"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

# Matemáticas

Posgrado en Nanotecnología

Dr. Roberto Pedro Duarte Zamorano

# Temario

1. Series de Potencias
   1. Repaso de las series de potencia.
   2. Soluciones en Series de Potencias en torno a puntos ordinarios.
   3. Soluciones en Series de Potencia en torno a puntos singulares. Método de Frobenius.

# Repaso de las series de potencia

Las series de potencia son una suma (a menudo) infinita de términos.

Un ejemplo de una serie de potencias es

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

De forma más general, se dice que una **serie de potencias centrada en *a*** es una serie de potencias en $(x - a)$ de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

En ambas casos, los coeficientes $c_n$ son constantes que más adelante veremos cómo se determinan.

# Repaso de las series de potencia

Un problema importante que puede representar una serie infinita de potencias es que esta puede divergir, esto es, podría resultar infinita conforme se le añaden cada vez más términos; este tipo de series no son funcionales y en lo que sigue, buscaremos que las series que usemos sean convergentes.

Se dice que **una serie converge para un valor particular de *x* si su límite es finito**, es decir

$$-\infty < \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n < \infty$$

de lo contrario, se dice que la serie no converge.

# Repaso de las series de potencia

Se dice que **una serie converge absolutamente si la sumatoria de los valores absolutos de sus términos converge**, es decir

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| < \infty$$

Si una serie converge absolutamente, también converge.

La pregunta ahora es: ¿cómo sabemos si una serie converge, o no?

La respuesta es sencilla, podemos usar el "criterio del cociente" (ratio test), pero antes generalicemos y ampliemos las ideas anteriores.

# Repaso de las series de potencia

Si ahora consideramos la expresión general para una serie de potencias, a saber

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

entonces, la serie **converge** si existe el siguiente límite de las sumas parciales:

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} c_n (x-a)^n$$

Se llama **intervalo de convergencia** al conjunto de números reales $x$ o intervalo para los que la serie converge.

# Repaso de las series de potencia

Se llama **radio de convergencia** al número positivo (o cero) ρ, tal que la serie converge absolutamente si

$$|x-a|<\rho$$

y diverge si

$$|x-a|>\rho$$

La región en la que

$$|x-a|<\rho$$

(donde la serie converge) se llama **intervalo de convergencia**. Dentro de su intervalo de convergencia, una serie de potencias converge absolutamente

Si $\rho=0$ la serie converge solo para $x=a$, si la serie converge para todo $x$, entonces escribimos $\rho=\infty$.

# Repaso de las series de potencia

**Prueba de convergencia**
**(criterio del cociente o "ratio test")**

Considerando la serie

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

y suponiendo que $c_n \neq 0$ para todo $n$, podemos escribir el siguiente cociente

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n(x-a)^n} \right| = |x-a| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = L$$

Si $L < 1$, la serie converge absolutamente; si $L > 1$, la serie diverge; y si $L = 1$, el criterio no es concluyente.

# Repaso de las series de potencia

**Un ejemplo sencillo.**

¿En qué intervalo, si es que existe, la siguiente serie converge absolutamente?

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-3)^n$$

El primer paso es construir el cociente de los términos $n$+1 y $n$, es decir

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n (x-a)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}(x-3)^{n+1}}{(-1)^n (x-3)^n} \right|$$

$$L = \ |(-1)(x-3)| = |x-3| < 1$$

Lo cual se cumple si $x$ se ubica en el intervalo $2 < x < 4$, fuera de este intervalo, la serie diverge.

# Repaso de las series de potencia

**Otro ejemplo.**

¿En qué intervalo, si es que existe, la siguiente serie converge absolutamente?

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{5^k}{k!}x^k$$

En este caso, el cociente de los términos $n$+1 y $n$ es

$$L=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\dfrac{5^{k+1}}{(k+1)!}x^{k+1}}{\dfrac{5^k}{k!}x^k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{5}{k+1}x\right|=0$$

Lo cual se cumple para toda $x$, por lo tanto, la serie converge absolutamente para todos los reales.

# Repaso de las series de potencia

**Un ejercicio.**

¿En qué intervalo, si es que existe, la siguiente serie converge absolutamente?

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^k}{k^2}$$

# Repaso de las series de potencia

**Ejercicios adicionales.** Determine el intervalo de convergencia de cada una de la siguientes series

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k} x^k$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^3}$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{10^k} (x-5)^k$

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k!\, 2^k x^k$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

g) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k!} x^k$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+7)^n}{\sqrt{n}}$

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+2)^2} (x-4)^k$

j) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k-1}{k^{2k}} x^k$

# Repaso de las series de potencia

**Ajustando los índices en una serie.**

Una herramienta útil cuando resolvamos ecuaciones diferenciales mediante series es el llamado cambio de índices en una serie.

Supongamos que se tiene la siguiente serie que inicia en $n$=3:

$$y=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(2x+1)^{n}}{n^{2}}$$

Para que inicie en $n$=0 bastará hacer el siguiente cambio: $n$ se sustituye por $k$+3

$$y=\sum_{k+3=3}^{\infty}\frac{(2x+1)^{k+3}}{(k+3)^{2}}$$

y luego se regresa a $n$:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x+1)^{n+3}}{(n+3)^{2}}$$

# Repaso de las series de potencia

**Ajustando los índices en una serie.**

Supongamos que se tiene la siguiente serie:

$$y = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{5^k}{k!} x^k$$

Para que inicie en $n$=0 bastará hacer el siguiente cambio: $k$ se sustituye por $n$+2

$$y = \sum_{n+2=2}^{\infty} \frac{5^{n+2}}{(n+2)!} x^{n+2}$$

y luego se regresa a $k$:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^{k+2}}{(k+2)!} x^{k+2}$$

# Repaso de las series de potencia

Una serie de potencias define una función $y(x)$ dada por

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

cuyo dominio es el intervalo de convergencia de la serie, en el cual es continua, derivable e integrable, lo que permite escribir la primera derivada como

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

la segunda derivada como

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

y así sucesivamente.

# Repaso de las series de potencia

**Series de Taylor**.

Uno puede expresar cualquier función continua $f(x)$ como una serie: la serie de Taylor.

La expansión o desarrollo de Taylor de una función $f(x)$ alrededor del punto $x_0$ se expresa como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Si una función $f(x)$ posee una expansión en series de Taylor en el punto $x = x_0$ con un radio de convergencia diferente de cero, se dice que es analítica en $x = x_0$.

# Soluciones en Series de Potencia en torno a puntos ordinarios

**Una definición.**

Considerando que la ecuación diferencial

$$a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$$

se puede escribir como

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

entonces se dice que $x_0$ es un punto ordinario de la ecuación diferencial si tanto $P(x)$ como $Q(x)$ son analíticas en $x_0$, de lo contrario $x_0$ será un punto singular de la ecuación diferencial.

Lo anterior implica que $x_0$ es un punto ordinario si $a_2(x_0)$ es distinto de cero, mientras que lo contrario $[a_2(x_0) = 0]$ nos lleva a que $x_0$ será un punto singular de la ecuación diferencial.

# Soluciones en Series de Potencia en torno a puntos ordinarios

Si $x_0$ es un punto ordinario de la ecuación diferencial

$$a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$$

siempre será posible encontrar dos soluciones linealmente independientes en la forma de una serie de potencias centrada en $x_0$, es decir

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(x-x_0\right)^n$$

Esta solución en serie de potencias converge al menos en el intervalo definido por $|x - x_0| < \rho$, donde $\rho$ es la distancia desde $x_0$ al punto singular más cercano.

# Soluciones en Series de Potencia en torno a puntos ordinarios

Con lo anterior, podemos considerar que si

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

entonces la primera derivada será

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (x - x_0)^{n-1}$$

mientras que la segunda derivada será

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n (x - x_0)^{n-2}$$

# Soluciones en Series de Potencia en torno a puntos ordinarios

**Un ejemplo.**

La ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

tiene como solución a

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

donde $y_1(x) = \sin(x)$ y $y_2(x) = \cos(x)$.

Encuentre la solución para esta ecuación en una serie de potencias alrededor de $x_0 = 0$.

# Soluciones en Series de Potencia en torno a puntos ordinarios

**Otro ejemplo.**

Encuentre la solución en una serie de potencias, alrededor del origen, para la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + 2y = 0\,.$$

Al escribirla en la forma

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

identifique claramente a $y_1(x)$ y $y_2(x)$.

# Soluciones en Series de Potencia en torno a puntos singulares

Si ahora consideramos que la ecuación diferencial

$$a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$$

tiene un punto singular $x_0$, tal que $a_2(x_0) = 0$, dicho punto se clasifica en regular o irregular.

Para facilitar la clasificación de un punto singular, es conveniente reescribir la ecuación anterior en la forma

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

donde

$$P(x)=\frac{a_1(x)}{a_2(x)}$$

y

$$Q(x)=\frac{a_0(x)}{a_2(x)}$$

# Soluciones en Series de Potencia en torno a puntos singulares

**Definición.**

Se dice que $x_0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

si las funciones $p(x) = (x - x_0)P(x)$ y $q(x) = (x - x_0)^2Q(x)$ son analíticas en $x_0$, de lo contrario $x_0$ será un punto singular irregular de la ecuación diferencial.

Lo anterior implica que si $(x - x_0)$ aparece a lo más a la primera potencia en el denominador de $P(x)$ o a lo más a la segunda potencia en el denominador de $Q(x)$, entonces $x_0$ será un punto singular regular.

# Soluciones en Series de Potencia en torno a puntos singulares

**Un ejemplo.**

La ecuación diferencial

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2y = 0$$

tiene como solución a

$$y_1(x) = x^2 \qquad \text{y} \qquad y_2(x) = \frac{1}{x}$$

Identifique la singularidad y analice de qué tipo es.

# Soluciones en Series de Potencia en torno a puntos singulares

**Otros ejemplos.**

Para las siguientes ecuaciones diferenciales identifique la singularidad y analice de qué tipo es.

a) $$(x-4)^2\, x\frac{d^2y}{dx^2}+4x\frac{dy}{dx}+(x-4)\,y=0$$

b) $$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\alpha(\alpha+1)\,y=0$$

donde $\alpha$ es una constante.

# Soluciones en Series de Potencia en torno a puntos singulares

**Teorema de Frobenius**

Si $x_0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial

$$a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$$

siempre será posible encontrar al menos una solución en serie de potencias centrada en $x_0$ de la forma

$$y(x)=\left(x-x_0\right)^r\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(x-x_0\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(x-x_0\right)^{n+r}$$

donde el número $r$ es una constante por determinar.

Si se encuentra que $r$ es un número que no es un entero negativo, entonces la solución correspondiente no es una serie de potencias

# Soluciones en Series de Potencia en torno a puntos singulares

Con lo anterior, podemos considerar que si

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(x-x_0\right)^{n+r}$$

entonces la primera derivada será

$$y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n\left(x-x_0\right)^{n+r-1}$$

mientras que la segunda derivada será

$$y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n\left(x-x_0\right)^{n+r-2}$$

# Soluciones en Series de Potencia en torno a puntos singulares

**Un ejemplo.**

La ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2y}{x^2} = 0$$

tiene como solución a

$$y_1(x) = x^2 \qquad \text{y} \qquad y_2(x) = \frac{1}{x}$$

Encuentre la solución para esta ecuación en una serie de potencias alrededor de $x_0 = 0$.

# Soluciones en Series de Potencia en torno a puntos singulares

**Otros ejemplos.**

Identifique el (o los) punto(s) singular(es) y su clasificación, e intente encontrar la solución en una serie de potencias, para la ecuación diferencial

(a) $$x(x+3)\frac{d^2y}{dx^2}-y=0$$

(b) $$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{(x-1)^3}y=0$$

"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

# MATEMÁTICAS

Posgrado en Nanotecnología

Dr. Roberto Pedro Duarte Zamorano