Métodos Matemáticos de la Física I
Quinta Tarea

(Fecha de revisión: Martes 03 de Noviembre)

Secciones 5a y 5b:

1.- En cada caso, escriba la parte principal de la función en su punto singular aislado y determine si se trata de un polo, un punto singular removible, o un punto singular esencial.

(a) $f(z) = ze^{\left(\frac{1}{z}\right)}$;

(b) $f(z) = \frac{z^2}{1+z}$;

(c) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$;

(d) $f(z) = \frac{\cos z}{z}$;

(e) $f(z) = \frac{1}{(2-z)^3}$.

2.- Muestre que el punto singular de cada una de las siguientes funciones es un polo. Determine el orden m del polo y calcule el correspondiente residuo B.

(a) $f(z) = \frac{1-\cosh z}{z^3}$;

(b) $f(z) = \frac{1-e^{2z}}{z^4}$;

(c) $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$.

RESPUESTA: (a) $m = 1$, $B = -1/2$; (b) $m = 3$, $B = -4/3$; (c) $m = 2$, $B = 2e^2$.

3.- Encuentre las singularidades aisladas de la función

$$f(z) = \pi \ \cot \pi z$$

y determine cuáles de ellas son singularidades removibles, polo o singularidades esenciales. Si la singularidad es removible, encuentre el valor límite de la función en dicha singularidad, si la singularidad es un polo, indique su orden y el valor del residuo correspondiente.

4.- Suponga que una función f es analítica en un punto z_0, y escriba $g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)}$. Muestre que

(a) si $f(z_0) \neq 0$, entonces z_0 es un polo simple de g, con residuo $f(z_0)$;

(b) si $f(z_0) = 0$, entonces z_0 es un punto singular removible de g.

Sugerencia: Como se estableció anteriormente, debido a que f es analítica en z_0, existe una serie de Taylor para $f(z)$ alrededor de z_0. Empiece cada inciso escribiendo unos pocos términos de dicha serie.

Secciones 5c y 5d:

5.- Encuentre el residuo en $z_0 = 0$ de la función

(a) $f(z) = \frac{1}{z+z^2}$;

(b) $f(z) = z\cos\left(\frac{1}{z}\right)$;

(c) $f(z) = \frac{z-\sin z}{z}$;

(d) $f(z) = \frac{\cot z}{z^4}$;

(e) $f(z) = \frac{\sinh z}{z^4(1-z^2)}$.

RESPUESTA: (a) 1; (b) $-1/2$; (c) 0; (d) $-1/45$; (e) $7/6$.

6.- Sea C la circunferencia $|z| = 1$, recorrida en dirección contrarreloj. Siga los pasos indicados para demostrar que

$$\int_C e^{\left(z+\frac{1}{z}\right)} dz = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,(n+1)!}$$

(a) Usando el desarrollo en serie de Maclaurin para e^z y la propiedad que justifica la integración término a término para una serie, escriba la integral anterior como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_C z^n e^{\left(\frac{1}{z}\right)} dz$$

(b) Aplique el teorema de los residuos para evaluar las integrales que aparecen en la parte (a) para llegar al resultado deseado.

7.- Encuentre los residuos en cada una de las singularidades aisladas que presenta la función

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2(z-\pi)^3}$$

Sección 5e:

8.- En cada caso, demuestre que los puntos singulares son polos. Determine el orden m de cada polo, y encuentre el residuo correspondiente B.

(a) $f(z) = \frac{z^2+2}{z-1}$;

(b) $f(z) = \left(\frac{z}{2z+1}\right)^3$;

(c) $f(z) = \frac{e^z}{z^2+\pi^2}$.

RESPUESTA: (a) $m = 1, B = 3$; (b) $m = 3, B = -3/16$; (c) $m = 1, B = \pm i/2\pi$.

9.- Halle el valor de la integral

$$\int_C \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}dz$$

en sentido contrarreloj a lo largo de la cirunferencia (a) $|z-2|=2$; (b) $|z|=4$.

RESPUESTA: (a) πi ; (b) $6\pi i$.

10.- Halle el valor de la integral

$$\int_C \frac{dz}{z^3(z+4)}$$

en sentido contrarreloj a lo largo de la circunferencia (a) $|z|=2$; (b) $|z+2|=3$.

11.- Evalúe la integral

$$\int_C \frac{\cosh \pi z \, dz}{z(z^2+1)}$$

considerando que C es la circunferencia $|z|=2$ recorrida en sentido positivo.

RESPUESTA: $4\pi i$.

12.- Use el teorema (5.8) de la Sección 5e, para evaluar la integral de $f(z)$ a lo largo de la circunferencia $|z|=3$ orientada positivamente, cuando

(a) $f(z)=\frac{(3z+2)^2}{z(z-1)(2z+5)}$;

(b) $f(z)=\frac{z^3(1-3z)}{(1+z)(1+2z^4)}$;

(c) $f(z)=\frac{z^3 e^{1/z}}{1+z^3}$.

RESPUESTA: (a) $9\pi i$; (b) $-3\pi i$; (c) $2\pi i$.

13.- Evalúe la integral

$$\int_C \frac{2z^2+5}{(z+2)^3(z^2+4)z^2}dz$$

donde C es (a) la circunferencia $|z-2i|=6$, y (b) el cuadrado con vértices en $1+i$, $2+i$, $2+2i$ y $1+2i$. En ambos casos considere que los contornos se recorren en sentido contrarreloj.

Sección 5f:

14.- Encuentre los ceros y polos de

$$f(z)=\frac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z}$$

y determine los residuos en cada uno de los polos.

RESPUESTA: Ceros: $z = \pm 2i$. Polos y residuos: En $z = 0$ es 2; en $z = -1 + i$ es $-\frac{1}{2}(1 - 3i)$; en $z = -1 - i$ es $-\frac{1}{2}(1 + 3i)$.

15.- Considerando que C denota la circunferencia $|z| = 2$ orientada positivamente, evalúe la integral

(a) $\int_C \tan z \, dz$;

(b) $\int_C \frac{dz}{\sinh 2z}$.

RESPUESTA: (a) $-4\pi i$; (b) $-\pi i$.

16.- Usando los primeros términos del desarrollo de $\csc z$ (válido para para $0 < |z| < \pi$)

$$\csc z = \frac{1}{z} + \frac{1}{3!} z + \left[\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}\right] z^3 + \cdots$$

y considerando el contorno C_N como la frontera del cuadrado cuyas caras están formadas por las líneas

$$x = \pm\left(N + \tfrac{1}{2}\right)\pi \quad \text{y} \quad y = \pm\left(N + \tfrac{1}{2}\right)\pi$$

donde N es un entero positivo, muestre que

$$\int_{C_N} \frac{dz}{z^2 \sin z} = 2\pi i \left[\frac{1}{6} + 2 \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^2 \pi^2}\right]$$

Sección 5g:

17.- Use residuos para evaluar las integrales impropias de los ejercicios siguientes.

(a) $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

(b) $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2}$.

(c) $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2}$, con $a > 0$

RESPUESTA. (a) $\pi/6$; (b) $\pi/200$; (c) $\pi/4a$.

18.- Use residuos para encontrar los valores principales de Cauchy de las integrales en los ejercicios siguientes.

(a) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

(b) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x dx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}$.

RESPUESTA. (b) $-\pi/5$.

19.- Use residuos para evaluar las integrales impropias en los siguientes ejercicios.

(a) $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+1} dx$ con $a > 0$.

(b) $\int_0^\infty \frac{x \sin 2x}{x^2+3} dx$.

RESPUESTA. (a) $\frac{\pi}{2} e^{-a}$; (b) $\frac{\pi}{2} e^{-2\sqrt{3}}$.

20.- Pruebe que

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

21.- Pruebe que si $m > 0$, se cumple que

$$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi e^{-m}(1+m)}{4}$$

22.- Verifique que para $m > 0$, se encuentra que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{imx}}{(x-1)(x-2)} dx = i\pi\left(e^{i2m} - e^{im}\right)$$

23.- (a) Encuentre el residuo de $\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^5}$ en $z = i$. (b) Usando el resultado anterior, evalúe la integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+1)^5} dx$$

24.- Calcule

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^3-1)(x+2)}$$

RESPUESTA. $-\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$