

Métodos Matemáticos de la Física I
Tercera Tarea
(Fecha de revisión: Lunes 21 de Septiembre)

Repaso:

1.- Muestre que

a) $e^{(2\pm 3\pi i)} = -e^2$

b) $e^{\left(\frac{2+\pi i}{4}\right)} = \sqrt{\frac{e}{2}}(1+i)$

c) $e^{(z+\pi i)} = -e^z$

2.- Muestre que $|e^{z^2}| \leq e^{|z|^2}$.

3.- Encuentre todos los valores de z tales que

a) $e^z = -2$

b) $e^z = 1 + i\sqrt{3}$

c) $e^{(2z-1)} = 1$

RESPUESTA. a) $z = \ln 2 + (2n+1)\pi i$; b) $z = \ln 2 + \left(2n + \frac{1}{3}\right)\pi i$; c) $z = \frac{1}{2} + n\pi i$.

4.- (a) Muestre que si e^z es real, entonces $\text{Im } z = n\pi$ (con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). (b) Si e^z es un imaginario puro, ¿qué restricción se requiere para z ?

Secciones 3a y 3b:

5.- Derive la expresión $\frac{d}{dz} z^n = nz^{n-1}$, cuando n es un entero positivo, usando

a) inducción matemática y la expresión para la derivada del producto de dos funciones; y

b) la definición de derivada y la fórmula binomial.

6.- Usando diferentes trayectorias para evaluar el límite cuando $\Delta z \rightarrow (0,0)$, muestre que $f'(z)$ no existe en ningún punto z cuando

a) $f(z) = \bar{z}$

b) $f(z) = \text{Re } z$

c) $f(z) = \text{Im } z$

Sección 3c:

7.- Use el teorema de Cauchy-Riemann para mostrar que $f'(z)$ no existe en ningún punto si

a) $f(z) = \bar{z}$

b) $f(z) = f(x, y) = 2x + ixy^2$

c) $f(z) = f(x, y) = e^x e^{-iy}$

8.- Usando el Teorema de Cauchy-Riemann extendido, determine dónde existe $f'(z)$ y encuentre su valor cuando

a) $f(z) = \frac{1}{z}$

b) $f(z) = f(x, y) = x^2 + iy^2$

c) $f(z) = z \operatorname{Im} z$

RESPUESTA. a) $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$, para $z \neq 0$; b) $f'(x + iy) = 2x$; c) $f'(0) = 0$.

9.- Use las ecuaciones de Cauchy-Riemann para mostrar que las siguientes funciones son diferenciables en el dominio (de definición) indicado, y también encuentre $f'(z)$:

a) $f(z) = \frac{1}{z^4}$, para $z \neq 0$.

b) $f(z) = f(r, \theta) = \sqrt{r} e^{i\theta/2}$, para $r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi$.

RESPUESTA. b) $f'(z) = \frac{1}{2f(z)}$.

Sección 3d:

10.- Muestre que $u(x, y)$ es una función armónica en algún dominio y encuentre una armónica conjugada $v(x, y)$ cuando

a) $u(x, y) = 2x(1 - y)$

b) $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$

c) $u(x, y) = \sinh x \sin y$

d) $u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$

RESPUESTA. a) $v(x, y) = x^2 - y^2 + 2y$; b) $v(x, y) = 2y - 3x^2y + y^3$; c) $v(x, y) = -\cosh x \cos y$; d) $v(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

11.- Considere la función $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ analítica en un dominio D que excluye al origen. Use las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares y asumiendo la continuidad de las derivadas parciales, muestre que la función $u(r, \theta)$ satisface la ecuación diferencial parcial

$$r^2 u_{rr}(r, \theta) + r u_r(r, \theta) + u_{\theta\theta}(r, \theta) = 0$$

Que corresponde a la *forma polar de la Ecuación de Laplace*. Muestre que esto también es válido para la función $v(r, \theta)$.

12.- Determine cuáles de las siguientes funciones u son armónicas. Para cada función armónica, encuentre la función armónica conjugada v y exprese $u + iv$ como una función analítica de z .

a) $u(x, y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$

b) $u(x, y) = 2xy + 3xy^2 - 2y^3$

c) $u(x, y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y$

d) $u(x, y) = e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2)$

RESPUESTA. a) $v(x, y) = 4xy - x^3 + 3xy^2, f(z) = 2z^2 - iz^3 + C$; b) En este caso, $u(x, y)$ no es armónica; c) $v(x, y) = ye^x \cos y + xe^x \sin y, f(z) = ze^z + C$; d) $v(x, y) = -e^{2xy} \cos(x^2 - y^2), f(z) = -ie^{ix^2} + C$.

Sección 3e:

13.- Evalúe las siguientes integrales:

a) $\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - i\right)^2 dt$

b) $\int_0^{\pi/6} e^{i2t} dt$

c) $\int_0^\infty e^{-zt} dt$, con $\operatorname{Re} z > 0$.

RESPUESTA. a) $-\frac{1}{2} - i \ln 4$; b) $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}$; c) $\frac{1}{z}$.

14.- Muestre que si m y n son enteros, entonces

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-in\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & \text{cuando } m \neq n \\ 2\pi & \text{cuando } m = n \end{cases}$$

Sección 3f:

Para las funciones f y los contornos C dados, en los siguientes ejercicios use la representación paramétrica de C para evaluar la integral

$$\int_C f(z) dz$$

15.- $f(z) = (z + 2)/z$ y C es

a) el semicírculo $z = 2e^{i\theta}$, con $0 \leq \theta \leq \pi$;

b) el semicírculo $z = 2e^{i\theta}$, con $\pi \leq \theta \leq 2\pi$;

c) el círculo $z = 2e^{i\theta}$, con $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

RESPUESTA. a) $-4 + 2\pi i$; b) $4 + 2\pi i$; c) $4\pi i$.

16.- $f(z) = z - 1$ y C es el contorno que va de $z = 0$ a $z = 2$ formado por

- a) el semicírculo $z = 1 + e^{i\theta}$, con $\pi \leq \theta \leq 2\pi$;
- b) el segmento $0 \leq x \leq 2$ del eje real.

RESPUESTA. a) 0; b) 0.

17.- Evalúe $\int_C (z^2 + 3z)dz$ a lo largo de

- a) el arco $|z| = 2$ que va de $(2,0)$ a $(0,2)$;
- b) la línea recta que va de $(2,0)$ a $(0,2)$;
- c) las líneas rectas que van de $(2,0)$ a $(2,2)$ y luego de $(2,2)$ a $(0,2)$.

RESPUESTA. $-\frac{44}{3} - \frac{8}{3}i$, en todos los casos.

18.- Con la ayuda del resultado obtenido en el ejercicio 14, evalúe la integral

$$\int_C z^m z^{*n} dz$$

donde m y n son enteros y C es el círculo unitario $|z| = 1$, recorrida en sentido contrarrelój.

19.- Sea C el círculo $|z - z_0| = R$ recorrido en sentido contrarrelój. Use la representación paramétrica para C dada por $z = z_0 + Re^{i\theta}$, (con $-\pi \leq \theta \leq \pi$) para derivar las siguientes fórmulas de integración

- a) $\int_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$;
- b) $\int_C (z - z_0)^{n-1} dz = 0$, con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

20.- Encuentre la antiderivada para evaluar cada una de las siguientes integrales, donde la trayectoria es cualquier contorno entre los límites de integración indicados:

- a) $\int_i^{i/2} e^{\pi z} dz$
- b) $\int_0^{\pi+2i} \cos\left(\frac{z}{2}\right) dz$
- c) $\int_1^3 (z - 2)^3 dz$.

RESPUESTA. a) $\frac{1+i}{\pi}$; b) $e + \frac{1}{e}$; c) 0.

21.- Sea C la frontera orientada positivamente del cuadrado cuyos lados coinciden con las líneas $x = \pm 2$ y $y = \pm 2$. Evalúe cada una de las siguientes integrales:

- a) $\int_C \frac{e^{-z} dz}{z - (\pi i/2)}$;
- b) $\int_C \frac{\cos z}{z(z^2 + 8)} dz$;
- c) $\int_C \frac{z dz}{2z + 1}$;

d) $\int_C \frac{\cosh z}{z^4} dz;$

d) $\int_C \frac{\tan(z/2)}{(z-x_0)^2} dz$, con $-2 < x_0 < 2$.

RESPUESTA. a) 2π ; b) $\frac{\pi i}{4}$; c) $-\frac{\pi i}{2}$; d) 0; e) $i\pi \sec^2\left(\frac{x_0}{2}\right)$.

22.- Sea C el círculo $|z| = 3$, descrito en sentido positivo, Muestre que si

$$g(w) = \int_C \frac{2z^2 - z - 2}{z - w} dz$$

con $|w| \neq 3$, entonces $g(2) = 8\pi i$. ¿Cuál es el valor de $g(w)$ cuando $|w| > 3$?

23.- Sea C un contorno simple cerrado cualquiera, descrito en sentido positivo en el plano z . Considerando que

$$g(w) = \int_C \frac{z^3 + 2z}{(z - w)^3} dz$$

muestre que $g(w) = 6\pi i w$ cuando w está dentro de C y que $g(w) = 0$ cuando w está fuera de C .

24.- Muestre que si f es analítica dentro y sobre un contorno cerrado C , y z_0 no está dentro de C , entonces

$$\int_C \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

25.- Evalúe $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z^2 dz}{z^2 + 4}$ donde C es el cuadrado con vértices en $\pm 2, \pm 2 + 4i$ recorrido en dirección contrarrelój.

RESPUESTA. i