"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

Matemáticas

Posgrado en Nanotecnología

Dr. Roberto Pedro Duarte Zamorano

Temario

3. Transformada de Fourier
    1. Transformadas integrales.
    2. La Transformada de Fourier.
    3. Teorema integral de Fourier.

TRANSFORMADAS INTEGRALES

Una definición.

Una ***transformación integral*** se define como la operación matemática que asocia a cada función $f(t)$ en el espacio directo (o real), otra función $F(\tau)$ en el espacio recíproco mediante la siguiente identidad

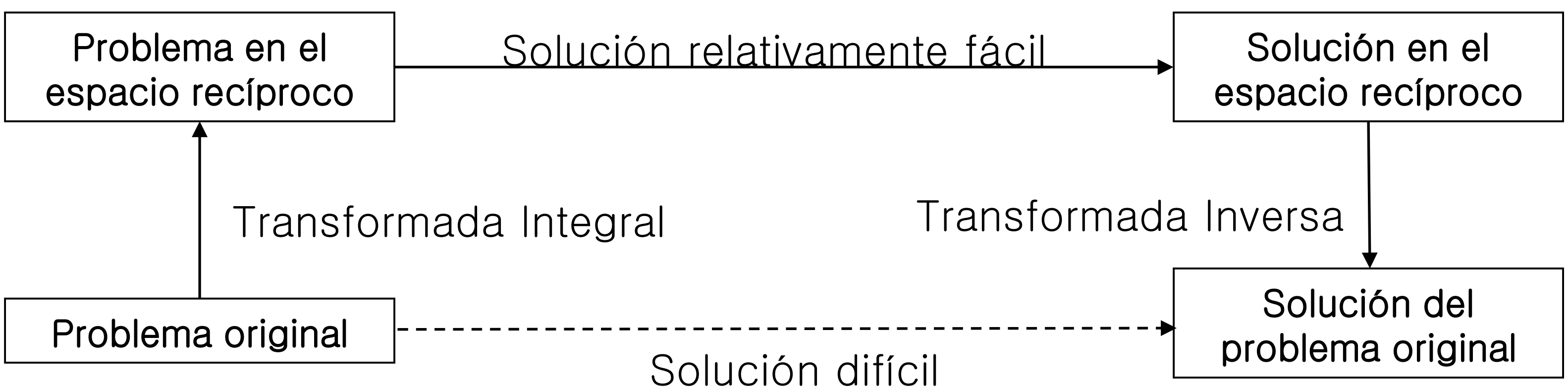
$$F(\tau) \equiv \int_a^b K(\tau, t) f(t) dt$$

donde $K(\tau,t)$ recibe el nombre de ***kernel*** de la transformación, y los límites a y b están dados por la transformada correspondiente.

Ejemplos de transformadas integrales son: la de Fourier, la de Laplace, la Z, la de Hilbert, etc., cada una con su correspondiente *kernel* y límites a y b.

Transformadas integrales

La importancia de las transformadas integrales reside en que un problema que es difícil de resolver en sus "coordenadas" originales (espacio real o directo), a menudo es más sencillo de resolver al transformarlo al espacio recíproco τ, después de ello, la transformada inversa nos devuelve la solución en el espacio original.



Transformadas integrales

Antes de entrar en materia enunciaremos un par de definiciones importantes.

Integrabilidad absoluta

Definición. Decimos que una función de una variable real $f(t)$ es absolutamente integrable cuando la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) \right| dt$$

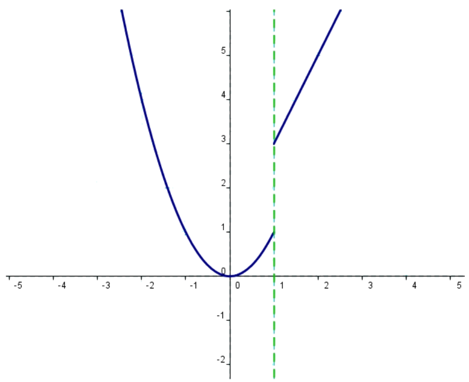
existe.

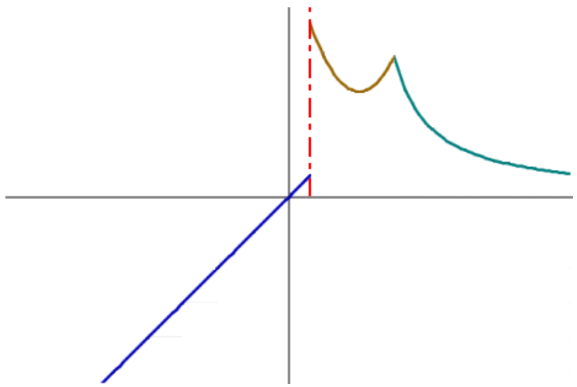
Continuidad a trozos

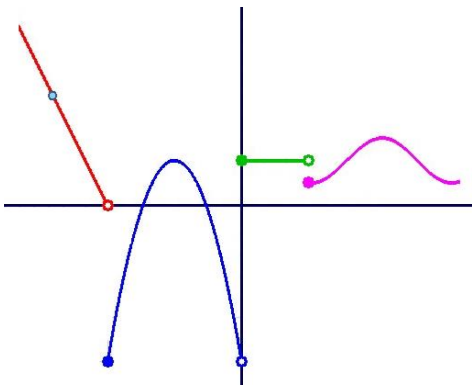
Definición. Decimos que la función $f(t)$ es continua a trozos sobre un intervalo del eje t si podemos dividir este intervalo en un número finito de subintervalos en que $f(t)$ sea continua. En cada subintervalo $f(t)$ tiene límites finitos cuando la variable tiende hacia los extremos desde el interior del subintervalo.

Transformadas integrales

Ejemplos de funciones continuas a trozos







En los ejemplos anteriores, las discontinuidades presentes corresponden a “saltos” finitos, lo que implica que en cada salto las funciones tienen límites finitos tanto a la izquierda como a la derecha de la discontinuidad.

La Transformada de Fourier

Definición. Sea $f(t)$ una función absolutamente integrable y continua a trozos en todo intervalo finito del eje t, se define la *transformada de Fourier de la función $f(t)$* como

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \tag{3.1}$$

para $-\infty < \omega < \infty$.

En general se usan minúsculas (en este caso f) para representar una función de t, y mayúsculas (en este caso F) para representar su transformada de Fourier.

Cabe señalar que se han presentado las condiciones suficientes (*integrabilidad absoluta* y *continuidad a trozos*) para la existencia de la transformada de Fourier, $F(\omega)$; sin embargo, existen funciones que sin cumplir la primera de ellas, sí tienen transformada de Fourier.

La Transformada de Fourier

Un ejemplo. Calcule la transformada de Fourier de la función $f(t)$ definida como

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Ae^{-\alpha t} & 0 \le t \end{cases}$$

Solución. Usando la definición de transformada de Fourier (ecuación 3.1) podemos escribir

$$F(\omega) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{i\omega t} dt$$

donde hemos considerado que la integral de -∞ a 0 se anula porque en ese intervalo $f(t) = 0$.

La última integral se puede escribir como

$$F(\omega) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-(\alpha - i\omega)t} dt$$

La Transformada de Fourier

Un ejemplo. Calcule la transformada de Fourier de la función $f(t)$ definida como

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Ae^{-\alpha t} & 0 \leq t \end{cases}$$

Solución. Lo anterior nos lleva a

$$F(\omega) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{e^{-(\alpha - i\omega)t}}{\alpha - i\omega} \right)_{t=0}^{t=\infty}$$

y valuando en los límites correspondiente, nos permite escribir la transformada de Fourier que buscamos

$$\boxed{F(\omega) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\alpha - i\omega} \right)}$$

Teorema integral de Fourier

Antes de enunciar el teorema integral de Fourier es importante mencionar que la transformada de Fourier está sujeta a las condiciones:

i. $f(t)$ es continua o continua por trozos; y

ii. $f(t)$ es absolutamente integrable.

Definición. Podemos partir de la definición de la transformada integral de Fourier (3.1) para establecer que es posible recuperar o encontrar $f(t)$ a partir de su transformada de Fourier $F(\omega)$ mediante la expresión

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \qquad (3.2)$$

donde la integral es un valor principal de Cauchy y recibe el nombre de *Transformada Inversa de Fourier*.

Teorema integral de Fourier

La transformada inversa de Fourier no proporciona correctamente el valor de $f(t)$ en los valores t_d en los que $f(t)$ no es continua. En dichos puntos, la ecuación (3.2) proporciona el valor medio de los límites de $f(t)$ por la derecha y por la izquierda del punto considerado t_d, es decir,

$$\tfrac{1}{2}\left[f(t_d+)+f(t_d-)\right]$$

Este resultado se conoce como teorema integral de Fourier.

En algunos textos llaman teorema integral de Fourier a la expresión

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau\right)e^{-i\omega t}d\omega \qquad (3.3)$$

la cual se obtiene al sustituir la transformada de Fourier $F(\omega)$ en la expresión para la transformada inversa de Fourier $f(t)$.

Teorema integral de Fourier

Es importante mencionar que la función $f(t)$ y su correspondiente función $F(\omega)$ forman una pareja de transformadas de Fourier, por lo que la ecuación (3.2) corresponde a la representación de $f(t)$ en términos de una integral de Fourier.

Lo anterior permite interpretar a la transformada inversa de Fourier como una representación de $f(t)$ en términos de una distribución de ondas sinusoidales infinitamente grandes de frecuencia angular ω, en el que esta frecuencia es una variable continua.

En muchas de las aplicaciones de física, la variable t representa el tiempo (en s) y ω la frecuencia angular (en rad/s), por lo que diremos que son cantidades recíprocas. En mecánica cuántica, se acostumbra cambiar ω por E, por lo que el par (E,t) son cantidades recíprocas; mientras que en óptica aparecerán como variables recíprocas la posición $\vec{r}$ y el número de onda $\vec{k}$.

La distribución Gaussiana y su transformada de Fourier

Una función importante que aparece en muchas áreas de la Física, ya sea directamente o como una aproximación a una situación física, es la distribución Gaussiana o normal.

A continuación se presentan algunos ejemplos:

- Una función gaussiana es la función de onda del estado fundamental del oscilador armónico cuántico.
- Los orbitales moleculares usados en química computacional son combinaciones lineales de funciones gaussianas llamados orbitales gaussianos.
- Matemáticamente, la función gaussiana juega un papel importante en la definición de los polinomios de Hermite. Consecuentemente, están también asociadas con el estado de vacío en la teoría cuántica de campos.
- Los rayos gaussianos se usan en sistemas ópticos y de microondas.
- Las funciones gaussianas se utilizan como filtro de suavizado en el procesamiento digital de imágenes.

La distribución Gaussiana y su transformada de Fourier

Otro ejemplo. Por lo mencionado anteriormente, vamos a calcular la transformada de Fourier de la distribución Gaussiana normalizada, definida por

$$f(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)}$$

Esta distribución Gaussiana está centrada en $t=0$ y tiene una desviación raíz media cuadrática $\Delta t_{rms}=\sigma$.

Solución. Partiendo de la definición de transformada de Fourier podemos escribir

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)}e^{i\omega t}dt$$

es decir

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(t^2-2\sigma^2 i\omega t\right)\right)}dt$$

La distribución Gaussiana y su transformada de Fourier

El argumento de la exponencial se puede escribir como

$$
\begin{aligned}
\left(t^2 - 2\sigma^2 i\omega t\right) &= \left(t^2 - 2\sigma^2 i\omega t\right) + \left(-\sigma^2 i\omega\right)^2 - \left(-\sigma^2 i\omega\right)^2 \\
&= \left(t^2 - 2\sigma^2 i\omega t + \left(\sigma^2 i\omega\right)^2\right) - \left(\sigma^2 i\omega\right)^2 \\
&= \left(t - i\sigma^2\omega\right)^2 - \left(i\sigma^2\omega\right)^2
\end{aligned}
$$

Lo que permite reescribir a la transformada de Fourier $F(\omega)$ como

$$
F(\omega) = \frac{e^{\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2\right)}}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{\left(t - i\sigma^2\omega\right)^2}{2\sigma^2}\right)} dt \right\}
$$

La distribución Gaussiana y su transformada de Fourier

El término entre corchetes se puede escribir como

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{\left(t-i\sigma^2\omega\right)^2}{2\sigma^2}\right)}dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\left(\frac{t-i\sigma^2\omega}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right)}dt$$

que haciendo el cambio de variable

$$x = \frac{t-i\sigma^2\omega}{\sqrt{2}\sigma} \quad dt = \sqrt{2}\sigma dx$$

Nos permite reescribir la integral como

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{\left(t-i\sigma^2\omega\right)^2}{2\sigma^2}\right)}dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-x^2\right)}\sqrt{2}\sigma dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = 1$$

La distribución Gaussiana y su transformada de Fourier

Por lo que finalmente podemos escribir

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2\right)}$$

Que corresponde a otra gaussiana, centrada en $\omega = 0$ y con una desviación $\Delta\omega_{rms} = 1/\sigma$.

En términos físicos, el hacer más angosto el tiempo implica un ensanchamiento (o aumento) en el espectro de frecuencias.

Enunciados similares son válidos para otras parejas de variables recíprocas de Fourier, como las mencionadas anteriormente.

Algunas propiedades de la transformada de Fourier

Algunas propiedades básicas de la transformada de Fourier, y que se desprenden de su definición, son las siguientes:

- La transformada de Fourier es una aplicación lineal, es decir, la trasformada de una suma de funciones es la suma de las transformadas.

$$F\left\{af(t)+bg(t)\right\}(\omega)=aF\left\{f(t)\right\}(\omega)+bF\left\{g(t)\right\}(\omega)$$

- Si la función es absolutamente integrable se cumplen las siguientes relaciones:
  - Cambio de escala

$$F\left\{f(at)\right\}(\omega)=\frac{1}{|a|}F\left\{f(t)\right\}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Algunas propiedades de la transformada de Fourier

- Traslación

$$F\{f(t-a)\}(\omega)=e^{-i\omega a}F\{f(t)\}(\omega)$$

- Traslación en la variable transformada

$$F\{f(t)\}(\omega-a)=F\{e^{iat}f(t)\}(\omega)$$

- Transformada de la derivada: Si f y su derivada son integrables, entonces satisface que

$$F\{f'(t)\}(\omega)=i\omega F\{f(t)\}(\omega)$$

- Derivada de la transformada:

$$F\{f(t)\}'(\omega)=F\{-it\cdot f(t)\}(\omega)$$

Estas identidades se demuestran mediante un cambio de variable o usando integración por partes, operada sobre la definición.

"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

Matemáticas

Posgrado en Nanotecnología

Dr. Roberto Pedro Duarte Zamorano