Universidad de Sonora

Posgrado en Nanotecnología

Tercera serie de problemas - "Series de Fourier y Transformada de Fourier"

Fecha de envío: Lunes 09 de noviembre (6:00PM)

i. En los siguientes problemas, bosqueje la función, encuentre el periodo mínimo y construya el desarrollo en Series de Fourier que corresponda.

1. $f(t) = \begin{cases} 3 & -3 < t < 0 \\ t-3 & 0 < t < 3 \end{cases}$
2. $f(t) = |\sin t|$, para $-\pi < t < \pi$.
3. $f(t) = H(t)$, para $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. En este caso, $H(t)$ representa a la función unitaria de Heaviside (llamada en ocasiones, función escalón).
4. $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{x}{2} & 0 \leq x < \pi \\ -\sin\frac{x}{2} & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$
5. $f(t) = t + \frac{1}{2}t^2$, para $-\pi < t < \pi$.
6. $f(t) = \begin{cases} 0 & -1 < t < 0 \\ \sin \pi t & 0 < t < 1 \end{cases}$
7. $f(t) = \begin{cases} \pi^2 & -\pi < t < 0 \\ (t-\pi)^2 & 0 < t < \pi \end{cases}$
8. $f(x) = \begin{cases} -x + e^x & -2 < t < 0 \\ x + e^{-x} & 0 < t < 2 \end{cases}$

ii. En los siguientes problemas, bosqueje la función y construya el desarrollo en Series de Fourier considerando extensiones de medio rango, así como la extensión completa.

9. $f(t) = \begin{cases} -5 & 0 < t < 2 \\ 5 & 2 < t < 4 \end{cases}$
10. $f(x) = 4x$, para $0 < x < 5$.
11. $f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \\ \pi - \frac{t}{2} & \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$
12. $f(x) = 1 - x^2$, para $0 \leq x \leq 1$.

13. $V(t) = \begin{cases} 12 & 0 < t < 2 \\ 0 & 2 < t < 5 \end{cases}$

14. $g(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < \pi \\ 2\pi - x & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$

iii. (a) Encuentre la representación en series de Fourier de $f(t) = 0$ para $-\pi < t < 0$, y $f(t) = t$, para $0 < t < \pi$. (b) Usando la expansión de Fourier encontrada en el inciso anterior, muestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

iv. Encuentre y grafique la serie de Fourier para la función $f(t) = t^3$ en el intervalo $-2 < t < 2$. Para ello, considere una extensión periódica que busque eliminar el fenómeno de Gibbs en los extremos del intervalo.

v. En los siguientes problemas se deben construir las gráficas que correspondan a la función directa $f(t)$ y a la función en el espacio recíproco $F(\omega)$.

17. (a) Encuentre la transformada de Fourier de la función $f(t) = e^{-|t|}$; y (b) Usando el resultado anterior y el teorema integral de Fourier muestre que

$$\frac{\pi}{2} e^{-|t|} = \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega t}{1 + \omega^2} d\omega$$

18. Encuentre la transformada de Fourier de la función $g(t) = H(t-a)e^{-bt}$, donde $H(t)$ es la *función de Heaviside* (o función "escalón").

19. Encuentre la transformada de Fourier para la función

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{para} \quad |t| < \beta \\ 0 & \text{para} \quad |t| > \beta \end{cases}$$

20. Encuentre la transformada de Fourier para la función $f(t) = te^{-t^2}$.

21. Encuentre la transformada de Fourier para una *función triángulo* definida por

$$g(t) = \begin{cases} 2 - |t| & \text{para} \quad |t| < 2 \\ 0 & \text{para} \quad |t| > 2 \end{cases}$$