Métodos Matemáticos de la Física I
Cuarta Tarea
(Fecha de revisión: Lunes 05 de Octubre)

Sección 4a:

1.- Determine, en caso de existir, el intervalo de convergencia para las siguientes series, determinando el valor central (a) y el radio de convergencia (ρ):

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{10^n} (x-4)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n6^n} (2x-1)^n$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^{2n-1}} (x-1)^{2n}$

e) $\sum_{k=0}^{\infty} k!\,(x+5)^k$

2.- Encuentre la Serie de Maclaurin para las siguientes funciones reales $f(x)$:

a) $f(x) = x^2 e^x$

b) $f(x) = xe^{-2x}$

c) $f(x) = x \sin 3x$

d) $f(x) = e^{-x} \cos x$

3.- Encuentre la Serie de Taylor, centrada en el valor a dado, para las siguientes funciones reales $f(x)$:

a) $f(x) = \sin x$; con $a = \pi/4$.

b) $f(x) = \cos x$; con $a = \pi/3$.

c) $f(x) = e^x$; con $a = 2$.

d) $f(x) = 1/x$; con $a = 3$.

4.- Considerando los ejercicios 2a)-2d) y 3a)-3d) anteriores.

a) Escriba los primeros 4 términos de las series encontradas y llámele $f_{aprox}(x)$, en cada caso;

b) Evalúe $f_{aprox}(x)$ en $x = c$ para tener $f_{aprox}(c)$. Considere $c = 0.1$ para los ejercicios 2, y $c = 1.1a$ para los ejercicios 3.

c) Encuentre el error relativo que se tiene al considerar la serie parcial $f_{aprox}(x)$ al evaluarla cerca del valor central, para ello calcule el cociente $f_{aprox}(c)/f(c)$.

El error relativo nos da una idea de qué tan buena es una aproximación o, en el caso del trabajo en un laboratorio, de la calidad de una medición.

Sección 4b:

5.- Muestre que si

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{z_n} = \bar{S}.$$

6.- Encuentre la región de convergencia de las series complejas

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 3^n} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!}$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+2)^2} (z+4i)^k$

SOLUCIÓN. (a) $|z+i| \leq 1$, (b) $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| \leq 3$, (c) $|z| < \infty$.

Sección 4c:

7.- Usando la primera expresión dada en el problema 18 (más adelante), encuentre la expansión en Serie de Maclaurin para la función

$$f(z) = \frac{z}{z^4+9} = \frac{z}{9} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{z^4}{9}\right)}.$$

SOLUCIÓN. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+2}} z^{4n+1} \quad (|z| < \sqrt{3})$.

8.- Encuentre la serie de Maclaurin para la función $f(z) = \cos z$, dada por

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (|z| < \infty).$$

a) Usando la definición

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

y la serie de Maclaurin para e^z, dada por $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (|z| < \infty)$.

b) Mostrando que $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$ y $f^{(2n+1)}(0) = 0$ con $(n = 0,1,2,\ldots)$.

9.- Muestre que cuando $z \neq 0$,

a) $\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots$;

b) $\frac{\sin(z^2)}{z^4} = \frac{1}{z^2} - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^6}{5!} - \frac{z^{10}}{7!} + \cdots$.

10.- Suponga que cada una de las siguientes funciones se expande en una Serie de Taylor alrededor del punto indicado. ¿Cuál sería la región de convergencia de las series obtenidas? NOTA: No realice la expansión.

a) $\frac{\sin z}{z^2+4}$; $z_0 = 0$

b) $\frac{z}{e^z+1}$; $z_0 = 0$

c) $\frac{z+3}{(z-1)(z-4)}$; $z_0 = 2$

d) $e^{-z^2} \sinh(z+2)$; $z_0 = 0$

e) $\frac{e^z}{z(z-1)}$; $z_0 = 4i$

f) $z \coth 2z$; $z_0 = 0$

g) $\sec \pi z$; $z = 1$

SOLUCIÓN. (a) $|z| < 2$, (b) $|z| < \pi$, (c) $|z-2| < 1$, (d) $|z| < \infty$, (e) $|z - 4i| < 4$, (f) $|z| < \pi/2$, (g) $|z-1| < 1/2$

Sección 4d:

11.- Encuentre la serie de Laurent que represente a la función $f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right)$ en el dominio $0 < |z| < \infty$.

SOLUCIÓN. $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{z^{4n}}$.

12.- Construya la siguiente representación en Serie de Laurent

$$\frac{e^z}{(z+1)^2} = \frac{1}{e}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{(n+2)!} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2}\right] \quad (0 < |z+1| < \infty).$$

13.- Encuentre una representación en potencias negativas de z, que sea válida cuando $1 < |z| < \infty$, para la función $f(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1}{z}\right)}$.

SOLUCIÓN. $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{z^n}$.

14.- Dé dos expansiones en serie de Laurent para la función $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$ y especifica la región de validez de cada una de ellas.

SOLUCIÓN. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \quad (0 < |z| < 1)$; $f(z) = -\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{z^n} \quad (1 < |z| < \infty)$.

15.- Represente la función $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$

a) mediante su Serie de Maclaurin, y establece dónde es válida esta representación;
b) mediante su Serie de Laurent en el dominio $1 < |z| < \infty$.

SOLUCIÓN. (a) $f(z) = -1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1);$ (b) $f(z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \quad (1 < |z| < \infty).$

16.- Escriba dos Series de Laurent en potencias de z que representen a la función $f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)}$ y especifique en qué dominio son válidas.

SOLUCIÓN. (a) $f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} z^{2n+1} \quad (0 < |z| < 1)$; (b) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{z^{2n+1}} \quad (1 < |z| < \infty).$

17.- (a) Considerando que a denota a un número real, donde $-1 < a < 1$, obtenga la representación en Serie de Laurent $\frac{a}{z-a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} \quad (|a| < |z| < \infty).$

(b) Después de escribir $z = e^{i\theta}$ en la ecuación obtenida en el inciso anterior, iguale las partes real e imaginaria a ambos lados de la ecuación para derivar las siguientes fórmulas de sumas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos n\theta = \frac{a\cos\theta - a^2}{1 - 2a\cos\theta + a^2} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin n\theta = \frac{a\sin\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}$$

Sección 4e:

18.- Mediante la derivación de la representación en Serie de Maclaurin

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1),$$

obtenga las expansiones

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \quad (|z| < 1)$$

y

$$\frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) z^n \quad (|z| < 1).$$

19.- Generalizando el procedimiento del problema 18, demuestre que

$$\frac{1}{(1 \pm z)^k} = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} (\mp 1)^n \left(\prod_{m=1}^{k-1} (n+m) \right) z^n \quad (|z| < 1)$$

20.- Encuentre la Serie de Taylor para la función

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2 + (z - 2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(z-2)}{2}}$$

alrededor del punto $z_0 = 2$. Luego, mediante derivación de la serie término a término, muestre que

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left(\frac{z-2}{2}\right)^n \quad (|z - 2| < 2).$$