"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

MATEMÁTICAS

Posgrado en Nanotecnología

Dr. Roberto Pedro Duarte Zamorano

Temario

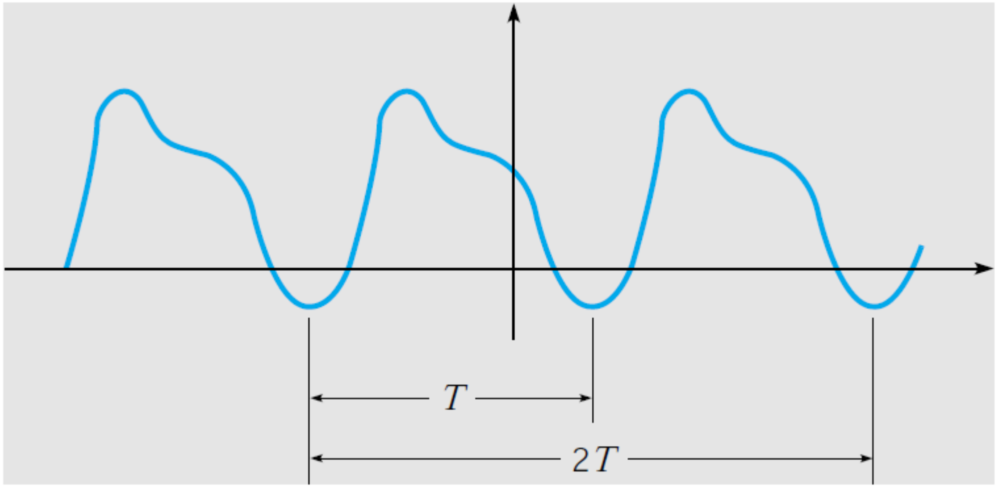
2. Series de Fourier
    1. Introducción.
    2. Desarrollo de Fourier.
    3. Expansiones de Fourier de medio rango.

SERIES DE FOURIER

Introducción.

Se dice que una función $f(t)$ es periódica, con periodo T,

- si el dominio de $f(t)$ contiene tanto a t como a $t + T$; y
- si $f(t+T) = f(t)$



Aunque $2T$ también satisface las condiciones anteriores, el valor mínimo de T será el que usaremos en lo que sigue.

Series de Fourier

Una definición.

Una serie de Fourier es una expansión de una función periódica $f(t)$, con periodo T, en términos de una suma infinita de senos y cosenos que toma la forma

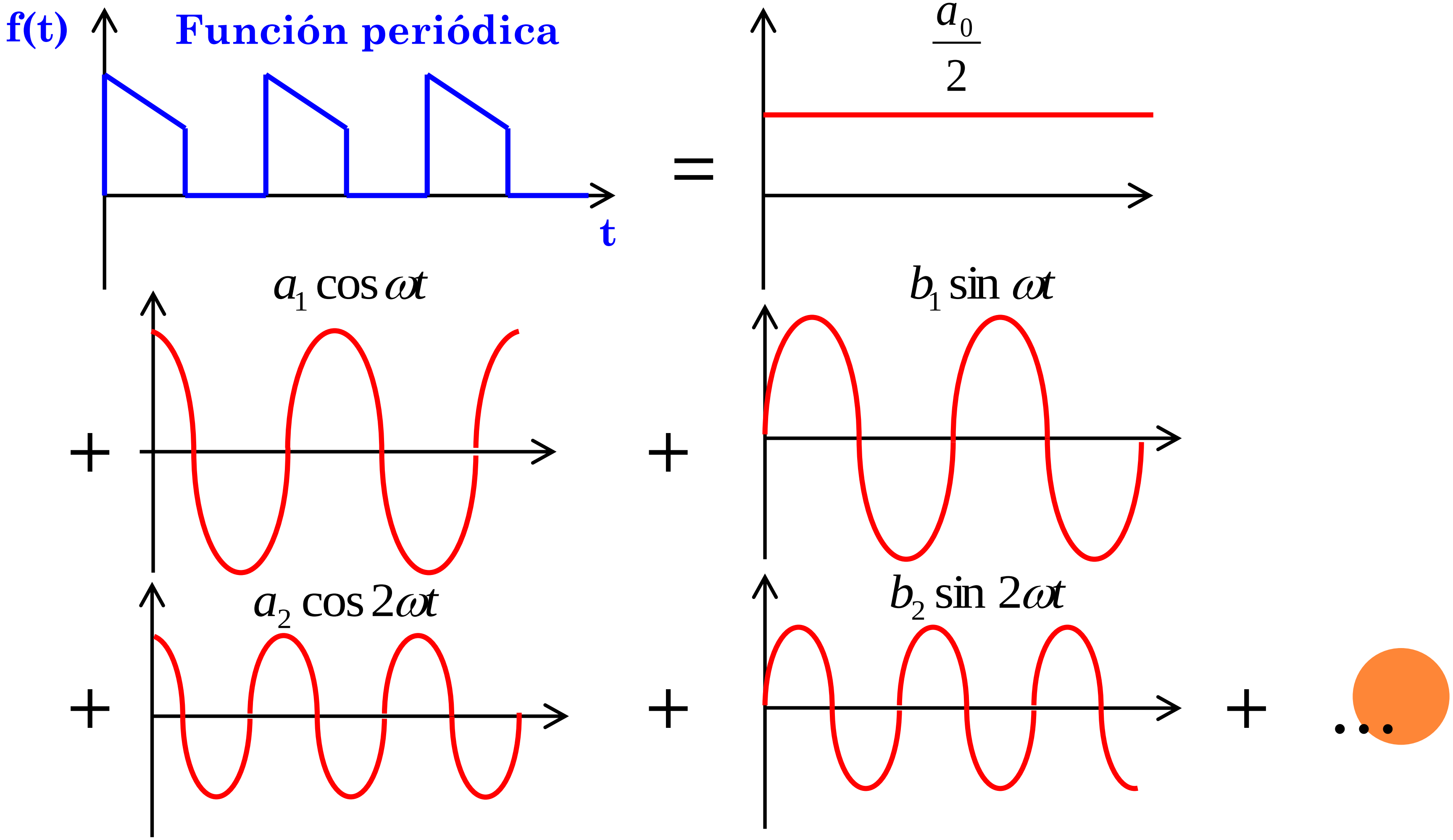
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

En otras palabras, cualquier función periódica se puede reescribir como una suma de funciones armónicas multiplicadas por constantes por determinar.

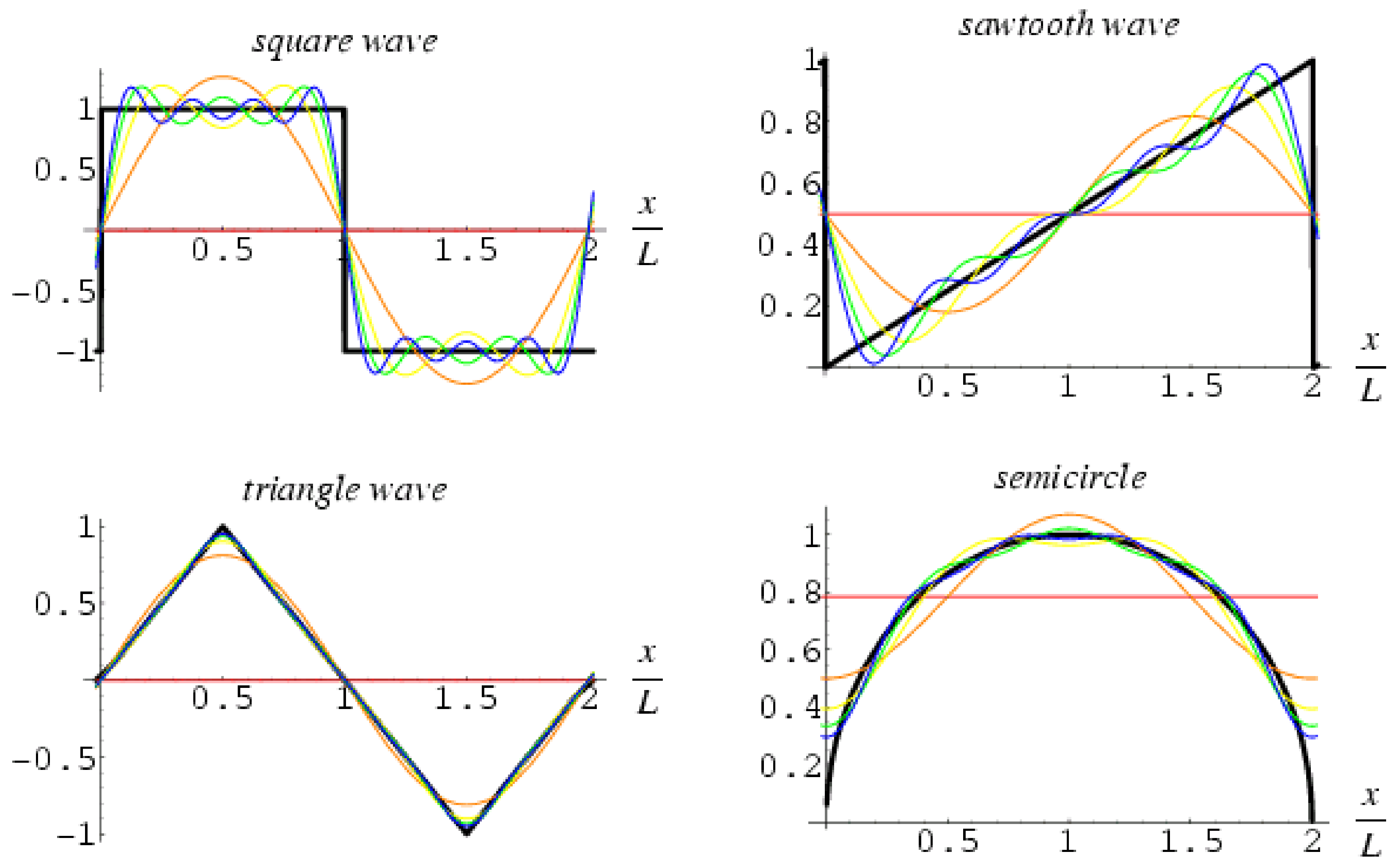
En el desarrollo anterior, se considera que la función $f(t)$ tiene una periodicidad definida; sin embargo, más adelante veremos que aunque la función no sea periódica podremos hacer un análisis de Fourier mediante la transformada integral de Fourier.

Series de Fourier

Un ejemplo gráfico.



Series de Fourier



Series de Fourier

Una definición …

Regresando al desarrollo de Fourier para la función periódica $f(t)$ con periodo T, a saber

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

se encuentra que los coeficientes a_n y b_n están dados por

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\,dt \quad \text{y} \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t\,dt$$

Con

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

Series de Fourier

Una definición ...

A la cantidad ω que aparece en las expresiones anteriores se le conoce como frecuencia fundamental y está dada por

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

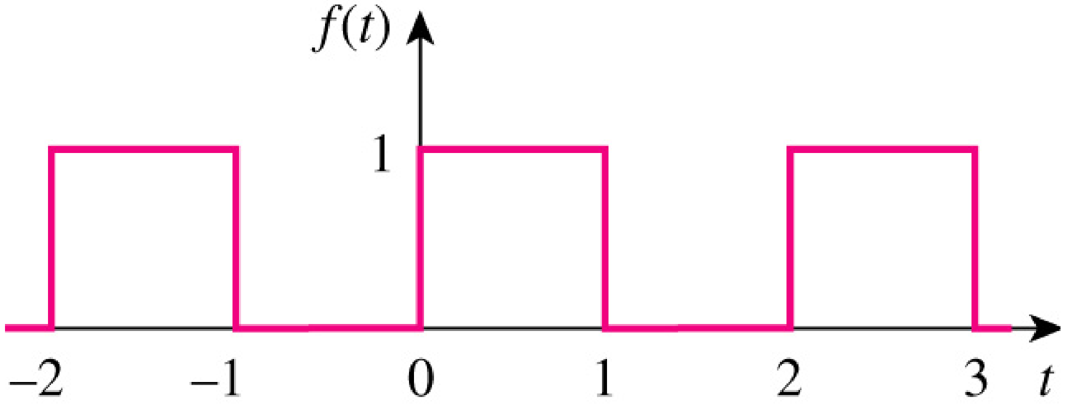
donde T es el periodo de la función $f(t)$.

El cálculo y estudio de las series de Fourier se conoce como análisis armónico y es extremadamente útil al estudiar funciones periódicas arbitrarias y hacer un análisis de la misma en términos de su contenido frecuencial o espectro de frecuencias.

Series de Fourier

Un ejemplo.

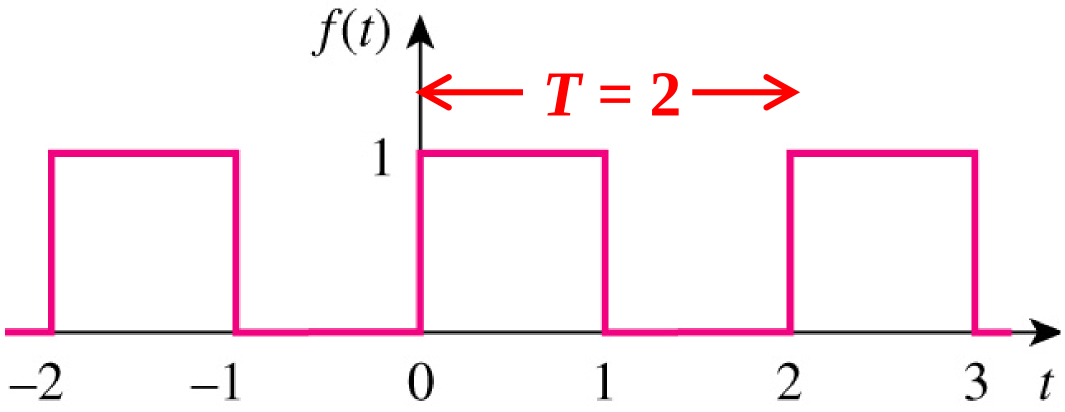
Determina la representación en series de Fourier de la siguiente función $f(t)$



Series de Fourier

Solución.

Primero determinemos el periodo T, y escribamos la expresión matemática de la función $f(t)$



$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases} \qquad f(t+2) = f(t)$$

Series de Fourier

Solución.

A continuación calculemos los coeficientes del desarrollo de Fourier

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)dt = \int_0^1 1dt + \int_1^2 0dt = 1 - 0 = 1$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^2 f(t)\cos n\omega t dt$$

$$= \int_0^1 1\cos n\pi t dt + \int_1^2 0dt = \left[\frac{\sin n\pi t}{n\pi}\right]_0^1 = \frac{\sin n\pi}{n\pi}$$

Como n es un entero, el seno se anulará, por lo que

$$a_n = 0$$

Series de Fourier

Solución.

Por otro lado, el coeficiente b_n está dado por

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^2 f(t)\sin n\omega t dt$$

$$= \int_0^1 1\sin n\pi t dt + \int_1^2 0 dt = \left[-\frac{\cos n\pi t}{n\pi}\right]_0^1 = \frac{1-\cos n\pi}{n\pi}$$

de nuevo, como n es un entero, podemos advertir que

$$\cos\pi = \cos 3\pi = \cos 5\pi = \ldots = -1$$

$$\cos 2\pi = \cos 4\pi = \cos 6\pi = \ldots = 1$$

o

$$\cos n\pi = (-1)^n$$

Series de Fourier

Solución.

con lo que

$$b_n = \frac{1-(-1)^n}{n\pi} = \begin{cases} 2/n\pi & , \quad n \text{ impar} \\ 0 & , \quad n \text{ par} \end{cases}$$

Finalmente, la serie de Fourier resulta ser

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1-(-1)^n}{n\pi} \right] \sin n\pi t$$

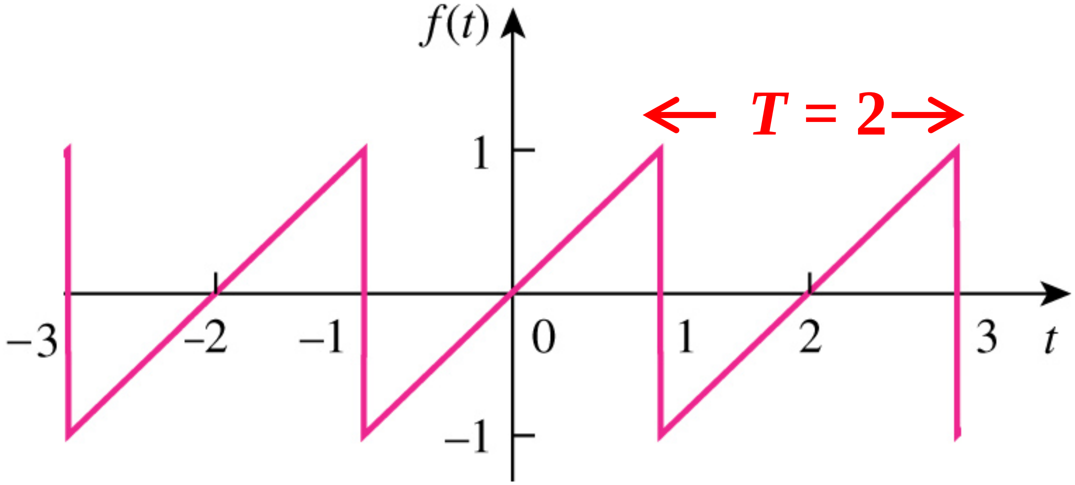
$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin \pi t + \frac{2}{3\pi} \sin 3\pi t + \frac{2}{5\pi} \sin 5\pi t + \ldots$$

Series de Fourier

Otro ejemplo.

Dada $f(t) = t$ definida en el intervalo [-1,1] y con periodo $T = 2$, bosqueje la gráfica entre $t = -3$ y $t = 3$ y calcule los coeficientes de la serie de Fourier correspondiente.

La gráfica de la función tiene la forma



así que

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

Series de Fourier

A continuación calculamos los coeficientes del desarrollo

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^2 f(t)dt = \frac{2}{T}\int_{-1}^1 f(t)dt$$

$$= \frac{2}{2}\int_{-1}^1 tdt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^1 = \frac{1-1}{2}$$

$$\boxed{a_0 = 0}$$

Series de Fourier

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-1}^{1} f(t)\cos n\omega t dt = \int_{-1}^{1} t\cos n\pi t dt$$

Para calcular esta integral, usamos el método de integración por partes, así que

$$a_n = \left[\frac{t\sin n\pi t}{n\pi}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{\sin n\pi t}{n\pi}dt$$

y sucesivamente

$$a_n = \frac{\sin n\pi - [-\sin(-n\pi)]}{n\pi} + \left[\frac{\cos n\pi t}{n^2\pi^2}\right]_{-1}^{1}$$

Series de Fourier

usando que sin(-x) = -sin(x),

$$a_n = 0 + \frac{\cos n\pi - \cos(-n\pi)}{n^2\pi^2}$$

y dado que cos(-x) = cos(x) tenemos que

$$\boxed{a_n = 0}$$

Para terminar, calculemos el coeficiente b_n

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-1}^{1} f(t)\sin n\omega t dt = \int_{-1}^{1} t\sin n\pi t dt$$

Series de Fourier

es decir

$$b_n = \left[-\frac{t\cos n\pi t}{n\pi} \right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \frac{\cos n\pi t}{n\pi}\, dt$$

$$= \frac{-\cos n\pi + [-\cos(-n\pi)]}{n\pi} + \left[\frac{\sin n\pi t}{n^2\pi^2} \right]_{-1}^{1}$$

$$= -\frac{2\cos n\pi}{n\pi} + \frac{\sin n\pi - \sin(-n\pi)}{n^2\pi^2}$$

$$= -\frac{2\cos n\pi}{n\pi} = -\frac{2(-1)^n}{n\pi}$$

Lo que lleva a que

$$\boxed{b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}}$$

Series e integrales de Fourier

Con lo anterior, para la función $f(t) = t$ definida en el intervalo [-1,1] y con periodo $T = 2$, la serie de Fourier resulta ser

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin n\pi t}$$

ó

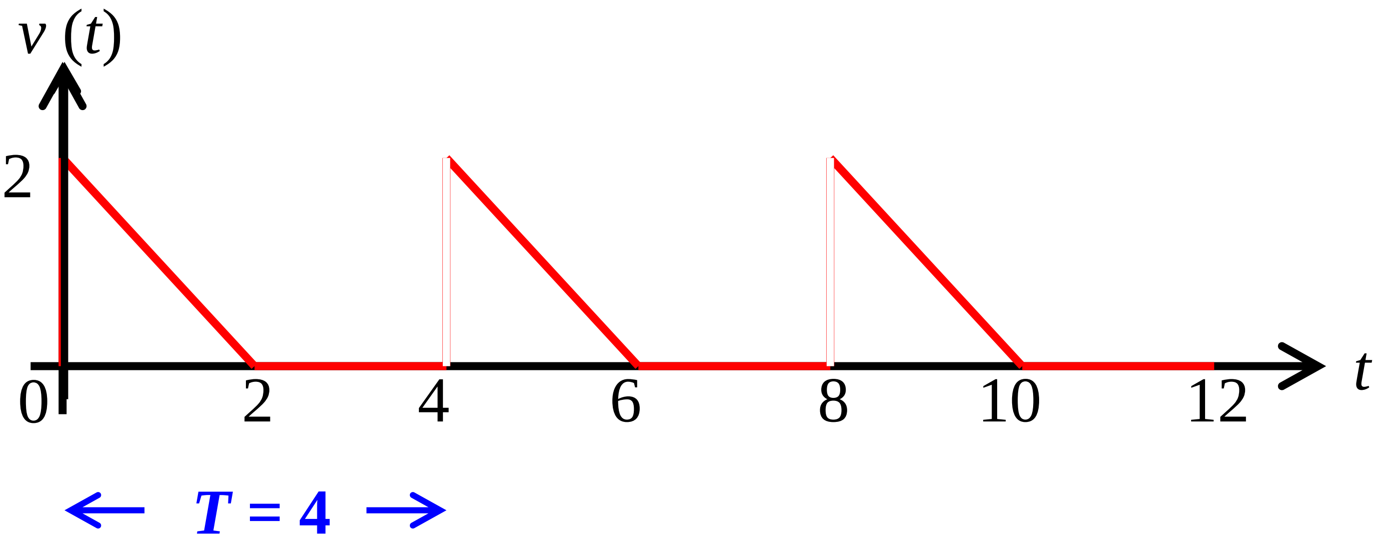
$$f(t) = \frac{2}{\pi} \sin \pi t - \frac{2}{2\pi} \sin 2\pi t + \frac{2}{3\pi} \sin 3\pi t - \ldots$$

Series de Fourier

Un ejercicio

Dada $f(t) = 2 - t$ en el intervalo $[0,2]$, $f(t) = 0$ en el intervalo $[2,4]$ y con periodo $T = 4$, bosqueje la gráfica entre $t = 0$ y $t = 12$ y calcule los coeficientes de la serie de Fourier correspondiente.

La gráfica es



Series de Fourier

Un ejercicio

Los coeficientes

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^4 f(t)dt = \frac{2}{4}(2) = 1$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^4 f(t)\cos n\omega t dt = \frac{2[1-(-1)^n]}{n^2\pi^2}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^4 f(t)\sin n\omega t dt = \frac{2}{n\pi}$$

Series de Fourier

Un ejercicio

Así que la serie es

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2[1-(-1)^n]}{n^2\pi^2} \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right) + \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right) \right\}$$

Series de Fourier

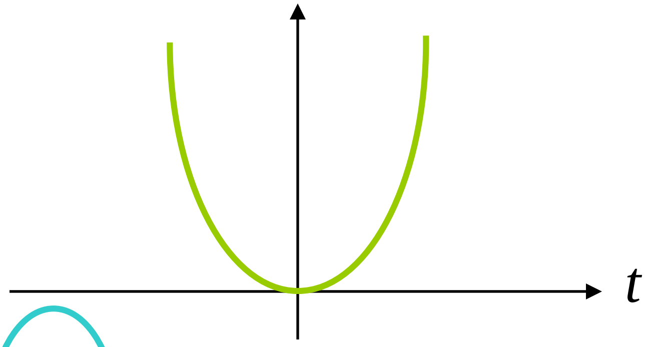
Algunas consideraciones de simetría.

Una función $f(t)$ es **par** si su gráfica es simétrica respecto al eje vertical, es decir

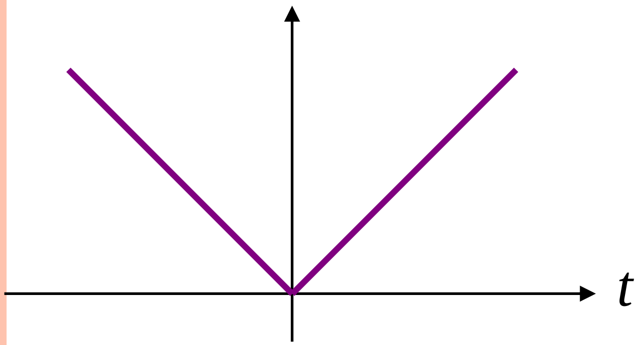
$$f(-t) = f(t)$$

Algunos ejemplos de funciones pares son los siguientes

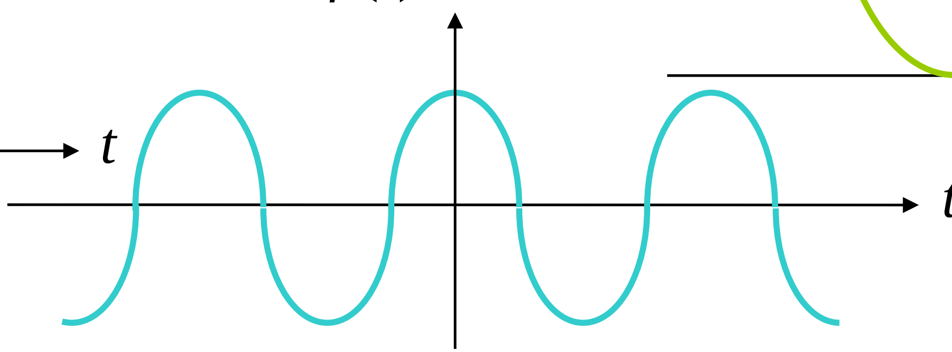
$f(t) = t^2$



$f(t) = |t|$



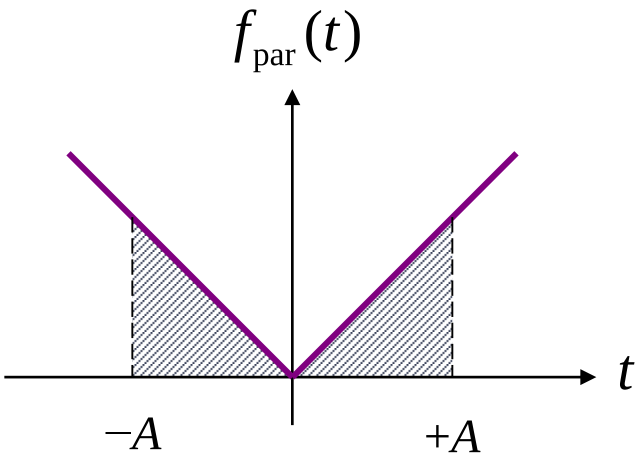
$f(t) = \cos t$



Series de Fourier

Algunas consideraciones de simetría.

La integral de una función par de $-A$ a $+A$



es el doble de la integral de 0 a $+A$, es decir

$$\int_{-A}^{+A} f_{par}(t)dt = 2\int_{0}^{+A} f_{par}(t)dt$$

Series de Fourier

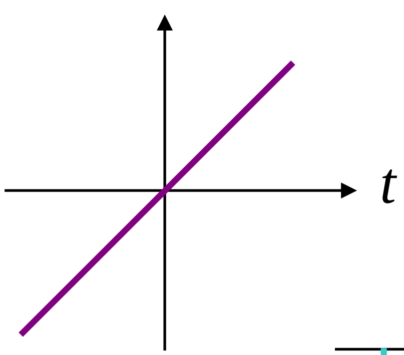
Algunas consideraciones de simetría.

Una función $f(t)$ es **impar** si su gráfica es antisimétrica respecto al eje vertical, es decir

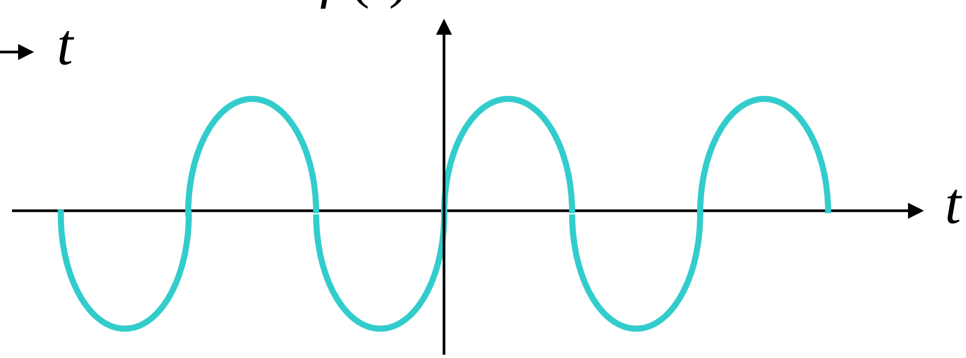
$$f(-t) = -f(t)$$

Algunos ejemplos de funciones impares son los siguientes

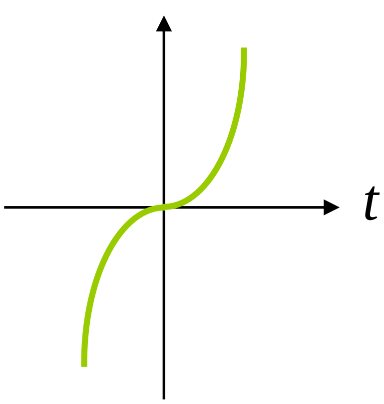
$f(t) = t$



$f(t) = \sin t$

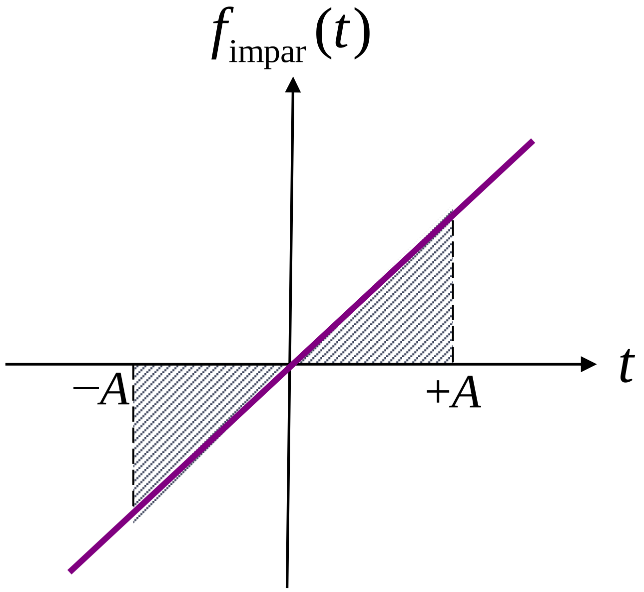


$f(t) = t^3$



Algunas consideraciones de simetría.

La integral de una función impar de $-A$ a $+A$



se anula, es decir

$$\int_{-A}^{+A} f_{\text{impar}}(t)\,dt = 0$$

Series de Fourier

Producto de funciones pares e impares.

De acuerdo a la clasificación presentada anteriormente, el producto de funciones satisface las siguientes propiedades:

- (par) x (par) = par
- (impar) x (impar) = par
- (par) x (impar) = impar
- (impar) x (par) = impar

Series de Fourier

La simetría en los coeficientes de Fourier.

De las propiedades de las funciones pares e impares, se puede demostrar que:

1. para funciones pares:

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega t\,dt \qquad\qquad b_n = 0$$

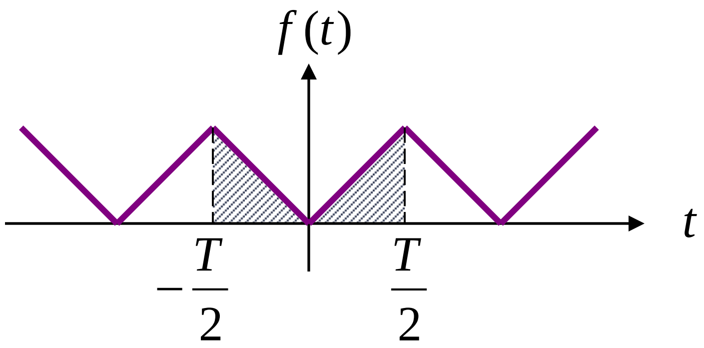
2. para funciones impares:

$$a_0 = a_n = 0 \qquad\qquad b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega t\,dt$$

Series de Fourier

La simetría en los coeficientes de Fourier.

Función $f(t)$ par



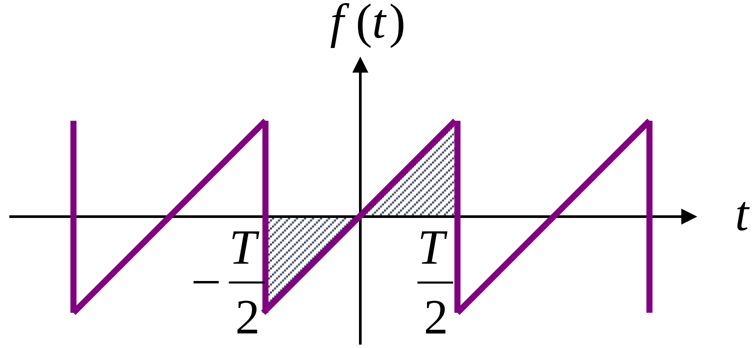
$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{\underbrace{f(t)}_{\text{(par)}} \times \underbrace{\cos n\omega t}_{\text{(par)}}}_{\text{(par)}} dt = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos n\omega t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{\underbrace{f(t)}_{\text{(par)}} \times \underbrace{\sin n\omega t}_{\text{(impar)}}}_{\text{(impar)}} dt = 0$$

Series de Fourier

La simetría en los coeficientes de Fourier.

Función $f(t)$ impar



$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(t)}_{\textbf{(impar)}} dt = 0$$

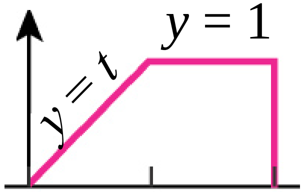
$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{\underbrace{f(t)}_{\textbf{(impar)}} \times \underbrace{\cos n\omega t}_{\textbf{(par)}}}_{\textbf{(impar)}} dt = 0$$

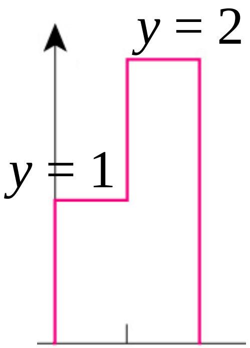
$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{\underbrace{f(t)}_{\textbf{(impar)}} \times \underbrace{\sin n\omega t}_{\textbf{(impar)}}}_{\textbf{(par)}} dt = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\sin n\omega t\, dt$$

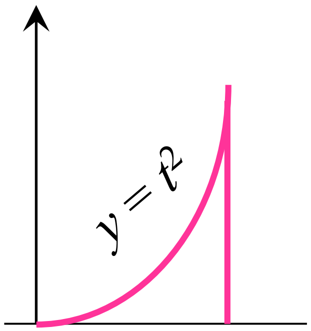
SERIES DE FOURIER

Hasta este punto hemos considerado funciones periódicas, por lo que aplicar la teoría de Fourier para hacer un desarrollo ha sido directo.

Sin embargo, en muchas situaciones físicas lo que se tienen son funciones no periódicas, pero esto no debe representar mayor problema ya que (casi) siempre se pueden definir sobre un intervalo dado





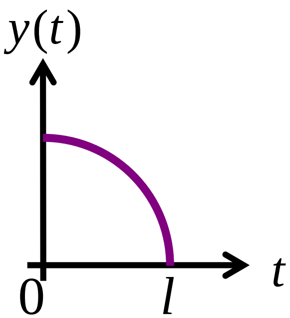


Series de Fourier

Por lo anterior, resulta muy útil extender la función no periódica en una función periódica antes de calcular su representación en serie de Fourier.

Para ello, normalmente preferimos usar alguna de las simetrías vistas anteriormente (par o impar) para la extensión periódica, en lugar de una extensión periódica normal, ya que el uso de una función con cierta simetría (par o impar) nos proporcionará coeficientes cero de cualquiera de las a_n o b_n de la expansión lo que puede proporcionar una expansión más sencilla de la serie de Fourier correspondiente.

Función no periódica

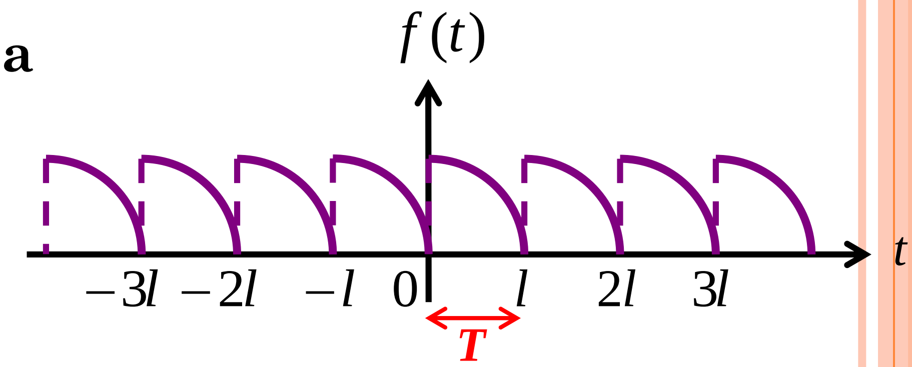


Extensión periódica

$$f(t) = y(t) \quad , \quad 0 < t < l$$

$$f(t + l) = f(t)$$

$$T = l$$

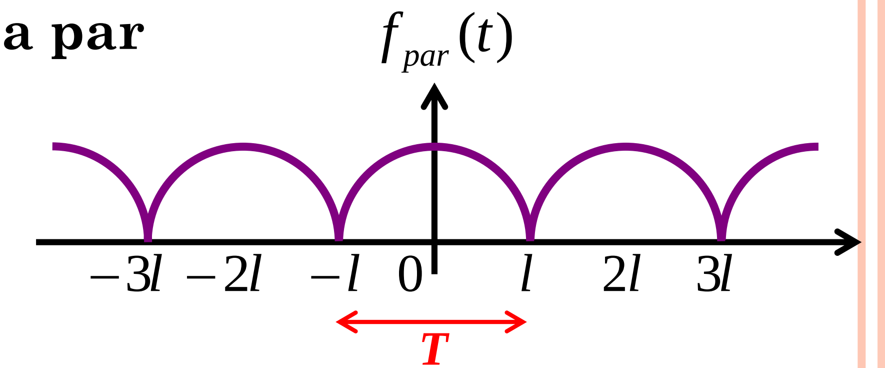


Extensión periódica par

$$f(t) = \begin{cases} y(t) & , \quad 0 < t < l \\ y(-t) & , \quad -l < t < 0 \end{cases}$$

$$f(t + 2l) = f(t)$$

$$T = 2l$$

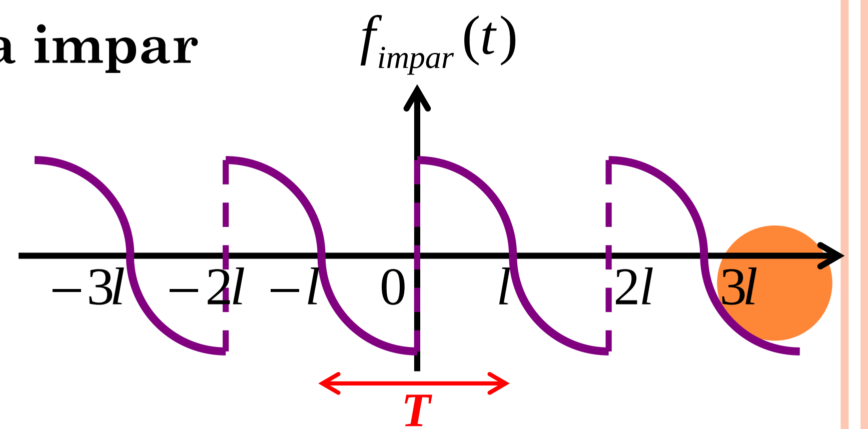


Extensión periódica impar

$$f(t) = \begin{cases} y(t) & , \quad 0 < t < l \\ -y(-t) & , \quad -l < t < 0 \end{cases}$$

$$f(t + 2l) = f(t)$$

$$T = 2l$$

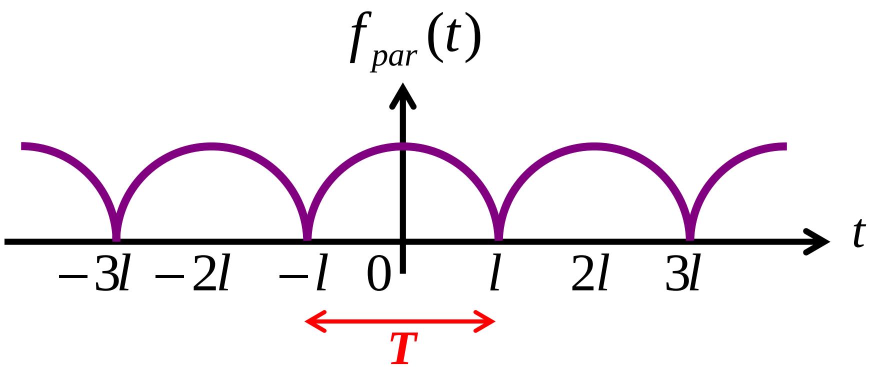


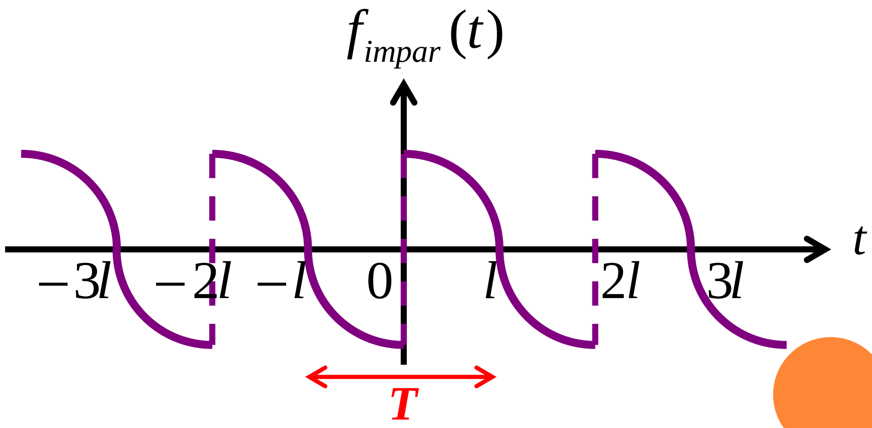
Series de Fourier

Expansión de Fourier de medio rango.

La serie de Fourier de una extensión periódica par o impar de una función no periódica se le llama serie de Fourier de medio rango.

Lo anterior se debe a que la función no periódica se considera como la mitad de la función expandida, ya sea por una función par o una función impar.





Series de Fourier

Expansión de Fourier de medio rango.

Si la función no periódica se extiende mediante una función par entonces los coeficientes b_n se anulan y, por lo tanto, el desarrollo de la función se reduce a

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t$$

que sólo contiene el desarrollo en términos de cosenos, por lo que se le conoce como Serie coseno de Fourier de medio rango.

Series de Fourier

Expansión de Fourier de medio rango.

Si la función no periódica se extiende mediante una función impar entonces los coeficientes a_n se anulan y, por lo tanto, el desarrollo de la función se reduce a

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

que sólo contiene el desarrollo en términos de senos, por lo que se le conoce como Serie seno de Fourier de medio rango.

Series de Fourier

Ejercicios.

1. Usando consideraciones de simetría, construya una serie de medio rango para las siguientes funciones:
   a) $f(t) = t^2$ para $0 < t < 2$.
   b) $f(t) = t$ para $-1 < t < 1$

2. Construya la serie de Fourier completa para cada una de las funciones anteriores y compare sus resultados.

"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

Matemáticas

Posgrado en Nanotecnología

Dr. Roberto Pedro Duarte Zamorano