Métodos Matemáticos de la Física I
Segunda Tarea
(Fecha de entrega: Martes 09 de Febrero)

Sección 2a:

1.- Escribe la función $f(z) = z^3 + z + 1$ en la forma $f(z) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$.

RESPUESTA: $f(x,y) = (x^3 - 3xy^2 + x + 1) + i(3x^2y - y^3 + y)$.

2.- Suponga que $f(z) = f(x,y) = x^2 - y^2 - 2y + i(2x - 2xy)$, donde $z = x + iy$. Use las expresiones

$$x = \frac{z+z^*}{2} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{z-z^*}{2i}$$

para escribir $f(z)$ en términos de z, y simplifique el resultado.

RESPUESTA. $f(z) = {z^*}^2 + 2iz$.

3.- Represente cada una de las siguientes funciones en términos de z y $z^*(=\bar{z})$, es decir, escriba $f(z)$.

(a) $w = x^2 - y^2 + 2ixy$;

(b) $w = x(x^2 - 3y^2) - iy(3x^2 - y^2)$;

(c) $w = \frac{2(x^2+y^2)-(x+iy)}{4(x^2+y^2)-4x+1}$

RESPUESTA: (a) $f(z) = z^2$; (b) $f(z) = \bar{z}^3$; (c) $f(z) = \frac{z}{2z-1}$

4.- Escriba la función $f(z) = z + \frac{1}{z}$ con $(z \neq 0)$ en la forma $f(z) = f(r,\theta) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$.

RESPUESTA. $f(z) = f(r,\theta) = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta$.

5.- Separe cada una de las siguientes funciones $f(z)$ en sus componentes real e imaginaria, es decir, encuentre $u(x,y)$ y $v(x,y)$ tales que $f(z) = u + iv$.

(a) $f(z) = 2z^2 - 3iz$;

(b) $f(z) = z + 1/z$;

(c) $f(z) = \frac{1-z}{1+z}$;

(d) $f(z) = z^{1/2}$;

(e) $f(z) = z + \bar{z}^2 + 5i$.

(f) $f(z) = \frac{i+z}{i-z}$

Sección 2b:

6.- Bosqueje la región en la que se mapea el sector $r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi/6$ considerando las transformaciones (a) $w = z^2$; (b) $w = z^3$; (c) $w = z^4$.

7.- Muestre que las líneas $ay = x$ con $a \neq 0$ se mapea en las espirales $\rho = \exp a\varphi$ bajo la transformación $f(z) = \exp z$, donde $w = \rho \exp i\varphi$.

8.- Encuentre la imagen de la tira semiinfinita $x \geq 0$, $0 \leq y \leq \pi$ bajo la transformación $f(z) = \exp z$, e identifique los segmentos correspondientes de las fronteras.

9.- La transformación $f(z) = \frac{1}{z}$, mapea el interior del círculo unitario $|z| = 1$ en su exterior, y viceversa. Bajo esta transformación, ¿en qué se mapea la línea $\arg z = constante$?

Sección 2c:

10.- Considerando que a, b y c denotan constantes complejas, muestre que

(a) $\lim_{z \to z_0} (az + b) = az_0 + b$;

(b) $\lim_{z \to z_0} (z^2 + c) = z_0^2 + c$;

11.- Considerando que n es un entero positivo, y $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios tales que $Q(z_0) \neq 0$. Use los teoremas sobre límites que apliquen, haciendo mención explícita de ellos, para encontrar

(a) $\lim_{z \to z_0} \frac{1}{z^n}$, con $z_0 \neq 0$;

(b) $\lim_{z \to i} \frac{iz^3 - 1}{z + i}$;

(c) $\lim_{z \to z_0} \frac{P(z)}{Q(z)}$.

RESPUESTA. (a) $\frac{1}{z_0^n}$; (b) 0 ; (c) $\frac{P(z_0)}{Q(z_0)}$.

12.- Evalúe los siguientes límites usando los teoremas que apliquen. En cada caso, enuncie precisamente qué teorema (o teoremas) usó.

(a) $\lim_{z \to 2i} (iz^4 + 3z^2 - 10i)$

(b) $\lim_{z \to e^{\pi i/4}} \frac{z^2}{z^4 + z + 1}$

(c) $\lim_{z \to i/2} \frac{(2z-3)(4z+i)}{(iz-1)^2}$

(d) $\lim_{z \to i} \frac{z^2+1}{z^6+1}$

(e) $\lim_{z \to 1+i} \left(\frac{z-1-i}{z^2-2z+2}\right)^2$

13.- Demuestre que $\lim_{z \to 1+i} \frac{z^2 - z + 1 - i}{z^2 - 2z + 2} = 1 - \frac{1}{2}i$.

Sección 2d:

14.- Use los teoremas sobre límites al infinito para mostrar que

(a) $\lim_{z\to\infty} \frac{4z^2}{(z-1)^2} = 4;$

(b) $\lim_{z\to 1} \frac{1}{(z-1)^3} = \infty;$

(c) $\lim_{z\to\infty} \frac{z^2+1}{z-1} = \infty;$

(d) $\lim_{z\to\infty} \frac{3z^4+2z^2-z+1}{z^4+5} = 3.$

15.- Con la ayuda de los teoremas sobre límites al infinito, muestre que cuando

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

con $ad - bc \neq 0$, se cumple que

(a) $\lim_{z\to\infty} T(z) = \infty$, si $c = 0;$

(b) $\lim_{z\to\infty} T(z) = \frac{a}{c}$ y $\lim_{z\to -d/c} T(z) = \infty$, si $c \neq 0.$

16.- Demuestre que $\lim_{z\to\infty} \frac{z^3-3z+2}{z^4+z^2-3z+5} = 0.$