Cuarta serie de problemas de Mecánica II

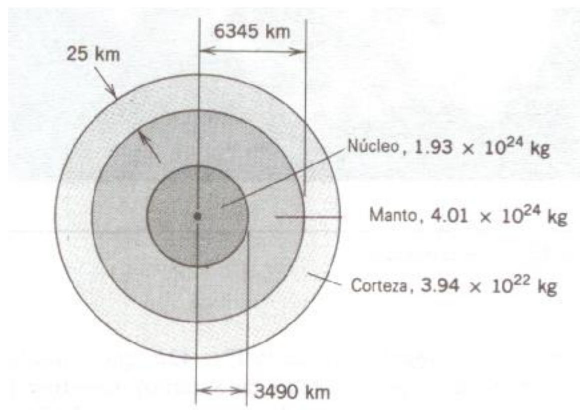
(Fecha de revisión: 04 de Octubre)

Sección 4.1. De los filósofos griegos a Kepler

Sección 4.2. Ley de la gravitación universal de Newton

1. La aceleración de caída libre en la superficie de la Luna es aproximadamente $1/6$ de la existente en la superficie terrestre. SI el radio de la Luna es aproximadamente $0.250R_{Tierra}$, encuentre la razón de sus densidades promedio, $\rho_{Luna}/\rho_{Tierra}$.

2. La figura anexa muestra una sección transversal (no a escala) del interior de la Tierra. En vez de ser totalmente uniforme, la tierra se divide en tres zonas: una corteza externa, un manto y un núcleo central. Las dimensiones de las zonas y la masa contenida dentro de ellas aparecen en la figura. La Tierra tiene una masa total de $5.98 \times 10^{24} kg$ y un radio de $6{,}370 km$. Ignore la rotación y suponga que la Tierra es esférica. (a) Calcule g en la superficie. (b) Suponga que se practica un hoyo de barreno hasta la superficie de contacto entre la corteza y el manto (el Moho); ¿cuál será el valor de g en el fondo del agujero? (c) Suponga que la Tierra es una esfera uniforme con la misma masa total y el mismo tamaño, ¿cuál sería el valor de g a una profundidad de $25km$? Las mediciones precisas de g son pruebas sensibles de la estructura interior de la Tierra, aunque los resultados pueden quedar oscurecidos con las variaciones locales de densidad y con la falta de conocimientos exactos sobre el valor de G.

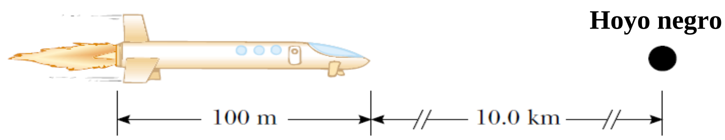


3. Una partícula de masa m se encuentra a una distancia y de una varilla delgada e infinitamente larga, con una densidad lineal de masa λ. Demuestre que la fuerza de gravitación entre la varilla y la partícula es $F = 2Gm\lambda/y$, dirigida perpendicularmente a la varilla. (Sugerencia: Supóngase que la perpendicular de la partícula a la varilla define el origen. Considere dos diferenciales de masa $dm = \lambda dx$ situados en $\pm x$ a lo largo de la varilla. Calcule la fuerza total dF (magnitud y dirección), ejercida por estos dos diferenciales de masa. Después integre sobre x de cero al infinito).

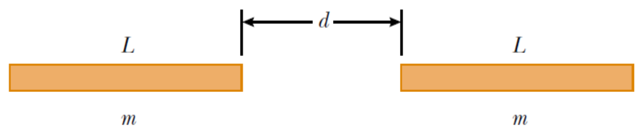
4. En algún lugar entre la Tierra y la Luna hay un punto donde la atracción gravitacional de la Tierra sobre una partícula de masa m equilibra exactamente la de la Luna. (a) ¿A qué distancia de la Tierra está este punto? (b) ¿Habrá algún punto en que la atracción gravitacional de la Luna es el doble que la ejercida por la tierra? En caso afirmativo, ¿dónde se ubica este punto?

5. Cada una de dos esferas adyacentes de $1.5kg$ cuelga del techo por un cordón. La distancia centro a centro entre las esferas es de $8.0cm$. ¿Qué (pequeño) ángulo θ forma cada cordón con la vertical?

6. Una nave espacial en forma de un largo cilindro tiene una longitud de $100m$ y su masa con pasajeros es de $1000kg$. Se extravió y se acercó demasiado a un hoyo negro de $1.0m$ de radio y masa igual a 100 veces la del sol ($M_{Sol} = 1.991 \times 10^{30}kg$). Si la nariz de la nave apunta hacia el centro del hoyo negro ubicado a $10.0km$ de distancia, tal como se muestra en la figura. (a) Determine la fuerza total sobre la nave espacial. (Considere a la nave: primero como cuerpo extendido y luego como partícula puntual, y comente sobre los resultados obtenidos). (b) ¿Cuál es la diferencia entre los campos gravitacionales que actúan sobre los ocupantes en la punta de la nave y sobre aquellos en la parte trasera de la misma, más alejados del hoyo negro?

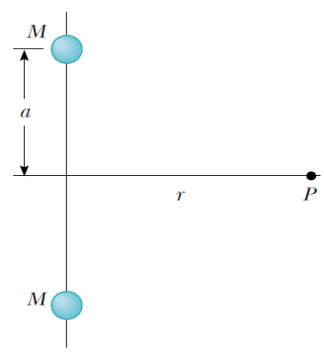


7. Considere dos varillas idénticas y uniformes, ambas de longitud L y masa m, colocadas en la misma línea y con sus puntos más cercanos separados una distancia d, tal como se muestra en la figura. Muestre que la fuerza gravitacional mutua entre las varillas tiene una magnitud dada por $F = \frac{Gm^2}{L^2}\ln\left(\frac{(L+d)^2}{d(2L+d)}\right)$. (Sugerencia: Considere dos diferenciales de masa dm_1 y dm_2, ubicados en las posiciones x_1 y x_2 medidas a partir de los extremos -más cercanos- de las varillas, respectivamente. A continuación, calcule el diferencial de fuerza dF que experimentan, y luego integre dF variando x_1 y después x_2).



8. Como astronauta, usted observa un pequeño planeta esférico. Después de aterrizar sobre el planeta, desciende, camina siempre en línea recta hacia delante, encontrándose de regreso en su nave espacial en el lado opuesto luego de completar una vuelta de $25.0km$. Usted sostiene un martillo y una pluma de halcón a una altura de $1.40m$, los suelta y observa que caen juntos a la superficie en $29.2s$. Determine la masa del planeta.

9. Calcule la magnitud y dirección del campo gravitacional en el punto P ubicado a una distancia r sobre el bisector perpendicular de dos masas iguales separadas por una distancia $2a$ como se muestra en la figura.



Sección 4.3. Medida de la constante G. El experimento de Cavendish.

Sección 4.4. Masa inercial y masa gravitatoria.

Sección 4.5. Energía potencial gravitatoria.

10. El 4 de julio de 2005, la nave especial de la NASA *Impacto Profundo* disparó un proyectil a la superficie del cometa Tempel 1, el cual tiene aproximadamente $9.0\ km$ de diámetro. Observaciones de los restos superficiales liberados por el impacto mostraron que polvo, con una rapidez tan baja como $1.0m/s$, podía escapar del cometa. (a) Suponiendo una forma esférica, ¿cuál es la masa de este cometa? (b) ¿Qué tan alejados del centro del cometa estarán los restos cuando hayan perdido (i) el 90% de la energía cinética inicial (la que tenía cuando estaba sobre la superficie)? y (ii) toda su energía cinética inicial?

11. Diez días después de lanzarse hacia Marte en diciembre de 1998, la nave *Mars Climate Orbiter* (con una masa de $629kg$) estaba a $2.87 \times 10^6 km$ de la Tierra, viajando con rapidez de $1.20 \times 10^4 km/h$ relativa a la Tierra. En ese instante, calcule (a) la energía cinética de la nave relativa a la Tierra y (b) la energía potencial del sistema Tierra-nave.

12. Se realiza un experimento en el espacio lejano con dos esferas uniformes, una con masa de $25.0kg$ y la otra con masa de $100.0kg$. El radio de las dos esferas es el mismo: $r = 0.20\ m$. Las esferas se sueltan del reposo con sus

centros separados $40.0m$, y aceleran una hacia la otra por su atracción gravitacional mutua (ignore todas las demás fuerzas gravitacionales). (a) Explique por qué se conserva el momento lineal. (b) Cuando sus centros están separados $20.0m$: (i) ¿qué rapidez tiene cada esfera? (ii) ¿Con qué magnitud de velocidad relativa se acerca una esfera a la otra?

Sección 4.6. Movimiento de planetas y satélites

13. El Sol se mueve en una órbita circular alrededor del centro de nuestra galaxia. El radio de esta órbita es 3.0×10^4 años $\cdot$ luz. Calcule el periodo de movimiento orbital y la rapidez orbital del Sol. La masa de nuestra galaxia es $4.0 \times 10^{41} kg$ y toda su masa puede considerarse como concentrada en el centro de la galaxia.
14. El 15 de julio de 2004, la NASA lanzó la nave espacial *Aura* para estudiar el clima y la atmósfera terrestres. Este satélite fue puesto en una órbita a $705km$ sobre la superficie terrestre, y supondremos una órbita circular. (a) ¿Cuántas horas le tomará a este satélite completar una órbita? (b) ¿Qué tan rápido (en km/h) se mueve la nave espacial *Aura*?
15. Deimos, una luna de Marte, tiene un diámetro aproximado de $12km$ y una masa de $2.0 \times 10^{15} kg$. Suponga que está varado solo en Deimos y quiere jugar béisbol. ¡Usted mismo sería el lanzador y el bateador! (a) ¿Con qué rapidez tendría que lanzar la pelota para que entre en órbita y vuelva a donde usted está listo para batearla? ¿Cree que podría lanzarla con esa rapidez? (b) ¿Cuánto tiempo (en horas) después del lanzamiento, la pelota debería estar lista para ser bateada? ¿Sería un juego de béisbol emocionante?

Problemas adicionales.

1. Use el modelo de la Tierra que aparece en la figura del problema 2 para examinar la variación de g con la profundidad en el interior de la Tierra. (a) Encuentre g en la interfaz manto-núcleo, ¿cómo varía g entre esta interfaz y el centro de la Tierra? (b) Demuestre que g tiene un mínimo local dentro del manto; determine la distancia con el centro de la Tierra donde esto ocurre y el valor asociado de g. (c) Haga un boceto que muestre la variación de g en el interior de la Tierra.
2. Suponga que un cometa está originalmente en reposo a una distancia r_1 del Sol. Bajo la influencia de la atracción gravitacional, el cometa cae radialmente hacia el Sol. Encuentre el tiempo que tarda en llegar a un radio r_2 (considere que $r_1 > r_2$).

RESPUESTAS:

1. $\frac{\rho_{Luna}}{\rho_{Tierra}} = \frac{2}{3}$.
2. (a) $g = 9.8359\, m/s^2$; (b) $g = 9.8472\, m/s^2$ y (c) $g = 9.7973\, m/s^2$.
3. Demostración.
4. (a) $r = 3.45648 \times 10^8 m$; (b) Sí, en $r = 3.56064 \times 10^8 m$, que corresponde a una distancia más cercana a la Luna.
5. $\theta = 1.59508 \times 10^{-9} rad = 0.0000000913913°$.

6. (a) $F_{extendido} = 1.31565 \times 10^{17} N$, $F_{puntual} = 1.31562 \times 10^{17} N$; como se ve la diferencia entre una y otra consideración no es apreciable sino hasta la sexta cifra significativa. (b) $\Delta g = 2.61828 \times 10^{12}\ N/kg$.
7. Demostración.
8. $M = 7.7897 \times 10^{14} kg$.
9. $F_x = -\frac{2GMr}{(r^2+a^2)^{3/2}}$; $F_y = 0$ (La fuerza es horizontal y apunta hacia el centro de las dos masas)
10. (a) $M = 3.37125 \times 10^{13} kg$; (b) $r_{90\%} = 45000m = 45km$, $r_{100\%} \rightarrow \infty$.
11. (a) $K = 3.4944 \times 10^{9} J$; (b) $U = -8.73244 \times 10^{7} J$.
12. (a) Explicación; (b) $v_{25kg} = 1.63390 \times 10^{-5}\ {}^{m}/_{s}$ y $v_{100kg} = 4.08475 \times 10^{-6}\ {}^{m}/_{s}$
13. $T = 5.8146 \times 10^{15} s = 1.8438 \times 10^{8} años$; $v = 3.0669 \times 10^{5}\ {}^{m}/_{s}$.
14. (a) $T = 5923.6128s = 1.64545 horas$; (b) $v = 7504.4635\ {}^{m}/_{s} = 27{,}016.0686\ {}^{km}/_{h}$.
15. (a) $v = 4.716665\ {}^{m}/_{s}$; este valor de la rapidez es factible para un lanzamiento de pelota; (b) $T = 7992.7456s$, que corresponde a un periodo de alrededor de 2 horas y 13 minutos, lo que haría que el juego fuese bastante aburrido y largo.