0, $f(z)$ se expresa como



$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \qquad (4.1)$$

es decir, la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

converge a $f(z)$ cuando $|z - z_0| < R_0$.

La serie (4.1) se denomina **desarrollo en serie de Taylor**, o simplemente, desarrollo de Taylor de $f(z)$ alrededor del punto z_0.

Serie de Maclaurin

Si $z_0 = 0$, el desarrollo de Taylor (4.1) adquiere la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

y se denomina **desarrollo de Maclaurin** de $f(z)$.

Ejemplo. Dada la función $f(z)=e^z$, halle

a).- el desarrollo de Maclaurin de $f(z)$
b).- el desarrollo de Taylor de $f(z)$ alrededor de $z = -i$.

Ejercicio. Encuentre la serie de Maclaurin para las funciones $f(z)$ dadas:

a).- $f(z) = \text{sen}\, z$
b).- $f(z) = \cos z$

El siguiente teorema nos garantiza que el desarrollo de Taylor alrededor de z_0 de una función $f(z)$, es la única serie de potencias que converge a $f(z)$ en un disco centrado en z_0.

Teorema de unicidad del desarrollo de Taylor

El desarrollo en serie de Taylor alrededor de z_0 de una función $f(z)$ es la única serie de potencias de $(z - z_0)$ que converge a $f(z)$ en todo punto de un disco centrado en z_0.

El siguiente teorema nos permite calcular el radio de convergencia del mayor círculo para el cual la serie de Taylor de una función $f(z)$ converge a $f(z)$.

Teorema de convergencia del desarrollo de Taylor para una función con singularidades

Consideremos el desarrollo en serie de Taylor de una función $f(z)$ alrededor de z_0 dado por la expresión (4.1). El mayor círculo dentro del cual esta serie converge a $f(z)$ en cada punto es $|z - z_0| = r$, donde r es la distancia entre z_0 y el punto singular de $f(z)$ más cercano.

Es importante notar que este teorema no afirma que la serie de Taylor no converja fuera del círculo $|z - z_0| = r$, sólo afirma que éste es el mayor círculo de todos los puntos para los cuales la serie converge a $f(z)$.

Ejemplo. Sin determinar el desarrollo de Taylor, calcule el radio del círculo máximo en donde el desarrollo indicado es válido:

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+1)^n$$

d).- Series de Laurent.

Si una función f no es analítica en z_0, no podemos aplicar el teorema de Taylor en ese punto. No obstante, muchas veces es posible hallar una representación de $f(z)$ en forma de una serie que contiene tanto potencias positivas como potencias negativas de $z - z_0$.

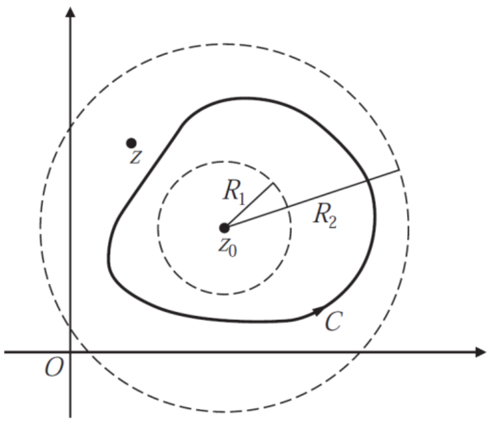
Definición. El desarrollo en serie de Laurent o, simplemente, **desarrollo de Laurent** de una función $f(z)$ alrededor del punto z_0 es de la forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{4.2}$$

donde la serie converge a $f(z)$ en cierto dominio o región.

La pregunta aquí es: ¿Qué clase de funciones pueden representarse por medio de series de Laurent y en qué región del plano complejo será válida dicha representación?

Normalmente los desarrollos de Laurent se obtienen a partir de los desarrollos de Taylor, para lograr lo anterior, es necesario enunciar el teorema de Laurent.



Teorema de Laurent

Sea $f(z)$ una función analítica en el anillo $R_1 < | z - z_0| < R_2$, centrado en z_0. Sea C cualquier contorno cerrado simple, orientado positivamente, que rodea a z_0 y está contenido por completo en ese dominio anular.

Entonces, en todo punto de ese dominio anular, $f(z)$ admite la representación

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \tag{4.3}$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4.4}$$

y

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{-n+1}} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4.5}$$

El desarrollo (4.3) se escribe, con frecuencia, de manera compacta como

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{4.6}$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{4.7}$$

Esta última representación es similar a la dada en (4.2); sin embargo, en cualquiera de las dos formas (4.3) o (4.6), el desarrollo en serie de potencias, así definido, se llama **serie de Laurent**.

Consideraciones acerca del Teorema de Laurent

- Si $f(z)$ es analítica en todos los puntos de la región $|z - z_0| \leq R_2$, entonces el desarrollo de Laurent de $f(z)$ se convierte en el desarrollo de Taylor de $f(z)$ alrededor de z_0, ya que el integrando de los coeficientes b_n, dados por (4.5), se hace cero; mientras que los coeficientes a_n, dados por (4.4), se reducen a la fórmula integral de Cauchy extendida, a saber

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

- Si $f(z)$ es analítica en la región $|z - z_0| \leq R_2$ excepto en el punto z_0, entonces el desarrollo de Laurent es válido en toda la región $|z - z_0| \leq R_2$.
- Si $f(z)$ es analítica en todo punto z del plano complejo que no pertenezca a cierto círculo, entonces es posible encontrar un desarrollo de Laurent de $f(z)$ que sea válido en una región anular cuyo radio exterior R_2 es infinito.

Es importante mencionar que, en general, los coeficientes de una serie de Laurent se calculan por métodos más económicos que las propias representaciones integrales, siendo el camino más usado, partir de los desarrollos de Taylor (o de Maclaurin).

Ejemplo. Encuentre la Serie de Laurent para

$$f(z) = e^{1/z}$$

alrededor del origen.

Solución. Para encontrar el desarrollo de Laurent de esta función $f(z)$, alrededor de $z_0 = 0$, vamos a considerar el desarrollo de Maclaurin de e^s, a saber

$$e^s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} s^n$$

después, se hace $s = 1/z$ en la ecuación anterior para obtener

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} \qquad z \neq 0$$

que es, efectivamente, el desarrollo de Laurent de $e^{1/z}$ alrededor de $z = 0$ y es válido en todo el plano complejo excepto en $z = 0$.

Hay funciones que por sí mismas ya corresponden a una Serie de Laurent. Por ejemplo, si analizamos la función

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2} \tag{4.8}$$

vemos que ya tiene la forma de una serie de Laurent, con $z_0 = i$.

En efecto, usando la representación (4.6)

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

al comparar con la forma de $f(z)$, vemos que $c_{-2} = 1$ y todos los demás coeficientes c_n son cero.

Si a continuación retomamos la expresión (4.7) para los coeficientes c_n de la serie de Laurent para la función $f(z)$ definida en la ecuación (4.8), podemos escribir

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{(z-i)^{n+3}} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

donde C es, por ejemplo, cualquier circunferencia $|z - i| = R$ orientada positivamente en torno al punto $z_0 = i$. Con lo anterior, podemos escribir

$$\int_C \frac{dz}{(z-i)^{n+3}} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -2 \\ 2\pi i & \text{si } n = -2 \end{cases}$$

Ejercicios.

1. Encuentre la serie de Laurent alrededor de la singularidad indicada para cada una de las siguientes funciones:
   a) $f(z) = \dfrac{1}{z-1} \quad ; \quad z = 0$
   b) $f(z) = \left(z + \dfrac{1}{z}\right)^7 \quad ; \quad z = 0$
   c) $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{(z-2)^3} \quad ; \quad z = 2$
   d) $f(z) = \dfrac{\cos {}^1\!/_z}{z^3} \quad ; \quad z = 0$
   e) $f(z) = \dfrac{z - \sin z}{z^3} \quad ; \quad z = 0$
   f) $f(z) = (z-3)\sin\dfrac{1}{z+4} \quad ; \quad z = -4$
   g) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z-2)^3} \quad ; \quad z = 2$
   h) $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z+2)} \quad ; \quad z = -2$

2. Expanda las siguientes funciones en una serie de Laurent para las potencias indicadas y encuentre el dominio de validez.
   a) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)} \quad ; \quad (z+3)$
   b) $f(z) = \dfrac{1}{(z+2)} \quad ; \quad (z-i)$
   c) $f(z) = \dfrac{z}{(z-i)} \quad ; \quad (z-1)$

   Para resolver estos problemas pueden resultar útiles las siguientes series de Maclaurin:

   $$\frac{1}{1 \pm w} = 1 \mp w + w^2 \mp w^3 + w^4 \mp w^5 + \cdots$$

   (Válidas para $|w| < 1$)

   $$\frac{1}{(1 \pm w)^2} = 1 \mp 2w + 3w^2 \mp 4w^3 + 5w^4 \mp 6w^5 + \cdots$$

e).- Propiedades adicionales de las series.

Para terminar nuestro estudio de las series de potencias para funciones complejas, vamos a revisar algunos teoremas y resultados que nos pueden ser útiles al trabajar con series de potencias, ya sean desarrollos de Taylor o de Laurent para una función $f(z)$.

i. Continuidad de una serie de potencias.

El siguiente teorema es una consecuencia importante de la convergencia uniforme de una serie de potencias.

Una serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n$$

representa una **función continua** $S(z)$ en el interior de su disco de convergencia, es decir, en todo z tal que $|z - z_0| < R$, donde R es el radio de convergencia.

Este teorema está en línea con el teorema (demostrado anteriormente) que establece que una función polinomial de z es analítica y continua en su dominio de definición.

ii. Integración y derivación de series de potencias.

Como se estableció en el teorema anterior, una serie de potencias de la forma

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(z - z_0\right)^n \tag{4.9}$$

representa (es decir, tiene como suma) una función continua en el interior de su disco de convergencia, incluso se puede demostrar que la suma $S(z)$ es analítica en dicho disco.

Lo anterior permite enunciar los siguientes dos teoremas.

Teorema de integración. Sean C un camino interior al disco de convergencia de la serie de potencias (4.9) y $g(z)$ una función continua en C. Entonces, la serie formada multiplicando cada término de la serie de potencias por $g(z)$ se puede integrar término a término sobre C, esto es,

$$\int_C g(z)S(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_C g(z)(z - z_0)^n\, dz \tag{4.10}$$

Teorema de diferenciación. La serie de potencias (4.9) se puede derivar término a término. En otras palabras, en todo punto z interior al disco de convergencia de la serie se tiene que la derivada $S'(z)$ está dada por

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1} \tag{4.11}$$

Los dos teoremas anteriores nos permiten afirmar que si una función $f(z)$ está representada con una serie de potencias en una región R, la serie que se obtiene por diferenciación término a término converge a $f\,'(z)$ dentro de R.

Este procedimiento puede repetirse un número indefinido de veces.

También es cierto que si se integra término a término la representación en serie de $f(z)$ a lo largo de una trayectoria contenida en R, la serie que resulta de esta operación converge a la integral de $f(z)$ efectuada a lo largo de la misma trayectoria.

iii. Multiplicación y división de series de potencias

Para revisar la multiplicación y división de series de potencias podemos, sin pérdida de generalidad, suponer que cada una de las series de potencias

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{y} \quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

converge dentro de cierta circunferencia $|z| = r_0$.

Las sumas $f(z)$ y $g(z)$ son entonces funciones analíticas en el disco $|z| < r_0$, y el producto de esas sumas tiene un desarrollo en serie de Maclaurin, que es válido en ese disco, dado por

$$f(z)g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{4.12}$$

donde

$$c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \tag{4.13}$$

La serie (4.12) es igual a la serie que se obtiene al multiplicar las dos series de $f(z)$ y $g(z)$ entre sí término a término y agrupando los términos que resulten con potencias iguales de z; a dicha serie se le llama **producto de Cauchy** de las dos series dadas.

Por otra parte, para analizar el cociente de dos series de potencias, supongamos que la serie $g(z) \neq 0$ en cierta vecindad del origen.

El cociente $h(z) = f(z)/g(z)$ es analítico en esa vecindad y por eso admite un desarrollo de Maclaurin dado por

$$h(z)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \tag{4.14}$$

donde $d_0 = h(0)$, $d_1 = h'(0)$, $d_2 = h''(0)/2!$, etc.

Algunos de estos primeros coeficientes se pueden encontrar en términos de los coeficientes a_n y b_n de las series de $f(z)$ y $g(z)$, al diferenciar sucesivamente el cociente $f(z)/g(z)$. Los resultados son los mismos que los que se encuentran al efectuar la división de la serie de $f(z)$ entre la serie de $g(z)$.

También podemos encontrar estos primeros términos mediante el siguiente procedimiento.

Se tiene que

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$$

de donde

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

de esta forma,

$$\begin{gathered} d_0 b_0 = a_0 \\ d_0 b_1 + d_1 b_0 = a_1 \\ d_0 b_2 + d_1 b_1 + d_2 b_0 = a_2 \\ \vdots \end{gathered}$$

De la primera ecuación de este sistema de ecuaciones, tenemos

$$d_0 = \frac{a_0}{b_0} \ ,$$

e introduciendo este resultado en la segunda ecuación obtenemos

$$d_1 = \frac{a_1}{b_0} - \frac{a_0 b_1}{b_0^2} \, .$$

Estos resultados nos permiten despejar d_2 de la tercera ecuación:

$$d_2 = \frac{a_2}{b_0} - \frac{a_1 b_1 + a_0 b_2}{b_0^2} + \frac{a_0 b_1^2}{b_0^3} \, .$$

El procedimiento anterior puede repetirse para obtener cualquiera de los coeficientes d_n, donde n es tan grande como deseemos.

Este es un ejemplo de procedimiento recurrente o iterativo, en el que se usan los valores de d_1, d_2, . . . , d_{n-1} ya calculados, para encontrar la siguiente incógnita d_n.