# Quinta serie de problemas de Mecánica II

**(Fecha de revisión: 08 de Noviembre)**

## Sección 5.1. Oscilaciones de un resorte. Ley de Hooke.

## Sección 5.2. Movimiento Armónico Simple.

1. La experiencia muestra que puede esperarse que, de un tercio a la mitad de los pasajeros en un avión, sufran mareos si el avión rebota arriba y abajo con una aceleración pico de $0.4g$, y una frecuencia de aproximadamente $0.3Hz$. Suponga que este movimiento arriba y abajo es armónico simple, ¿cuál es la amplitud del movimiento?

2. Un *monitor de grosor* es un instrumento de laboratorio que se utiliza para determinar el grosor de una película delgada que se deposita sobre la superficie de un cristal de cuarzo. El cristal puede tratarse como un sistema masa-resorte con $k = 6.0 \times 10^5 N/m$ y $m = 0.5g$. (a) ¿Cuál es la frecuencia de oscilación de este sistema? (b) Esta frecuencia cambia ligeramente conforme se agrega masa al cristal. Si la frecuencia disminuye $0.010\%$, ¿cuánta masa se depositó? (c) Si el área del cristal es de $2.0cm^2$ y la densidad de masa del material de la película es de $7.5g/cm^3$, ¿cuán gruesa es la película depositada?

## Sección 5.3. Solución de la ecuación del MAS.

## Sección 5.4. Energías cinética y potencial en el MAS.

3. Un oscilador armónico simple, de $0.60kg$ de masa, oscila con una frecuencia de $3.0Hz$ y una amplitud de $0.15m$. Suponga que, mientras la masa está instantáneamente en reposo en su punto de retorno, rápidamente se le une otra masa de $0.60kg$. ¿Cómo cambia esto la amplitud del movimiento, la frecuencia, la energía, la rapidez máxima y la aceleración máxima?

4. Un oscilador armónico tiene frecuencia angular $\omega$ y amplitud $A$. a) Calcule la magnitud del desplazamiento y de la velocidad cuando la energía potencial elástica es igual a la energía cinética. (Suponga que $U = 0$ en el equilibrio.) b) ¿Cuántas veces sucede eso en cada ciclo? ¿Cada cuándo sucede? c) En un instante en que el desplazamiento es igual a $A/2$, ¿qué fracción de la energía total del sistema es cinética y qué fracción es potencial?

5. Un juguete de $0.150kg$ realiza un MAS en el extremo de un resorte horizontal con una constante de fuerza $k = 3.00\,N/cm$. Cuando el objeto está a $1.2cm$ de su posición de equilibrio, tiene una rapidez de $30.0\,cm/s$. Calcule a) la energía total del objeto en cualquier punto de su movimiento; b) la amplitud del movimiento; c) la rapidez máxima alcanzada por el objeto durante su movimiento.

## Sección 5.5. Objeto colgado de un resorte vertical.

6. Un gato con masa de $4.00kg$ que gusta de las emociones fuertes está unido mediante un arnés a un resorte ideal de masa despreciable y oscila verticalmente en MAS. La amplitud es de $0.050m$ y, en el punto más alto del movimiento, el resorte tiene su longitud natural no estirada. Calcule la energía potencial elástica del resorte (suponga que es cero cuando el resorte no está estirado); la energía cinética del gato; la energía potencial

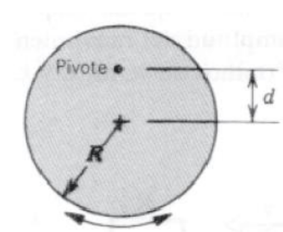
gravitacional del sistema relativa al punto más bajo del movimiento; y la suma de estas tres energías cuando el gato está a) en su punto más alto, b) en su punto más bajo, y c) en su posición de equilibrio.

7. Una esfera de $1.50kg$ y otra de $2.00kg$ se pegan entre sí colocando la más ligera debajo de la más pesada. La esfera superior se conecta a un resorte ideal vertical, cuya constante de fuerza es de $165N/m$, y el sistema vibra verticalmente con una amplitud de $15.0cm$. El pegamento que une las esferas es débil y antiguo, y de repente falla cuando las esferas están en la posición más baja de su movimiento. a) ¿Por qué es más probable que el pegamento falle en el punto más bajo, que en algún otro punto del movimiento? b) Calcule la amplitud y la frecuencia de las vibraciones después de que la esfera inferior se despega.

## Sección 5.6. Péndulos simple, físico y de torsión.

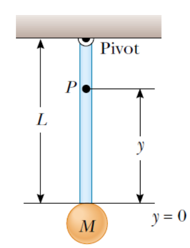
8. Un péndulo simple tiene una longitud de $5.00m$. (a) ¿Cuál es el periodo del movimiento armónico simple para este péndulo si se suspende en un elevador que se acelera hacia arriba a una razón de $5.00m/s^2$? (b) ¿Cuál es su periodo si el elevador se acelera hacia abajo a $5.00m/s^2$? (c) ¿Cuál es el período del movimiento armónico simple de este péndulo si se coloca en un camión que se está acelerando horizontalmente a $5.00m/s^2$?

9. Un péndulo físico se compone de un disco sólido uniforme de masa $M$ y de radio $R$, sostenido en un plano vertical por un pivote situado a una distancia d del centro del disco, como se muestra en la figura anexa. El disco se desplaza un pequeño ángulo y luego se suelta. (a) Halle la expresión para el periodo del movimiento armónico simple resultante. (b) Considerando $M = 563g$, $R = 14.4cm$ y $d = 10.2cm$, ¿cuál es la frecuencia de oscilaciones pequeñas del péndulo simple? (c) ¿Cuál es la longitud del péndulo simple equivalente?

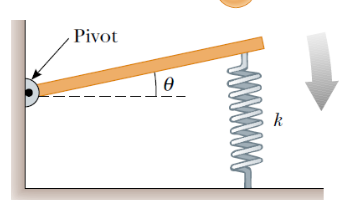



10. Un péndulo se forma haciendo girar una varilla larga y delgada de longitud $L$ y de masa $m$ alrededor de un punto de ella que está a una distancia $d$ sobre el centro. (a) Encuentre el periodo de amplitud pequeña de este péndulo en función de $d$, $L$, $m$ y $g$. (b) Demuestre que el periodo tiene un valor mínimo cuando $d = L/\sqrt{12}$.

11. Una masa compacta $M$ se localiza en el extremo de una varilla uniforme, de igual masa $M$ y longitud $L$, pivotada en su extremo superior, tal como se muestra en la figura. (a) Determine las fuerzas en el pivote y en el punto $P$ cuando el sistema está estacionario. (b) Calcule el periodo de oscilación para desplazamientos pequeños a partir del equilibrio, y determine este periodo para $L = 2.00m$. (Sugerencia: Considere que la masa en el extremo de la varilla es una masa puntual).

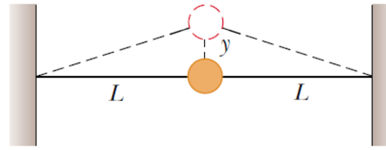



12. Un tablón horizontal de masa $m$ y longitud $L$ está articulado en un extremo, y en el otro está unido a un resorte de constante de fuerza $k$ (ver figura). El momento de inercia del tablón alrededor del pivote es $(1/3)ML^2$. (a) Cuando el tablón se desplaza un ángulo pequeño $\theta$ a partir de la posición de equilibrio horizontal y se suelta, demuestre que se desplaza con un movimiento armónico simple cuya frecuencia angular es $\omega = (3k/m)^{1/2}$. (b) Evalúe la frecuencia si la masa es de $5.00kg$ y el resorte tiene una constante de fuerza de $100N/m$.



## Sección 5.7. Movimiento general en las proximidades del equilibrio.

13. Una bola de masa $m$ está conectada a dos ligas de hule de longitud $L$, cada una bajo una tensión $T$, como se muestra en la figura. La bola se desplaza una pequeña distancia $y$ perpendicular a la longitud de las ligas. Suponiendo que la tensión no cambia, demuestre que (a) la fuerza restauradora es $-(2T/L)y$; y (b) que el sistema efectúa un movimiento armónico simple con una frecuencia angular $\omega = (2T/mL)^{1/2}$.




14. Un alambre se dobla en la forma de un ciclo de una curva coseno. Se sostiene en un plano vertical, de tal forma que la altura $y$ del alambre a cualquier distancia horizontal $x$ del centro está dada por

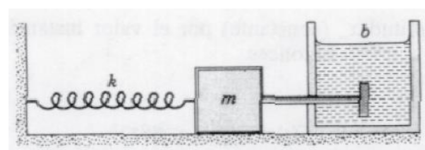
$$y = (20.0cm)\left(1 - \cos\left[\left(\frac{0.160rad}{m}\right)x\right]\right)$$

Una cuenta puede deslizarse sin fricción en el alambre estacionario. (a) Muestre que si su excursión alejándose de $x = 0$ nunca es muy grande, la cuenta se mueve con movimiento armónico simple. (b) Determine su frecuencia angular $\omega$.

## Sección 5.8. Oscilaciones amortiguadas.

## Sección 5.9. Oscilaciones forzadas y resonancia.

15. En el sistema mostrado en la figura anexa, el bloque tiene una masa de $1.52kg$ y la constante de fuerza del resorte es de $8.13N/m$. La fuerza de fricción está dada por $-b(dx/dt)$, donde $b = 227g/s$. Suponga que se empuja el bloque a un lado a una distancia de $12.5cm$ y que se suelta. (a) Calcule el intervalo de tiempo necesario para que la amplitud pierda una tercera parte de su valor inicial. (b) ¿Cuántas oscilaciones realiza el bloque en ese tiempo?




16. Un oscilador armónico amortiguado tiene un bloque ($m = 1.91kg$), un resorte ($k = 12.6N/m$) y una fuerza de amortiguamiento ($F = -bv$) con $b = 0.112\,kg/s$. Al inicio oscila con una amplitud de $26.2cm$. A causa del amortiguamiento, (a) ¿qué amplitud tiene el movimiento al cabo de cuatro ciclos completos? (b) ¿Cuánta energía "se perdió" durante ellos?

17. Muestre que la variación temporal de la energía mecánica de un oscilador amortiguado sin forzamiento está dado por $dE/dt = -bv^2$ y que esta siempre es negativa. [ Sugerencia: Derive la expresión para la energía mecánica de un oscilador, $E = \left(\frac{1}{2}\right)mv^2 + \left(\frac{1}{2}\right)kx^2$, y use la ecuación $m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = -kx - b\frac{dx}{dt}$ ].

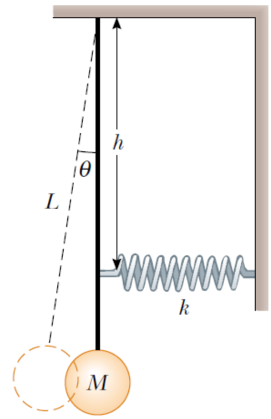
18. Un ratón de $0.300kg$, nada contento, se mueve en el extremo de un resorte con constante de fuerza $k = 2.50N/m$, sometido a la acción de una fuerza amortiguadora $F = -bv$ a) Si la constante $b = 0.900kg/s$, ¿qué frecuencia de oscilación tiene el ratón? b) ¿Con qué valor de $b$ el amortiguamiento será crítico?

## Problemas adicionales.

1. Un carro consiste en un cuerpo y cuatro ruedas sobre un eje sin fricción. El cuerpo tiene una masa $m$. Las ruedas son discos uniformes de masa $M$ y radio $R$. El carro rueda, sin deslizarse, de ida y vuelta, sobre un plano horizontal bajo la influencia de un resorte unido a un extremo del carro. La constante del resorte es $k$. Si toma en cuenta el

momento de inercia de las ruedas, encuentre una ecuación para la frecuencia del movimiento de ida y vuelta del carro.

2. Un péndulo de longitud $L$ y masa $M$ tiene un resorte de constante de fuerza $k$ conectado a él a una distancia $h$ debajo de su punto de suspensión (ver figura). Encuentre la frecuencia de vibración del sistema para valores pequeños de la amplitud ($\theta$ pequeña). Suponga que la suspensión vertical de longitud $L$ es rígida y de masa despreciable.




3. Una partícula de masa $m$ desliza sin fricción en el interior de un tazón hemisférico de radio $R$. Demuestre que, si parte del reposo con un pequeño desplazamiento a partir de la posición de equilibrio, la partícula efectúa un movimiento armónico simple con una frecuencia angular $\omega$ igual a la de un péndulo simple de longitud $R$.

RESPUESTAS:

1.- $A = 1.1040m$.

2.- (a) $f = 5.51 \times 10^3 Hz$; (b) $m = 1.0 \times 10^{-4} g$; y (c) $t = 6.7 \times 10^{-6} cm$.

3.- La amplitud no cambia, la frecuencia cambia a $2.1213Hz$, la energía no cambia, la rapidez máxima cambia a $1.9993m/s$ y la aceleración máxima cambia a $26.6479m/s^2$.

4.- (a) $x = \pm A/\sqrt{2}$ y $v = \pm A\omega/\sqrt{2}$; (b) Ocurre 4 veces, separados $\Delta t = \pi/2\omega$; y (c) $\frac{K}{E} = \frac{3}{4}$ y $\frac{U}{E} = \frac{1}{4}$.

5.- (a) $E = 28.35mJ$; (b) $A = 1.3748cm$; y (c) $v_{max} = 61.4817\, cm/s$.

6.- (a) $U_{resorte} = 0$, $K_{gato} = 0$, $U_{gato} = 3.9227J$, $E_{total} = 3.9227J$; (b) $U_{resorte} = 3.9227J$, $K_{gato} = 0$, $U_{gato} = 0J$, $E_{total} = 3.9227J$; y (c) $U_{resorte} = 0.9807J$, $K_{gato} = 0.9807$, $U_{gato} = 1.9613J$, $E_{total} = 3.9227J$.

7.- (a) Explicación; y (b) $A = 23.9151cm$, $f = 1.4456Hz$.

8.- (a) $T = 3.6512s$; (b) $T = 6.4083s$; y (c) $T = 4.2346s$.

9.- (a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{R^2+2d^2}{2gd}}$; (b) $T = 0.9054s$; y (c) $l = \frac{R^2+2d^2}{2d}$.

10.- (a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{L^2+12d^2}{12gd}}$; y (b) Demostración.

11.- (a) $F_{Pivote} = 2Mg$, $F_P = Mg\left(1 + \frac{y}{L}\right)$; y (b) $T = \frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{2L}{g}}$, $T = 2.6752s$.

12.- (a) Demostración; y (b) $f = 1.2328Hz$.

13.- (a) Demostración; y (b) Demostración.

14.- (a) Demostración; y (b) $\omega = 0.2241\, rad/s$.

15.- (a) $t = 14.7127s$; y (b) El número de oscilaciones realizadas es 5.4126.

16.- (a) $A = 19.6394cm$; y (b) $\Delta E = -0.1895J$.

17.- Demostración.

18.- (a) $f' = 0.3925Hz$; y (b) $b = 1.7321\, kg/s$.