

Primera serie de problemas de Mecánica II

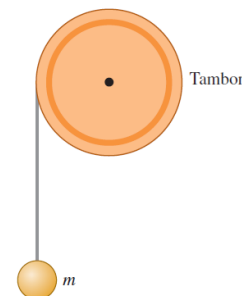
(Fecha de entrega: 27 de Agosto)

Sección 1.2. Movimiento rotacional uniformemente acelerado.

1. Una rueda que rota requiere 3.00s para completar 37.0 revoluciones. Su rapidez angular al final del intervalo de 3.00s es 98.0 rad/s ¿Cuál es la aceleración angular, supuesta constante, de la rueda? (b) ¿Qué velocidad tenía inicialmente?
2. La velocidad angular de un volante obedece la ecuación $\omega(t) = A + Bt^2$, donde t está en segundos y A y B son constantes cuyos valores numéricos son 2.75 y 1.50, respectivamente. a) ¿Cuáles son las unidades de A y B si ω está en rad/s ? b) ¿Cuál es la aceleración angular α del volante en i) $t = 0.00$ y ii) $t = 5.00\text{s}$? c) ¿Qué ángulo gira el volante durante los primeros 2.00s?
3. Una aspa de ventilador gira con velocidad angular dada por $\omega(t) = \gamma - \beta t^2$ donde $\gamma = 5.00 \text{ rad/s}$ y $\beta = 0.800 \text{ rad/s}^3$. a) Calcule la aceleración angular en función del tiempo. b) Calcule la aceleración angular instantánea α en $t = 3.00\text{s}$ y la aceleración angular media α_m para el intervalo de $t = 0.00\text{s}$ a $t = 3.00\text{s}$. ¿Qué diferencia hay entre ambas cantidades? Si son diferentes, ¿por qué lo son?
4. Un rodillo de una imprenta gira un ángulo dado por $\theta(t) = \gamma t^2 - \beta t^3$, donde $\gamma = 3.20 \text{ rad/s}^2$ y $\beta = 0.500 \text{ rad/s}^3$ a) Calcule la velocidad angular del rodillo en función del tiempo. b) Calcule la aceleración angular del rodillo en función del tiempo. c) ¿Cuál es la máxima velocidad angular positiva que alcanza, y en qué instante t ocurre esto?

Sección 1.3.1. Energía cinética rotacional.

5. Por cuestiones de estabilidad direccional, la bala disparada con un rifle adquiere una velocidad angular de giro en torno de su eje, mediante surcos espirales (rayado del ánima o "rifling") cortados en el cañón. La bala disparada por un rifle Lee-Enfield es (aproximadamente) un cilindro uniforme de 3.18cm de longitud, 0.790cm de diámetro y 13.9g de masa. La bala sale de la boquilla con una velocidad traslacional de 628m/s y una velocidad angular de giro de 2470 rev/s . (a) ¿Cuál es la energía cinética traslacional de la barra? (b) ¿Cuál es la energía cinética rotacional? (c) ¿Qué fracción de la energía cinética total es de carácter rotacional?
6. Un cilindro sólido uniforme inicialmente está en reposo en lo alto de una rampa de altura h . Si el cilindro rueda por esta rampa sin deslizarse, ¿cuál será su rapidez en el fondo? (Sugerencia: Use conservación de la energía. La energía cinética en el fondo de la rampa es la suma de su energía cinética traslacional y su energía cinética rotacional, además se cumple que $v = R\omega$).
7. Unos ingenieros están diseñando un sistema en el que una masa m , al caer, imparte energía cinética a un tambor uniforme giratorio, al cual está unida con un alambre delgado y muy ligero que está enrollado alrededor del borde del tambor (ver figura). No hay fricción considerable en el eje del tambor y todo el sistema parte del reposo. Este sistema se probó en la Tierra, pero debe utilizarse en Marte, donde la aceleración debida a la gravedad es de 3.71 m/s^2 . En las pruebas en la Tierra, cuando m es de 15.0kg y se le permite caer una distancia de 5.00m , imparte 250.0J de energía cinética al tambor. a) Si el sistema se opera en Marte, ¿qué distancia tendría que caer la masa



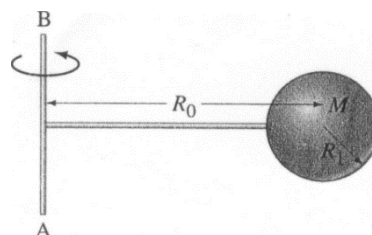
de 15.0kg para impartir la misma cantidad de energía cinética al tambor? b) ¿Con qué rapidez se moverá la masa de 15.0kg en Marte justo cuando el tambor gane 250.0J de energía cinética?

Sección 1.3.2. Cálculo del momento de inercia.

8. De acuerdo con mediciones espectroscópicas, el momento de inercia de una molécula de Oxígeno (O_2) en torno de un eje a través del centro de masa y perpendicular a la línea que une a los átomos es $1.95 \times 10^{-46}\text{kg} \cdot \text{m}^2$. La masa de un átomo de oxígeno es de $2.66 \times 10^{-26}\text{kg}$. ¿Cuál es la distancia entre los átomos? Trate a los átomos como partículas puntuales.
9. Con la finalidad de aumentar su momento de inercia en torno de un eje vertical, una patinadora que gira estira sus brazos horizontalmente; con la finalidad de reducir su momento de inercia, los baja verticalmente a lo largo de sus costados. Calcule el cambio de momento de inercia entre estas dos posiciones de los brazos. Suponga que cada brazo es una barra delgada uniforme de 0.60m de longitud y 2.8kg de masa unidos a los hombros a una distancia de 0.20m del eje de rotación.
10. Encuentre una ecuación para el momento de inercia de una placa delgada, cuadrada y uniforme (de masa m y área $A = l \times l$), que gira en torno de un eje que coincide con uno de sus bordes.
11. Considere una placa delgada (de masa m , largo l y ancho w) colocada en el plano xy de tal forma que el origen de coordenadas se ubica en su centro de masas (y que corresponde a su centro geométrico). Calcule el momento de inercia respecto a cada uno de los ejes x , y y z .
12. Para cualquier eje rotacional dado, el *radio de giro* K de un cuerpo rígido está definido por la expresión $K^2 = I/M$, donde M es la masa total del cuerpo e I es el momento de inercia. Por consiguiente, el radio de giro es igual a la distancia entre una masa puntual imaginaria M y el eje de rotación tal que I para la masa puntual en torno de ese eje sea el mismo que para el cuerpo rígido. Encuentre el radio de giro K de (a) un disco sólido de radio R , (b) una barra uniforme de longitud L , y (c) una esfera sólida de radio R , los tres girando alrededor de un eje que pasa por el centro de masa.

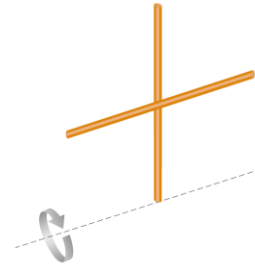
Sección 1.3.3. Teorema de los ejes paralelos.

13. Una bola de masa M y radio R_1 en el extremo de una barra delgada sin masa es girada en un círculo horizontal de radio R_0 respecto a un eje de rotación AB, como se muestra en la figura. (a) Considerando que la masa de la bola está concentrada en su centro de masa, calcule su momento de inercia respecto a AB. (b) Usando el teorema de los ejes paralelos y considerando el radio finito de la bola, calcule el momento de inercia de la bola respecto a AB. (c) Calcule el porcentaje de error introducido por la aproximación de la masa puntual para $R_1 = 2.5\text{cm}$ y $R_0 = 50\text{cm}$.



14. Tomando en cuenta los datos del problema anterior, resuélvalo considerando que, en vez de una bola, el sistema está formado por un disco uniforme.
15. Una rueda delgada de 5.0kg y radio de 25cm es cargada en un lado por un peso de 1.5kg , pequeño en tamaño, colocado a 20cm del centro de la rueda. Calcule (a) la posición del centro de masa de la rueda cargada y (b) el momento de inercia respecto a un eje a través de su centro de masa, perpendicular a su cara.

16. Dos barras delgadas idénticas de longitud L y masa m se sueldan perpendiculares entre sí, como se indica en la figura anexa. El arreglo se hace girar alrededor de un eje que pasa por el extremo de una barra y es paralelo a la otra. Determine el momento de inercia de esta configuración.



Problemas adicionales.

- Obtenga la fórmula para el momento de inercia de una esfera uniforme de radio r_0 y masa M respecto a un eje que pasa por su centro. [Sugerencia: Divida la esfera en discos infinitesimalmente delgados (cilindros) de espesor dy , exprese el momento de inercia para uno de estos cilindros e integre sobre todos los discos cilíndricos.]
- A un disco plano cilíndrico uniforme de radio R_0 y masa M se le hace un agujero circular de radio R_1 (tal que $R_1 < R_0$). El centro del agujero está a una distancia h (con $h > R_1$) del centro del disco. (a) Haga un dibujo del disco agujerado. (b) Encuentre el momento de inercia de este disco (con el agujero excéntrico) respecto a su centro C .
- Considere una varilla de longitud L y con una bisagra en un extremo. La densidad de masa de la varilla es variable de tal forma que $\lambda = \lambda_0(1 + \frac{x}{L})$, donde x se mide a partir de la bisagra. (a) Encuentre la masa M de la varilla, en términos de λ_0 y L , (b) ¿A qué distancia de la bisagra se ubica el centro de masas? (c) Calcule el momento de inercia respecto al centro de masas y respecto a la bisagra.
- Una polea circular de radio R está diseñada de tal forma que su densidad de masa depende de la distancia radial r , de tal forma que $\rho(r) = \rho_0 r/R$. Calcule (a) la masa M de la polea, (b) el momento de inercia I_{CM} respecto al centro geométrico de la polea, y (c) el momento de inercia respecto a un punto ubicado en la periferia.

RESPUESTAS:

- (a) $\alpha = 13.67159 \text{ rad/s}^2$; (b) $\omega_0 = 56.98524 \text{ rad/s}$.
- (a) $[A] = \text{rad/s}$, $[B] = \text{rad/s}^3$; (b) $\alpha = 0 \text{ m/s}^2$ y $\alpha = 15.0 \text{ m/s}^2$; (c) $\theta = 9.5 \text{ rad}$.
- (a) $\alpha(t) = (-1.600 \text{ rad/s}^3)t$; (b) $\alpha(3s) = -4.800 \text{ rad/s}^2$ y $\alpha_m = -2.400 \text{ rad/s}^2$.
¿Por qué son diferentes los valores obtenidos?
- (a) $\omega(t) = (6.40 \text{ rad/s}^2)t - (1.50 \text{ rad/s}^3)t^2$; (b) $\alpha(t) = (6.40 \text{ rad/s}^2) - (3.00 \text{ rad/s}^3)t$;
(c) $\omega_{max} = 6.82667 \text{ rad/s}$, en $t = 2.13333s$.
- (a) $K_T = 2740.9688J$; (b) $K_R = 13.05878J$; (c) $\frac{K_R}{K_R + K_T} = 4.7417027 \times 10^{-3} = 0.4742\%$.
- $v = \sqrt{\frac{4gh}{3}}$.
- (a) $h = 13.21651m$; (b) $v = 8.04569 \text{ m/s}$.
- $d = 1.21085 \times 10^{-10}m = 1.21085\text{\AA}$.

$$9. \Delta I = I_B - I_A = 1.568kg \cdot m^2 - 0.224kg \cdot m^2 = 1.344kg \cdot m^2.$$

$$10. I = \frac{1}{3}ml^2.$$

$$11. I_x = \frac{1}{12}mw^2, I_y = \frac{1}{12}ml^2, I_z = \frac{1}{12}m(l^2 + w^2).$$

$$12. (a) K_{disco} = \frac{R}{\sqrt{2}}; (b) K_{barra} = \frac{L}{\sqrt{12}}; (c) K_{esfera} = \sqrt{\frac{2}{5}}R$$

$$13. (a) I_{aprox} = MR_0^2; (b) I_{exacto} = \frac{2}{5}MR_1^2 + MR_0^2; (c) \frac{I_{aprox} - I_{exacto}}{I_{exacto}} \times 100\% = \frac{\frac{2}{5}R_1^2}{\frac{2}{5}R_1^2 + R_0^2} \times 100\% = -0.0999\%.$$

$$14. (a) I_{aprox} = MR_0^2; (b) I_{exacto} = \frac{1}{2}MR_1^2 + MR_0^2; (c) \frac{I_{aprox} - I_{exacto}}{I_{exacto}} \times 100\% = \frac{-\frac{1}{2}R_1^2}{\frac{1}{2}R_1^2 + R_0^2} \times 100\% = -0.12484\%.$$

$$15. (a) r_{CM} = 0.046154m; (b) I_{CM} = 0.20240kg \cdot m^2.$$

$$16. I = \frac{7}{12}ml^2.$$