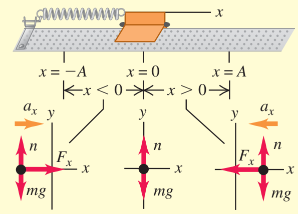
CAPÍTULO 13 RESUMEN

Movimiento periódico: Un movimiento periódico se repite en un ciclo definido; se presenta siempre que un cuerpo tiene una posición de equilibrio estable y una fuerza de restitución que actúa cuando el cuerpo se desplaza del equilibrio. El periodo T es lo que tarda un ciclo. La frecuencia f es el número de ciclos por unidad de tiempo. La frecuencia angular ω es 2π veces la frecuencia. (Véase el ejemplo 13.1.)

$$f = \frac{1}{T} \qquad T = \frac{1}{f} \tag{13.1}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{13.2}$$



Movimiento armónico simple: Si en el movimiento periódico la fuerza de restitución F_x es directamente proporcional al desplazamiento x, el movimiento se denomina armónico simple (MAS). En muchos casos, esta condición se satisface si el desplazamiento con respecto al equilibrio es pequeño. La frecuencia angular, la frecuencia y el periodo en un MAS no dependen de la amplitud, sólo dependen de la masa m y la constante de fuerza k. En un MAS, el desplazamiento, la velocidad y la aceleración son funciones senoidales del tiempo; la amplitud A y el ángulo de fase ϕ de la oscilación están determinados por la posición y velocidad iniciales del cuerpo. (Véanse los ejemplos 13.2, 13.3, 13.6 y 13.7.)

$$F_x = -kx \tag{13.3}$$

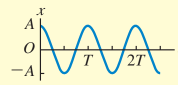
$$a_x = \frac{F_x}{m} = -\frac{k}{m}x \tag{13.4}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{13.10}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{13.11}$$

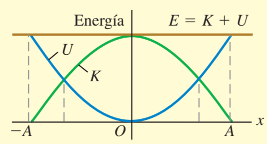
$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{13.12}$$

$$x = A\cos(\omega t + \phi) \tag{13.13}$$



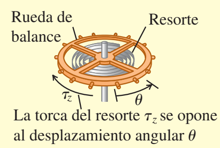
Energía en movimiento armónico simple: La energía se conserva en un MAS. La energía total se puede expresar en términos de la constante de fuerza k y la amplitud A. (Véanse los ejemplos 13.4 y 13.5.)

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \text{constante} \tag{13.21}$$



Movimiento armónico simple angular: En el MAS angular, la frecuencia y la frecuencia angular están relacionados con el momento de inercia I y la constante de torsión κ.

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \quad \text{y} \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{I}} \tag{13.24}$$

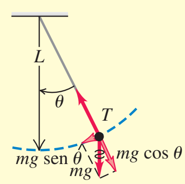


Péndulo simple: Un péndulo simple consiste en una masa puntual m en el extremo de un cordón sin masa de longitud L. Su movimiento es aproximadamente armónico simple si la amplitud es lo bastante pequeña; entonces, la frecuencia angular, la frecuencia y el periodo dependen sólo de g y L, no de la masa ni de la amplitud. (Véase el ejemplo 13.8.)

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{13.32}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \tag{13.33}$$

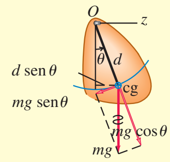
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{13.34}$$



Péndulo físico: Un péndulo físico es un cuerpo suspendido de un eje de rotación. La frecuencia angular y el periodo para oscilaciones de amplitud pequeña son independientes de la amplitud, aunque dependen de la masa m, la distancia d del eje de rotación a su centro de gravedad, y del momento de inercia I con respecto al eje. (Véanse los ejemplos 13.9 y 13.10.)

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \tag{13.38}$$

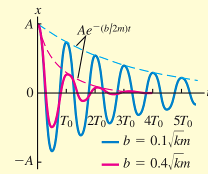
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \tag{13.39}$$



Oscilaciones amortiguadas: Si a un oscilador armónico simple se le aplica una fuerza $F_x = -bv_x$ proporcional a la velocidad, el movimiento se denomina oscilación amortiguada. Si $b < 2\sqrt{km}$ (condición de subamortiguamiento), el sistema oscila con amplitud decreciente y una frecuencia angular ω' que es más baja de la que tendría sin amortiguamiento. Si $b = 2\sqrt{km}$ (condición de amortiguamiento crítico) o $b > 2\sqrt{km}$ (condición de sobreamortiguamiento), cuando el sistema se desplaza regresa a su posición de equilibrio sin oscilar.

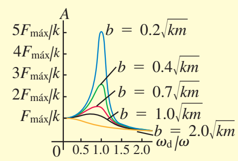
$$x = Ae^{-(b/2m)t}\cos\omega' t \tag{13.42}$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \tag{13.43}$$



Oscilaciones impulsadas y resonancia: Si a un oscilador armónico amortiguado se aplica una fuerza impulsora que varía senoidalmente, el movimiento resultante se denomina oscilación forzada. La amplitud es función de la frecuencia impulsora ω_d y alcanza un máximo con una frecuencia impulsora cercana a la frecuencia natural del sistema. Este comportamiento se denomina resonancia.

$$A = \frac{F_{\text{máx}}}{\sqrt{(k - m\omega_d^2)^2 + b^2\omega_d^2}} \tag{13.46}$$



Términos clave

movimiento periódico (oscilación), *419*
desplazamiento, *420*
fuerza de restitución, *420*
amplitud, *420*
ciclo, *420*
periodo, *420*
frecuencia, *420*
frecuencia angular, *420*
movimiento armónico simple (MAS), *421*
oscilador armónico, *422*
círculo de referencia, *423*
fasor, *423*
ángulo de fase, *426*
péndulo simple, *436*
péndulo físico, *438*
amortiguamiento, *440*
oscilación amortiguada, *440*
amortiguamiento crítico, *441*
sobreamortiguamiento, *441*
subamortiguamiento, *441*
fuerza impulsora, *442*
oscilación forzada, *442*
frecuencia angular natural, *442*
resonancia, *443*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Ninguna de ellas; el reloj seguiría marcando correctamente el tiempo. Si la masa de su varilla es despreciable, el péndulo es simple y su periodo es independiente de la masa [véase la ecuación (13.34)]. Si se incluye la masa de la varilla, se trata de un péndulo físico. Un aumento de su masa m al doble también duplica su momento de inercia I, así que la razón I/m no cambia y el periodo $T = 2\pi\sqrt{I/mgd}$ [ecuación (13.39)] sigue siendo el mismo.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

13.1 Respuestas: *a)* $x < 0$, *b)* $x > 0$, *c)* $x < 0$, *d)* $x > 0$, *e)* $x = 0$, *f)* $x > 0$ La figura 13.2 muestra que la componente x de la fuerza total F_x y la aceleración a_x son ambas positivas cuando $x < 0$ (así que el cuerpo se desplaza hacia la izquierda y el resorte se comprime); mientras que F_x y a_x son ambas negativas cuando $x > 0$ (así que el cuerpo se desplaza hacia la derecha y el resorte se estira). Por lo tanto, F_x y a_x siempre tienen signos *opuestos*. Esto es válido si el objeto se mueve a la derecha ($v_x > 0$), a la izquierda ($v_x < 0$), o no se mueve ($v_x = 0$), ya que la fuerza ejercida por el resorte depende de si se comprime o se estira, y con qué distancia. Esto explica las respuestas *a)* a *e)*. Si la aceleración es cero como en *f)*, la fuerza total también debe ser cero y por ello el resorte debe estar relajado: $x = 0$.

13.2 Respuestas: *a)* $A > 0.10$ m, $\phi < 0$; *b)* $A > 0.10$ m, $\phi > 0$ En ambas situaciones, la velocidad v_{0x} inicial ($t = 0$) no es cero, de manera que de la ecuación (13.19) la amplitud $A = \sqrt{x_0^2 + (v_{0x}^2/\omega^2)}$ es mayor que la coordenada inicial $x_0 = 0.10$ m. A partir de la ecuación (13.18), el ángulo de fase es $\phi = \arctan(-v_{0x}/\omega x_0)$, el cual es positivo si la cantidad $-v_{0x}/\omega x_0$ (el argumento de la función arcotangente) es positivo, y es negativo si $-v_{0x}/\omega x_0$ es negativo. En el inciso *a)* x_0 y v_{0x} son ambos positivos, así que $-v_{0x}/\omega x_0 < 0$ y $\phi < 0$. En el inciso *b)* x_0 es positivo y v_{0x} es negativo, por lo que $-v_{0x}/\omega x_0 > 0$ y $\phi > 0$.

13.3 Respuestas: a) iii), b) v) Para aumentar la energía total $E = \frac{1}{2}kA^2$ en un factor de 2, la amplitud A debe aumentar en un factor de $\sqrt{2}$. Puesto que es MAS, un cambio de amplitud no afecta la frecuencia.

13.4 Respuesta: i) El periodo de oscilación de un cuerpo de masa m unido a un resorte colgante de constante de fuerza k está dado por $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, la misma expresión que para el cuerpo unido al resorte horizontal. Ni m ni k cambian cuando el aparato se lleva a Marte, por lo que no cambia el periodo. La única diferencia es que en el equilibrio, el resorte se estirará una distancia más corta en Marte que en la Tierra, debido a la gravedad más débil.

13.5 Respuesta: no Al igual que para un objeto que oscila en un resorte, en la posición de equilibrio la *rapidez* de la lenteja del péndulo no cambia instantáneamente (es donde la rapidez es máxima, así que su derivada en este tiempo es cero). Sin embargo, la *dirección* del movimiento es variable porque la lenteja del péndulo sigue una trayectoria circular. Por ello, la lenteja debe tener una componente de aceleración perpendicular a la trayectoria y hacia el centro del círculo (véase la sección 3.4). Para originar esta aceleración en la posición de equilibrio cuando el cordón es vertical, la fuerza de tensión hacia arriba en esta posición debe ser mayor que el peso de la lenteja. Esto provoca una fuerza total hacia arriba sobre la lenteja y una aceleración hacia arriba y al centro de la trayectoria circular.

13.6 Respuesta: i) El periodo de un péndulo físico está dado por la ecuación (13.39), $T = 2\pi\sqrt{I/mgd}$. La distancia $d = L$ desde el pivote hasta el centro de gravedad es la misma tanto para la varilla como para el péndulo simple, cuando la masa es m. Esto significa que para cualquier ángulo de desplazamiento θ actúa la misma torca de restitución sobre la varilla y sobre el péndulo simple. Sin embargo, la varilla tiene un momento de inercia mayor: $I_{\text{varilla}} = \frac{1}{3}m(2L)^2 = \frac{4}{3}mL^2$ e $I_{\text{simple}} = mL^2$ (toda la masa del péndulo está a una distancia L del pivote). Por lo tanto, la varilla tiene un periodo mayor.

13.7 Respuesta: ii) Las oscilaciones son subamortiguadas con una amplitud decreciente en cada ciclo de oscilación, como las que se grafican en la figura 13.26. Si las oscilaciones fueran no amortiguadas, continuarían con la misma amplitud indefinidamente. Si fueran críticamente amortiguadas, la punta no se balancearía verticalmente, sino que suavemente regresaría a su posición de equilibrio original sin sobreamortiguamiento.

13.8 Respuesta: i) La figura 13.28 muestra que la curva de amplitud contra frecuencia impulsora se mueve hacia arriba con *todas* las frecuencias, conforme el valor de la constante de amortiguamiento b disminuye. Así, para valores fijos de k y m, el oscilador con el amortiguamiento mínimo (el menor valor de b) tendrá la respuesta más grande en cualquier frecuencia impulsora.

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com**

Preguntas para análisis

P13.1. Un objeto se mueve con MAS de amplitud A en el extremo de un resorte. Si la amplitud se duplica, ¿qué sucede con la distancia total que el objeto recorre en un periodo? ¿Qué sucede con el periodo? ¿Qué sucede con la rapidez máxima del objeto? Analice la relación entre estas respuestas.

P13.2. Piense en varios ejemplos cotidianos de movimiento que sea, al menos, aproximadamente armónico simple. ¿Cómo difiere cada uno del MAS?

P13.3. ¿Un diapasón u otro instrumento de afinación similar tiene MAS? ¿Por qué es algo esencial para los músicos?

P13.4. Una caja que contiene un guijarro se conecta a un resorte horizontal ideal y oscila sobre una mesa de aire sin fricción. Cuando la caja ha alcanzado su distancia máxima a partir del punto de equilibrio, repentinamente el guijarro se sale por arriba sin perturbar la caja. ¿Las siguientes características del movimiento aumentarán, disminuirán o permanecerán igual en el movimiento subsecuente de la caja? Justifique cada respuesta. *a*) Frecuencia, *b*) periodo; *c*) amplitud; *d*) la energía cinética máxima de la caja; *e*) la rapidez máxima de la caja.

P13.5. Si un resorte uniforme se corta a la mitad, ¿qué constante de fuerza tendrá cada mitad? Justifique su respuesta. ¿Cómo diferiría la frecuencia del MAS usando la misma masa y medio resorte, en vez del resorte completo?

P13.6. En el análisis del MAS de este capítulo se despreció la masa del resorte. ¿Cómo cambia esta masa las características del movimiento?

P13.7. Dos deslizadores idénticos en un riel de aire están conectados por un resorte ideal. ¿Podría tal sistema ser un MAS? Explique su respuesta. ¿Cómo sería el periodo en comparación con el de un solo deslizador unido a un resorte, donde el otro extremo está unido rígidamente a un objeto estacionario? Explique su respuesta.

P13.8. Imagine que lo capturan unos extraterrestres, lo meten en su nave y lo duermen con un sedante. Tiempo después, despierta y se encuentra encerrado en un compartimento pequeño sin ventanas. Lo único que le dejaron es su reloj digital, su anillo escolar y su largo collar de cadena de plata. Explique cómo podría determinar si todavía estuviera en la Tierra o si habría sido transportado a Marte.

P13.9. El sistema de la figura 13.17 se monta en un elevador. ¿Qué le sucede al periodo del movimiento (aumenta, disminuye o no cambia), cuando el elevador *a*) acelera hacia arriba a 5.0 m/s^2; *b*) se mueve hacia arriba a 5.0 m/s constantes; *c*) acelera hacia abajo a 5.0 m/s^2? Justifique su respuesta.

P13.10. Si un péndulo tiene un periodo de 2.5 s en la Tierra, ¿qué periodo tendría en una estación espacial en órbita terrestre? Si una masa colgada de un resorte vertical tiene un periodo de 5.0 s en la Tierra, ¿qué periodo tendrá en la estación espacial? Justifique sus respuestas.

P13.11. Un péndulo simple se monta en un elevador. ¿Qué le sucede al periodo del péndulo (aumenta, disminuye o no cambia), cuando el elevador *a*) acelera hacia arriba a 5.0 m/s^2; *b*) se mueve hacia arriba a 5.0 m/s constantes; *c*) acelera hacia abajo a 5.0 m/s^2 ; *d*) acelera hacia abajo a 9.8 m/s^2? Justifique sus respuestas.

P13.12. ¿Qué debe hacerse a la longitud del cordón de un péndulo simple para *a*) duplicar su frecuencia, *b*) duplicar su periodo, *c*) duplicar su frecuencia angular?

P13.13. Si un reloj de péndulo se sube a la cima de una montaña, ¿se adelanta o se atrasa? Explique, suponiendo que marca la hora correcta a menor altitud.

P13.14. Si la amplitud de un péndulo simple aumenta, ¿debería aumentar o disminuir su periodo? Mencione un argumento cualitativo; no se base en la ecuación (13.35). ¿Su argumento también es válido para un péndulo físico?

P13.15. ¿Porqué los perros pequeños (como los chihuahueños) caminan con zancadas más rápidas que los perros grandes (como los daneses)?

P13.16. ¿En qué punto del movimiento de un péndulo simple es máxima la tensión en el cordón? ¿Y mínima? En cada caso, explique su razonamiento.

P13.17. ¿Un estándar de tiempo podría basarse en el periodo de cierto péndulo estándar? ¿Qué ventajas y desventajas tendría tal estándar con respecto al estándar actual descrito en la sección 1.3?

P13.18. Para un péndulo simple, diferencie claramente entre ω (la velocidad angular) y ω la frecuencia angular). ¿Cuál es constante y cuál es variable?

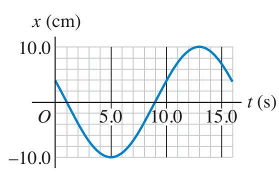
P13.19. Un deslizador está conectado a un resorte ideal fijo y oscila sobre una pista de aire horizontal sin fricción. Se coloca una moneda encima del deslizador y oscila con éste. ¿En qué puntos del movimiento es máxima la fuerza de fricción sobre la moneda? ¿En qué puntos es mínima? Justifique sus respuestas.
P13.20. Al diseñar estructuras en una región de alta sismicidad, ¿qué relación debe haber entre las frecuencias naturales de oscilación de una estructura y las frecuencias típicas de terremoto? ¿Por qué? ¿La estructura debe tener mucho o poco amortiguamiento?

Ejercicios

Sección 13.1 Descripción de la oscilación

13.1. Una cuerda de piano produce una nota la medio vibrando primordialmente a 220 Hz. *a*) Calcule su periodo y frecuencia angular. *b*) Calcule el periodo y la frecuencia angular de una soprano que canta un la una octava más arriba, que tiene el doble de la frecuencia de la cuerda de piano.
13.2. Si un objeto en una superficie horizontal sin fricción se une a un resorte, se desplaza y después se suelta, oscilará. Si se desplaza 0.120 m de su posición de equilibrio y se suelta con rapidez inicial cero, después de 0.800 s su desplazamiento es de 0.120 m en el lado opuesto, habiendo pasado la posición de equilibrio una vez durante este intervalo. Calcule *a*) la amplitud, *b*) el periodo y *c*) la frecuencia.
13.3. La punta de un diapasón efectúa 440 vibraciones completas en 0.500 s. Calcule la frecuencia angular y el periodo del movimiento.
13.4. En la figura 13.30 se muestra el desplazamiento de un objeto oscilante en función del tiempo. Calcule *a*) la frecuencia, *b*) la amplitud, *c*) el periodo y *d*) la frecuencia angular de este movimiento.

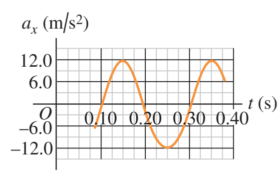
Figura 13.30 Ejercicio 13.4.



Sección 13.2 Movimiento armónico simple

13.5. Una pieza de una máquina está en MAS con frecuencia de 5.00 Hz y amplitud de 1.80 cm. ¿Cuánto tarda la pieza en ir de $x = 0$ a $x = -1.80$ cm?
13.6. En un laboratorio de física, se conecta un deslizador de riel de aire de 0.200 kg al extremo de un resorte ideal de masa despreciable y se pone a oscilar. El tiempo transcurrido entre la primera vez que el deslizador pasa por la posición de equilibrio y la segunda vez que pasa por este punto es de 2.60 s. Determine la constante de fuerza del resorte.
13.7. Un cuerpo de masa desconocida se une a un resorte ideal con constante de fuerza de 120 N/m. Se observa que vibra con una frecuencia de 6.00 Hz. Calcule *a*) el periodo del movimiento; *b*) la frecuencia angular; y *c*) la masa del cuerpo.
13.8. Cuando una masa de 0.750 kg oscila en un resorte ideal, la frecuencia es de 1.33 Hz. *a*) ¿Cuál será la frecuencia si se agregan 0.220 kg a la masa original, y *b*) y si se restan de la masa original? Intente resolver este problema *sin* calcular la constante de fuerza del resorte.
13.9. Un oscilador armónico tiene una masa de 0.500 kg unida a un resorte ideal con constante de fuerza de 140 N/m. Calcule *a*) el periodo, *b*) la frecuencia y *c*) la frecuencia angular de las oscilaciones.
13.10. Tirón. Una cuerda de guitarra vibra con una frecuencia de 440 Hz. Un punto en su centro se mueve en MAS con amplitud de 3.0 mm y ángulo de fase cero. *a*) Escriba una ecuación para la posición del centro de la cuerda en función del tiempo. *b*) ¿Qué magnitud máxima tienen la velocidad y la aceleración del centro de la cuerda? *c*) La derivada de la aceleración con respecto al tiempo es una cantidad llamada *tirón*. Escriba una ecuación para el tirón del centro de la cuerda en función del tiempo, y calcule el valor máximo de la magnitud del tirón.
13.11. Un bloque de 2.00 kg, que se desliza sin fricción, se conecta a un resorte ideal con constante de fuerza de 300 N/m. En $t = 0$, el resorte no está estirado ni comprimido, y el bloque se mueve en la dirección negativa a 12.0 m/s. Calcule *a*) la amplitud y *b*) el ángulo de fase. *c*) Escriba una ecuación para la posición en función del tiempo.
13.12. Repita el ejercicio 13.11, pero suponga que en $t = 0$ el bloque tiene una velocidad de -4.00 m/s y un desplazamiento de $+0.200$ m.
13.13. La punta de la aguja de una máquina de coser se mueve en MAS, sobre el eje x con una frecuencia de 2.5 Hz. En $t = 0$, sus componentes de posición y velocidad son, respectivamente, $+1.1$ cm y -15 cm/s. *a*) Calcule la componente de aceleración de la aguja en $t = 0$. *b*) Escriba ecuaciones para las componentes de posición, velocidad y aceleración de la punta en función del tiempo.
13.14. Un objeto está en MAS con periodo de 1.200 s y una amplitud de 0.600 m. En $t = 0$, el objeto está en $x = 0$. ¿A qué distancia está el objeto de la posición de equilibrio cuando $t = 0.480$ s?
13.15. Peso de los astronautas. Este procedimiento se utiliza realmente para "pesar" a los astronautas en el espacio. Se une una silla de 42.5 kg a un resorte y se le deja oscilar cuando está vacía, la silla tarda 1.30 s en efectuar una vibración completa. En cambio, con un astronauta sentado en ella, sin tocar el piso con sus pies, la silla tarda 2.54 s en completar un ciclo. ¿Cuál debe ser la masa del astronauta?
13.16. Un objeto de 0.400 kg en MAS tiene $a_x = -2.70$ m/s^2 cuando $x = 0.300$ m. ¿Cuánto tarda una oscilación?
13.17. Sobre una pista de aire horizontal sin fricción, un deslizador oscila en el extremo de un resorte ideal, cuya constante de fuerza es 2.50 N/cm. En la figura 13.31 la gráfica muestra la aceleración del deslizador en función del tiempo. Calcule *a*) la masa del deslizador; *b*) el desplazamiento máximo del deslizador desde el punto de equilibrio; *c*) la fuerza máxima que el resorte ejerce sobre el deslizador.

Figura 13.31 Ejercicio 13.17.



13.18. La velocidad de una masa de 0.500 kg en un resorte está dada en función del tiempo por $v_x(t) = (3.60\text{ cm/s})\,\text{sen}[(4.71\text{ s}^{-1})t - \pi/2]$. Calcule *a*) el periodo, *b*) la amplitud, *c*) la aceleración máxima de la masa y *d*) la constante de fuerza del resorte.
13.19. El desplazamiento en función del tiempo de una masa de 1.50 kg en un resorte está dado por la ecuación

$$x(t) = (7.40\text{ cm})\cos[(4.16\text{ s}^{-1})t - 2.42].$$

Calcule *a*) el tiempo que tarda una vibración completa; *b*) la constante de fuerza del resorte; *c*) la rapidez máxima de la masa; *d*) la fuerza máxima que actúa sobre la masa; *e*) la posición, rapidez y aceleración de la masa en $t = 1.00$ s; *f*) y la fuerza que actúa sobre la masa en ese momento.

13.20. Un objeto está en MAS con periodo de 0.300 s y una amplitud de 6.00 cm. En $t = 0$, el objeto está instantáneamente en reposo en $x = 6.00$ cm. Calcule el tiempo que el objeto tarda en ir de $x = 6.00$ cm a $x = -1.50$ cm.

Sección 13.3 Energía en el movimiento armónico simple

13.21. Las puntas de un diapasón rotulado con 392 Hz están vibrando con una amplitud de 0.600 mm. *a*) ¿Qué rapidez máxima tiene una punta? *b*) Una mosca común (*Musca domestica*) con masa de 0.0270 g está sujeta en el extremo de una de las puntas. Al vibrar la punta, ¿qué energía cinética máxima tiene la mosca? Suponga que el efecto de la masa de la mosca sobre la frecuencia de oscilación es despreciable.

13.22. Un oscilador armónico tiene frecuencia angular ω y amplitud A. *a*) Calcule la magnitud del desplazamiento y de la velocidad cuando la energía potencial elástica es igual a la energía cinética. (Suponga que $U = 0$ en el equilibrio.) *b*) ¿Cuántas veces sucede eso en cada ciclo? ¿Cada cuándo sucede? *c*) En un instante en que el desplazamiento es igual a $A/2$, ¿qué fracción de la energía total del sistema es cinética y qué fracción es potencial?

13.23. Un deslizador de 0.500 kg, conectado al extremo de un resorte ideal con constante de fuerza $k = 450$ N/m, está en MAS con una amplitud de 0.040 m. Calcule *a*) la rapidez máxima del deslizador; *b*) su rapidez cuando está en $x = -0.015$ m; *c*) la magnitud de su aceleración máxima; *d*) su aceleración en $x = -0.015$ m; *e*) su energía mecánica total en cualquier punto de su movimiento.

13.24. Una porrista ondea su pompón en MAS con amplitud de 18.0 cm y frecuencia de 0.850 Hz. Calcule *a*) la magnitud máxima de la aceleración y de la velocidad; *b*) la aceleración y rapidez cuando la coordenada del pompón es $x = +9.0$ cm; *c*) el tiempo que tarda en moverse directamente de la posición de equilibrio a un punto situado a 12.0 cm de distancia. *d*) ¿Cuáles de las cantidades pedidas en los incisos *a*), *b*) y *c*) pueden obtenerse empleando el enfoque de energía de la sección 13.3 y cuáles no? Explique su respuesta.

13.25. Para la situación descrita en el inciso *a*) del ejemplo 13.5, ¿qué masa m deberá tener la masilla para que la amplitud después del choque sea la mitad de la amplitud original? Con ese valor de m, ¿qué fracción de la energía mecánica original se convierte en calor?

13.26. Un juguete de 0.150 kg está en MAS en el extremo de un resorte horizontal con constante de fuerza $k = 300$ N/m. Cuando el objeto está a 0.0120 m de su posición de equilibrio, tiene una rapidez de 0.300 m/s. Calcule *a*) la energía total del objeto en cualquier punto de su movimiento; *b*) la amplitud del movimiento; *c*) la rapidez máxima alcanzada por el objeto durante su movimiento.

13.27. Usted observa un objeto que se mueve en MAS. Cuando dicho objeto está desplazado 0.600 m a la derecha de su posición de equilibrio, tiene una velocidad de 2.20 m/s a la derecha y una aceleración de 8.40 m/s^2 a la izquierda. ¿A qué distancia de este punto se desplazará el objeto, antes de detenerse momentáneamente para iniciar su movimiento a la izquierda?

13.28. En una mesa horizontal sin fricción, una caja de 5.20 kg abierta de arriba se sujeta a un resorte ideal, cuya constante de fuerza es de 375 N/m. Dentro de la caja hay una piedra de 3.44 kg. El sistema oscila con una amplitud de 7.50 cm. Cuando la caja ha alcanzado su rapidez máxima, la piedra se sale repentinamente de la caja hacia arriba sin tocar ésta. Calcule *a*) el periodo y *b*) la amplitud del movimiento resultante de la caja. *c*) Sin realizar cálculos, ¿el nuevo periodo es mayor o menor que el periodo original? ¿Cómo lo sabe?

13.29. Dentro de un vehículo de prueba de la NASA, se tira de una esfera de 3.50 kg mediante un resorte ideal horizontal que está unido a una mesa sin fricción. La constante de fuerza del resorte es de 225 N/m. El vehículo tiene una aceleración constante de 5.00 m/s^2, y la esfera no oscila. De repente, cuando la rapidez del vehículo llega a 45.0 m/s, sus motores se apagan, eliminando así su aceleración pero no su velocidad. Calcule *a*) la amplitud y *b*) la frecuencia de las oscilaciones resultantes de la esfera. *c*) ¿Cuál será la rapidez máxima de la esfera en relación con el vehículo?

Sección 13.4 Aplicaciones del movimiento armónico simple

13.30. Un orgulloso pescador de alta mar cuelga un pez de 65.0 kg de un resorte ideal con masa despreciable, estirando el resorte 0.120 m. *a*) Calcule la constante de fuerza del resorte. Ahora se tira del pez 5.00 cm hacia abajo y luego se suelta. *b*) ¿Qué periodo de oscilación tiene el pez? *c*) ¿Qué rapidez máxima alcanzará?

13.31. Un deslizador de 175 g sobre una pista de aire horizontal sin fricción está unido a un resorte ideal fijo, cuya constante de fuerza es de 155 N/m. En el momento en que usted mide el deslizador, éste se mueve a 0.815 m/s y está a 3.00 cm de su posición de equilibrio. Utilice la *conservación de la energía* para calcular *a*) la amplitud del movimiento y *b*) la rapidez máxima del deslizador. *c*) ¿Cuál es la frecuencia angular de las oscilaciones?

13.32. Un gato con masa de 4.00 kg que gusta de las emociones fuertes está unido mediante un arnés a un resorte ideal de masa despreciable y oscila verticalmente en MAS. La amplitud es de 0.050 m y, en el punto más alto del movimiento, el resorte tiene su longitud natural no estirada. Calcule la energía potencial elástica del resorte (suponga que es cero cuando el resorte no está estirado); la energía cinética del gato; la energía potencial gravitacional del sistema relativa al punto más bajo del movimiento; y la suma de estas tres energías cuando el gato está *a*) en su punto más alto, *b*) en su punto más bajo, y *c*) en su posición de equilibrio.

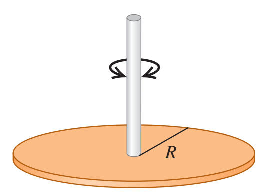
13.33. Una esfera de 1.50 kg y otra de 2.00 kg se pegan entre sí colocando la más ligera debajo de la más pesada. La esfera superior se conecta a un resorte ideal vertical, cuya constante de fuerza es de 165 N/m, y el sistema vibra verticalmente con una amplitud de 15.0 cm. El pegamento que une las esferas es débil y antiguo, y de repente falla cuando las esferas están en la posición más baja de su movimiento. *a*) ¿Por qué es más probable que el pegamento falle en el *punto más bajo*, que en algún otro punto del movimiento? *b*) Calcule la amplitud y la frecuencia de las vibraciones después de que la esfera inferior se despega.

13.34. Un disco uniforme sólido de metal con masa de 6.50 kg y diámetro de 24.0 cm cuelga en un plano horizontal, apoyado en su centro con un alambre metálico vertical. Usted sabe que se requiere una fuerza horizontal de 4.23 N tangente al borde del disco para girarlo 3.34°, y así torcer el alambre. Ahora usted elimina esta fuerza y suelta el disco del reposo. *a*) ¿Cuál es la constante de torsión para el alambre metálico? *b*) ¿Cuáles son la frecuencia y el periodo de las oscilaciones de torsión del disco? *c*) Escriba la ecuación del movimiento para $\theta(t)$ del disco.

13.35. Cierto reloj despertador hace tic cuatro veces cada segundo, y cada tic representa medio periodo. La rueda de balance consiste en un aro delgado con 0.55 cm de radio, conectada al vástago de balance por rayos de masa despreciable. La masa total de la rueda es de 0.90 g. *a*) ¿Qué momento de inercia tiene la rueda con respecto a su eje? *b*) ¿Qué constante de torsión tiene la espiral?

13.36. Un disco metálico delgado con masa de 2.00×10^{-3} kg y radio de 2.20 cm se une en su centro a una fibra larga (figura 13.32). Si se tuerce y suelta, el disco oscila con un periodo de 1.00 s. Calcule la constante de torsión de la fibra.

Figura 13.32 Ejercicio 13.36.



13.37. Imagine que quiere determinar el momento de inercia de una pieza mecánica complicada, con respecto a un eje que pasa por su centro de masa, así que la cuelga de un alambre a lo largo de ese eje. El alambre tiene una constante de torsión de $0.450 \ \mathrm{N \cdot m/rad}$. Usted gira un poco la pieza alrededor del eje y la suelta, cronometrando 125 oscilaciones en 265 s. ¿Cuánto vale el momento de inercia buscado?

13.38. La rueda de balance de un reloj vibra con amplitud angular Θ, frecuencia angular ω y ángulo de fase $\phi = 0$. *a*) Deduzca expresiones para la velocidad angular $d\theta/dt$ y la aceleración angular $d^2\theta/dt^2$ en función del tiempo. *b*) Calcule la velocidad angular y la aceleración angular de la rueda de balance, cuando su desplazamiento angular sea Θ, y cuando su desplazamiento sea $\Theta/2$ y θ esté disminuyendo. (*Sugerencia:* haga una gráfica de θ contra *t*.)

***13.39.** Para la interacción de Van der Waals con la función de energía potencial dada por la ecuación (13.25), demuestre que, cuando la magnitud del desplazamiento x con respecto al equilibrio ($r = R_0$) es pequeña, la energía potencial es aproximadamente $U \approx \frac{1}{2}kx^2 - U_0$. [*Sugerencia:* en la ecuación (13.25), sea $r = R_0 + x$ y $u = x/R_0$. Luego, aproxime $(1 + u)^n$ con los primeros *tres* términos de la ecuación (13.28).] Compare k de esta ecuación con la constante de fuerza de la ecuación (13.29) para la fuerza.

***13.40.** Cuando los dos átomos de hidrógeno de una molécula de H_2 se desplazan del equilibrio, una fuerza de restitución $F_x = -kx$, con $k = 580$ N/m, actúa sobre ellos. Calcule la frecuencia de oscilación de la molécula de H_2. (*Sugerencia:* la masa de un átomo de hidrógeno es 1.008 unidades de masa atómica, es decir, 1 u; vea el Apéndice E. Como en el ejemplo 13.7 de la sección 13.4, use $m/2$ en vez de m en la expresión para f.)

Sección 13.5 El péndulo simple

13.41. Se tira de un péndulo simple de 0.240 m de longitud para moverlo 3.50° a un lado y luego se suelta. *a*) ¿Cuánto tarda la lenteja del péndulo en alcanzar su rapidez máxima? *b*) ¿Cuánto tarda si el ángulo es de 1.75° en vez de 3.50°?

13.42. Un alpinista de 85.0 kg planea balancearse, partiendo del reposo, desde una saliente utilizando una cuerda ligera de 6.50 m de largo. Sujeta un extremo de la cuerda, en tanto que el otro extremo está unido más arriba a la cara de una roca. Como la saliente no está muy lejos de la cara de la roca, la cuerda forma un ángulo pequeño con la vertical. En su punto más bajo de su balanceo, planea soltarse y dejarse caer una distancia corta hacia el suelo. *a*) ¿Cuánto tiempo después de que empieza a balancearse el alpinista alcanzará su punto de oscilación más alto? *b*) Si falla en la primera oportunidad de soltarse, ¿cuánto tiempo después de iniciar su balanceo, el alpinista llegará a su punto más bajo por segunda vez?

13.43. En San Francisco un edificio tiene aditamentos ligeros que consisten en bombillas pequeñas de 2.35 kg con pantallas, que cuelgan del techo en el extremo de cordones ligeros y delgados de 1.50 de longitud. Si ocurre un terremoto leve, ¿cuántas oscilaciones por segundo harán tales aditamentos?

13.44. Un péndulo en Marte. En la Tierra cierto péndulo simple tiene un periodo de 1.60 s. ¿Qué periodo tendrá en Marte, donde $g = 3.71 \ \mathrm{m/s^2}$?

13.45. Una manzana pesa 1.00 N. Si la colgamos del extremo de un resorte largo con constante de fuerza de 1.50 N/m y masa despreciable, rebota verticalmente en MAS. Si detenemos el rebote y dejamos que la manzana oscile de lado a lado con un ángulo pequeño, la frecuencia de este péndulo simple es la mitad de la del rebote. (Puesto que el ángulo es pequeño, las oscilaciones de lado a lado no alteran apreciablemente la longitud del resorte.) ¿Qué longitud tiene el resorte no estirado (sin la manzana)?

13.46. Una esfera pequeña de masa m está unida a una varilla sin masa de longitud L con un pivote en el extremo de arriba, formando un péndulo simple. Se tira del péndulo hacia un lado, hasta que la varilla forma un ángulo Θ con la vertical y se suelta del reposo. *a*) Dibuje un diagrama del péndulo justo después de soltarse; incluya vectores que representen las *fuerzas* que actúan sobre la esfera pequeña y la *aceleración* de la esfera. ¡La exactitud es importante! En este punto, ¿qué aceleración lineal tiene la esfera? *b*) Repita el inciso *a*) para el instante en que el ángulo de la varilla con la vertical es $\Theta/2$. *c*) Repita el inciso *a*) para el instante en que la varilla del péndulo está vertical. En ese punto, ¿qué rapidez lineal tiene la esfera?

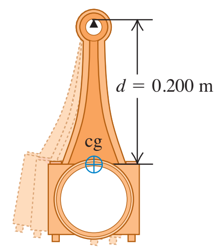
13.47. Después de posarse en un planeta desconocido, una exploradora espacial construye un péndulo simple con longitud de 50.0 cm y determina que efectúa 100 oscilaciones completas en 136 s. ¿Cuánto vale g en ese planeta?

13.48. Un péndulo simple de 2.00 m de largo oscila con un ángulo máximo de 30.0° con la vertical. Obtenga su periodo, *a*) suponiendo una amplitud pequeña, y *b*) utilizando los primeros tres términos de la ecuación (13.35). *c*) ¿Cuál de las respuestas a los incisos *a*) y *b*) es más precisa? Para la que es menos precisa, de qué porcentaje es el error con respecto a la más precisa?

Sección 13.6 El péndulo físico

13.49. Una biela de 1.80 kg de un motor de combustión pivota alrededor de un filo de navaja horizontal como se muestra en la figura 13.33. El centro de gravedad de la biela se encontró por balanceo y está a 0.200 m del pivote. Cuando la biela se pone a oscilar con amplitud corta, completa 100 oscilaciones en 120 s. Calcule el momento de inercia de la biela respecto al eje de rotación en el pivote.

Figura 13.33 Ejercicio 13.49.



13.50. Queremos colgar un aro delgado de un clavo horizontal y hacer que tenga una oscilación completa con ángulo pequeño una vez cada 2.0 s. ¿Qué radio debe tener el aro?

13.51. Demuestre que la expresión para el periodo de un péndulo físico se reduce a la del péndulo simple, si el péndulo físico consiste en una partícula de masa m en el extremo de un cordón sin masa de longitud L.

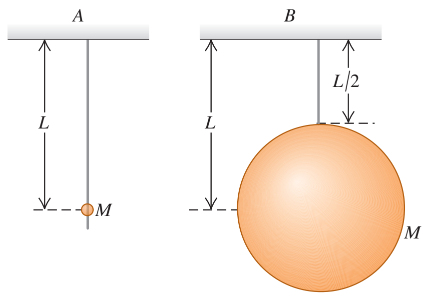
13.52. Una llave inglesa de 1.80 kg tiene su pivote a 0.250 m de su centro de masa y puede oscilar como péndulo físico. El periodo para oscilaciones de ángulo pequeño es de 0.940 s. *a*) ¿Qué momento de inercia tiene la llave con respecto a un eje que pasa por el pivote? *b*) Si la llave inicialmente se desplaza 0.400 rad de la posición de equilibrio, ¿qué rapidez angular tiene al pasar por dicha posición?

13.53. Dos péndulos tienen las mismas dimensiones (longitud L) y masa total (m). El péndulo A es una esfera muy pequeña que oscila en el extremo de una varilla uniforme sin masa. En el péndulo B, la mitad de la masa está en la esfera y la otra mitad en la varilla uniforme. Calcule el periodo de cada péndulo para oscilaciones pequeñas. ¿Cuál tarda más tiempo en una oscilación?

13.54. Un adorno navideño con forma de esfera hueca de masa $M = 0.015$ kg y radio $R = 0.050$ m se cuelga de una rama con un lazo de alambre unido a la superficie de la esfera. Si el adorno se desplaza una distancia corta y se suelta, oscila como péndulo físico con fricción despreciable. Calcule su periodo. (*Sugerencia:* use el teorema de los ejes paralelos para determinar momento de inercia de la esfera con respecto al pivote en la rama.)

13.55. Cada uno de los dos péndulos que se muestran en la figura 13.34 consiste en una esfera sólida uniforme de masa M sostenida por un cordón sin masa; no obstante, la esfera del péndulo A es muy pequeña, en tanto que la esfera del péndulo B es mucho más grande. Obtenga el periodo de cada péndulo para desplazamientos cortos. ¿Qué esfera tarda más en completar una oscilación?

Figura 13.34 Ejercicio 13.55.



Sección 13.7 Oscilaciones amortiguadas

13.56. Una masa de 2.20 kg oscila sobre un resorte cuya constante de fuerza y periodo son de 250.0 N/m y 0.615 s, respectivamente. *a*) ¿Se trata de un sistema amortiguado o no? ¿Cómo lo sabe? Si es amortiguado, calcule la constante de amortiguamiento b. *b*) ¿El sistema es no amortiguado, subamortiguado, críticamente amortiguado o sobreamortiguado? ¿Cómo lo sabe?

13.57. Un ratón de 0.300 kg, nada contento, se mueve en el extremo de un resorte con constante de fuerza $k = 2.50$ N/m, sometido a la acción de una fuerza amortiguadora $F_x = -bv_x$. *a*) Si la constante $b = 0.900$ kg/s, ¿qué frecuencia de oscilación tiene el ratón? *b*) ¿Con qué valor de b el amortiguamiento será crítico?

13.58. Un huevo duro (cocido) de 50.0 g se mueve en el extremo de un resorte cuya constante de fuerza es $k = 25.0$ N/m. Su desplazamiento inicial es de 0.300 m. Una fuerza amortiguadora $F_x = -bv_x$ actúa sobre el huevo, y la amplitud del movimiento disminuye a 0.100 m en 5.00 s. Calcule la constante de amortiguamiento b.

13.59. El movimiento de un oscilador subamortiguado está descrito por la ecuación (13.42). Sea el ángulo de fase $\phi = 0$. *a*) Según la ecuación, ¿cuánto vale x en $t = 0$? *b*) ¿Qué magnitud y dirección tiene la velocidad en $t = 0$? ¿Qué nos dice el resultado acerca de la pendiente de la curva de x contra t cerca de $t = 0$? *c*) Deduzca una expresión para la aceleración a_x en $t = 0$. ¿Para qué valor o intervalo de valores de la constante de amortiguamiento b (en términos de k y m) en $t = 0$, la aceleración es negativa, cero o positiva? Comente cada caso en términos de la forma de la curva de x contra t cerca de $t = 0$.

Sección 13.8 Oscilaciones forzadas y resonancia

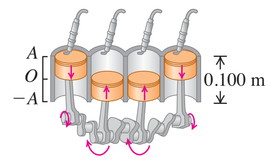
13.60. Una fuerza impulsora que varía senoidalmente se aplica a un oscilador armónico amortiguado con constante de fuerza k y masa m. Si la constante de amortiguamiento tiene el valor b_1, la amplitud es A_1 cuando la frecuencia angular impulsora es $\sqrt{k/m}$. En términos de A_1, ¿cuánto vale la amplitud con la misma frecuencia impulsora y la misma amplitud de la fuerza impulsora $F_{máx}$ si la constante de amortiguamiento es *a*) $3b_1$ y *b*) $b_1/2$?

13.61. Una fuerza impulsora que varía senoidalmente se aplica a un oscilador armónico amortiguado. *a*) ¿Qué unidades tiene la constante de amortiguamiento b? *b*) Demuestre que la cantidad $\sqrt{km}$ tiene las mismas unidades que b. *c*) Determine, en términos de $F_{máx}$ y k, la amplitud de $\omega_d = \sqrt{k/m}$ cuando i) $b = 0.2\sqrt{km}$ y ii) $b = 0.4\sqrt{km}$? Compare sus resultados con la figura 13.28.

13.62. Un paquete experimental y su estructura de soporte que se colocarán a bordo de la Estación Espacial Internacional actúan como sistema de resorte-masa subamortiguado con constante de fuerza de 2.1×10^6 N/m y masa de 108 kg. Un requisito de la NASA es que no haya resonancia para oscilaciones forzadas en ninguna frecuencia menor que 35 Hz. ¿Satisface el paquete tal requisito?

Problemas

Figura 13.35 Problema 13.63.



13.63. MAS en un motor de combustión. El movimiento del pistón de un motor de automóvil (figura 13.35) es aproximadamente armónico simple. *a*) Si la carrera del pistón (el doble de la amplitud) es de 0.100 m y el motor trabaja a 3500 rev/min, ¿qué aceleración tiene el pistón en el extremo de su carrera? *b*) Si el pistón tiene una masa de 0.450 kg, ¿qué fuerza neta debe ejercerse sobre él en ese punto? *c*) ¿Qué rapidez y energía cinética tiene el pistón en el punto medio de su carrera? *d*) ¿Qué potencia media se requiere para acelerar el pistón desde el reposo, hasta la rapidez determinada en el inciso *c*)? *d*) Repita los incisos *b*), *c*) y *d*) con el motor trabajando a 7000 rev/min.

13.64. Cuatro pasajeros cuya masa combinada es de 250 kg comprimen 4.00 cm los resortes de un automóvil con amortiguadores vencidos cuando se suben en él. Modele el auto y los pasajeros como un solo cuerpo sobre un solo resorte ideal. Si el automóvil cargado tiene un periodo de vibración de 1.08 s, ¿qué periodo tiene cuando está vacío?

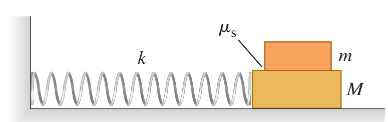
13.65. Un deslizador oscila con MAS y amplitud A_1 en un riel de aire. Usted lo frena hasta reducir la amplitud a la mitad. ¿Qué pasa con sus *a*) periodo, frecuencia y frecuencia angular? *b*) ¿Con su energía mecánica total? *c*) ¿Con su rapidez máxima? *d*) ¿Con su rapidez en $x = \pm A_1/4$? *e*) ¿Y con sus energías cinética y potencial en $x = \pm A_1/4$?

13.66. Un niño malcriado está deslizando su plato de 250 g de un lado a otro, sobre una superficie horizontal en MAS con amplitud de 0.100 m. En un punto a 0.060 m de la posición de equilibrio, la rapidez del plato es de 0.300 m/s. *a*) Calcule el periodo. *b*) Encuentre el desplazamiento cuando la rapidez es de 0.160 m/s. *c*) En el centro del plato hay una rebanada de zanahoria de 10.0 g, que está a punto de resbalar en el extremo de la trayectoria. Calcule el coeficiente de fricción estática entre la rebanada de zanahoria y el plato.

13.67. Una charola (bandeja) horizontal uniforme de 1.50 kg está unida a un resorte ideal vertical con constante de fuerza de 185 N/m y una esfera metálica de 275 g está en la charola. El resorte está debajo de la charola, así que puede oscilar verticalmente. La charola se presiona hacia abajo 15.0 cm por debajo de su posición de equilibrio (llamamos a esto punto A) y se suelta del reposo. *a*) ¿Qué tan alto por encima del punto A estará la charola cuando la esfera metálica salga de la charola? (*Sugerencia:* esto *no* ocurre cuando la esfera y la charola llegan a sus rapideces máximas.) *b*) ¿Cuánto tiempo transcurre desde que el sistema se libera en el punto A y la esfera sale de la charola? *c*) ¿Qué tan rápido se mueve la esfera justo cuando sale de la charola?

13.68. Un bloque de masa M descansa en una superficie sin fricción y está conectado a un resorte horizontal con constante de fuerza k. El otro extremo del resorte está fijo a una pared (figura 13.36). Un segundo bloque de masa m está sobre el primero. El coeficiente de fricción

Figura 13.36 Problema 13.68.



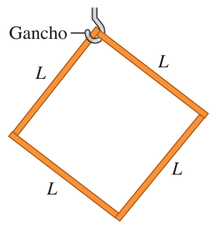
estática entre los bloques es μ_s. Determine la amplitud de oscilación *máxima* que no permite que el bloque superior resbale.

13.69. Una masa de 10.0 kg viaja hacia la derecha con rapidez de 2.00 m/s sobre una superficie horizontal lisa y choca contra una segunda masa de 10.0 kg que inicialmente está en reposo pero unida a un resorte ligero con constante de fuerza de 80.0 N/m. *a*) Calcule la frecuencia, la amplitud y el periodo de las oscilaciones subsecuentes. *b*) ¿Cuánto tiempo tarda el sistema en regresar por primera vez a la posición inmediatamente después del choque?

13.70. Un cohete acelera hacia arriba a 4.00 m/s^2 desde la plataforma de lanzamiento en la Tierra. En su interior, una esfera pequeña de 1.50 kg cuelga del techo mediante un alambre ligero de 1.10 m. Si la esfera se desplaza 8.50° de la vertical y se suelta, encuentre la amplitud y el periodo de las oscilaciones resultantes de este péndulo.

13.71. Un objeto cuadrado de masa m se construye con cuatro varas uniformes idénticas, cada una con longitud L, unidas entre sí. Este objeto se cuelga de su esquina superior en un gancho (figura 13.37). Si se gira ligeramente a la izquierda y luego se suelta, ¿con qué frecuencia oscilará de un lado a otro?

Figura 13.37 Problema 13.71.



13.72. Una fuerza elástica de restitución con constante de fuerza de 10.0 N/m actúa sobre un objeto con masa de 0.200 kg. *a*) Grafique la energía potencial elástica U en función del desplazamiento x dentro de un intervalo de x desde -0.300 m hasta $+0.300$ m. En su gráfica use la escala 1 cm = 0.05 J verticalmente y 1 cm = 0.05 m horizontalmente. El objeto se pone a oscilar con una energía potencial inicial de 0.140 J y una energía cinética inicial de 0.060 J. Conteste las preguntas que siguen consultando la gráfica. *b*) ¿Qué amplitud tiene la oscilación? *c*) ¿Cuánto vale la energía potencial cuando el desplazamiento es de la mitad de la amplitud? *d*) ¿Con qué desplazamiento son iguales las energías cinética y potencial? *e*) ¿Cuánto vale el ángulo de fase ϕ si la velocidad inicial es positiva y el desplazamiento inicial es negativo?

13.73. Una cubeta de 2.00 kg que contiene 10.0 kg de agua cuelga de un resorte ideal vertical, cuya constante de fuerza es de 125 N/m, y oscila verticalmente con una amplitud de 3.00 cm . De repente, la cubeta dimana una fuga en la base, goteando agua a una tasa constante de 2.00 g/s. Cuando la cubeta se vacía y queda a la mitad de su capacidad, calcule *a*) el periodo de oscilación y *b*) la tasa con la que el periodo cambia con respecto al tiempo. ¿El periodo se vuelve más largo o más corto? *c*) ¿Cuál es el sistema de oscilación más corto que este sistema puede tener?

13.74. Un alambre colgante tiene 1.80 m de longitud. Cuando una bola de acero de 60.0 kg se suspende del alambre, éste se estira 2.00 mm. Si se tira de la bola hacia abajo una distancia pequeña adicional y se le suelta, ¿con qué frecuencia vibrará? Suponga que el esfuerzo aplicado al alambre es menor que el límite proporcional (véase la sección 11.5).

13.75. Una perdiz de 5.00 kg cuelga de un peral mediante un resorte ideal con masa despreciable. Si se tira de la perdiz para bajarla 0.100 m con respecto a su posición de equilibrio y se suelta, vibra con un periodo de 4.20 s. *a*) ¿Qué rapidez tiene al pasar por su posición de equilibrio? *b*) ¿Qué aceleración tiene cuando está 0.050 m arriba de dicha posición? *c*) Cuando está subiendo, ¿qué tiempo tarda en moverse de un punto 0.050 m debajo de su posición de equilibrio a un punto que está 0.050 m arriba? *d*) La perdiz se detiene y se retira del resorte. ¿Cuánto se acorta éste?

13.76. Un perno de 0.0200 kg se mueve en MAS con amplitud de 0.240 m y periodo de 1.500 s. El desplazamiento del perno es de $+0.240$ m cuando $t = 0$. Calcule *a*) el desplazamiento del perno cuando $t = 0.500$ s; *b*) la magnitud y dirección de la fuerza que actúa sobre el perno en $t = 0.500$ s; *c*) el tiempo mínimo que el perno tarda en moverse de su posición inicial al punto donde $x = -0.180$ m; *d*) la rapidez del perno cuando $x = -0.180$ m.

13.77. MAS de una balanza de carnicero. Un resorte con masa despreciable y constante de fuerza $k = 400$ N/m cuelga verticalmente, y una bandeja de 0.200 kg se suspende de su extremo inferior. Un carnicero deja caer un filete de 2.2 kg sobre la bandeja desde una altura de 0.40 m. El choque es totalmente inelástico y el sistema queda en MAS vertical. Calcule *a*) la rapidez de la bandeja y el filete justo después del choque; *b*) la amplitud del movimiento subsecuente; *c*) el periodo de ese movimiento.

13.78. Una viga uniforme de 225 kg se suspende horizontalmente de dos resortes verticales idénticos que sujetan cada extremo de la viga con el techo. Un saco de 175 kg de grava se coloca sobre el punto medio de la viga. Ésta oscila en MAS con amplitud de 40.0 cm y frecuencia de 0.600 ciclos/s. *a*) El saco de grava se cae de la viga cuando ésta tiene su desplazamiento máximo hacia arriba. Calcule la frecuencia y amplitud del MAS subsecuente de la viga. *b*) Suponga ahora que el saco de grava se cae cuando la viga tiene su rapidez máxima. Calcule la frecuencia y amplitud del MAS subsecuente de la viga.

13.79. En el planeta Newtonia, un péndulo simple tiene una lenteja con masa de 1.25 kg y longitud de 185.0 cm cuando se suelta del reposo, tarda 1.42 s en describir un ángulo de 12.5° hasta un punto donde otra vez tiene rapidez cero. Se determinó que la circunferencia de Newtonia es de 51,400 km. Calcule la masa del planeta.

13.80. Una fuerza de 40.0 N estira un resorte vertical 0.250 m. *a*) ¿Qué masa debe colgarse del resorte para que el sistema oscile con un periodo de 1.00 s? *b*) Si la amplitud del movimiento es de 0.050 m y el periodo es el especificado en *a*), ¿dónde está el objeto y en qué dirección se mueve 0.35 s después de haber pasado hacia abajo la posición de equilibrio? *c*) ¿Qué fuerza (magnitud y dirección) ejerce el resorte sobre el objeto cuando éste está 0.030 m bajo la posición de equilibrio al subir?

13.81. Que no la deje el barco. En una visita a Minnesota (la "tierra de los 10,000 lagos"), una turista se inscribe en una excursión por uno de los lagos más grandes. Cuando llega al muelle donde está atracado el barco de 1,500 kg, ve que la embarcación oscila verticalmente sobre las olas, en movimiento armónico simple con amplitud de 20 cm. El barco tarda 3.5 s en efectuar un ciclo completo de subida-bajada. Cuando está en su punto más alto, la cubierta está a la misma altura que el muelle estacionario. Al ver cómo se mece el barco, la turista (masa 60 kg) comienza a sentirse mareada (debido en parte a que la noche anterior cenó bacalao noruego), por lo que se niega a subir a bordo, a menos que la cubierta esté a menos de 10 cm del nivel del muelle. ¿De cuánto tiempo dispone para abordar el barco cómodamente durante cada ciclo de movimiento vertical?

13.82. Un ejemplo interesante pero muy poco práctico de oscilación es el movimiento de un objeto que se deja caer por un agujero que va de un lado de la Tierra a otro pasando por el centro. Suponiendo (lo cual no es realista) que la Tierra es una esfera con densidad uniforme, demuestre que el movimiento es armónico simple y calcule el periodo. [*Nota:* la fuerza gravitacional sobre el objeto en función de la distancia r del objeto al centro de la Tierra se dedujo en el ejemplo 12.10 (sección 12.6). El movimiento es MAS si la aceleración a_x y el desplazamiento con respecto al equilibrio x están relacionados por la ecuación (13.8), y el periodo es entonces $T = 2\pi/\omega$.]

13.83. Dos masas puntuales m se sostienen separadas una distancia d. Otra masa puntual M está a la mitad entre ellas. Después, M se desplaza una distancia pequeña x perpendicular a la línea que conecta las dos masas fijas y se libera. *a*) Demuestre que la magnitud de la fuerza de gravedad neta sobre M debida a las masas fijas está dada aproximadamente por $F_{\text{net}} = \dfrac{16\,GmMx}{d^3}$ si $x \ll d$. ¿Cuál es la dirección de esta fuerza? ¿Se trata de una fuerza de restitución? *b*) Demuestre que la masa M oscilará con una frecuencia angular de $(4/d)\sqrt{Gm/d}$ y un periodo $\pi d/2\sqrt{d/Gm}$. *c*) ¿Cuál sería el periodo si $m = 100$ kg y $d = 25.0$ cm? ¿Parece que este periodo se podría medir con facilidad? ¿Qué hace que este experimento sea difícil de realizar en un laboratorio de física común? *d*) ¿M oscilará si se desplaza una distancia pequeña x desde el centro hasta cualquiera de las otras masas fijas? ¿Por qué?

13.84. Para cierto oscilador, la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo de masa m está dada por $F_x = -cx^3$. *a*) ¿Qué función de energía potencial describe este oscilador, si tomamos $U = 0$ en $x = 0$? *b*) El cuerpo se mueve de $x = 0$ a $x = A$ en un cuarto de periodo. Calcule este tiempo y de ahí el periodo. [*Sugerencia:* empiece en la ecuación (13.20), modificada para incluir la función de energía potencial que obtuvo en el inciso *a*), y despeje la velocidad v_x en función de x. Luego, sustituya v_x por dx/dt y separe la variable escribiendo todos los factores que contienen x de un lado y los que contienen t del otro, de manera que pueda integrarse cada lado. En la integral de x, haga el cambio de variables $u = x/A$. La integral resultante puede evaluarse usando métodos numéricos en una computadora y tiene el valor $\int_0^1 du/\sqrt{1-u^4} = 1.31$.] *c*) Según el resultado obtenido en el inciso *b*), ¿el periodo depende de la amplitud A del movimiento? ¿Las oscilaciones son armónicas simples?

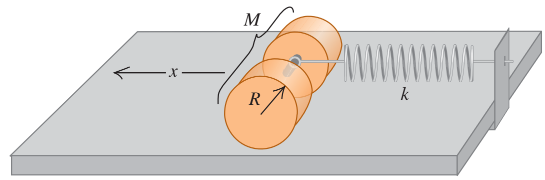
13.85. Considere el círculo de referencia de la figura 13.6. La componente x de la velocidad de Q es la velocidad de P. Calcule esta componente y muestre que la velocidad de P está dada por la ecuación (13.15).

***13.86. Molécula diatómica.** Dos átomos idénticos de una molécula diatómica vibran como osciladores armónicos; no obstante, su centro de masa, que está a la mitad del camino, no se mueve. *a*) Demuestre que, en cualquier instante, los momentos lineales de los átomos con respecto al centro de masa son $\vec{p}$ y $-\vec{p}$. *b*) Demuestre que la energía cinética total K de los dos átomos en cualquier instante es la misma que tiene un solo objeto de masa $m/2$ con momento lineal de magnitud p. (Use $K = p^2/2m$.) Este resultado muestra por qué debe usarse $m/2$ en la expresión para f del ejemplo 13.7 (sección 13.4). *c*) Si los átomos no son idénticos, y tienen masas m_1 y m_2, demuestre que aún se cumple el resultado del inciso *a*), y que la masa del objeto único del inciso *b*) es $m_1m_2/(m_1 + m_2)$. La cantidad $m_1m_2/(m_1 + m_2)$ se denomina *masa reducida* del sistema.

***13.87.** Una aproximación de la energía potencial de una molécula de KCl es $U = A[(R_0^7/8r^8) - 1/r]$, donde $R_0 = 2.67 \times 10^{-10}$ m y $A = 2.31 \times 10^{-28}$ J · m. Use esto para *a*) demostrar que la componente radial de la fuerza sobre cada átomo es $F_r = A[(R_0^7/r^9) - 1/r^2]$ y *b*) demostrar que R_0 es la separación de equilibrio. *c*) Calcule la energía potencial máxima. *d*) Use $r = R_0 + x$ y los primeros dos términos del teorema binomial (ecuación 13.28) para demostrar que $F_r \approx -(7A/R_0^3)x$, de modo que la constante de fuerza de la molécula sea $k = 7A/R_0^3$. *e*) Si los átomos de K y Cl vibran en direcciones opuestas en lados opuestos del centro de masa de la molécula, $m_1m_2/(m_1 + m_2) = 3.06 \times 10^{-26}$ kg es la masa que debe usarse para calcular la frecuencia (véase el problema 13.86). Calcule la frecuencia de las vibraciones de amplitud pequeña.

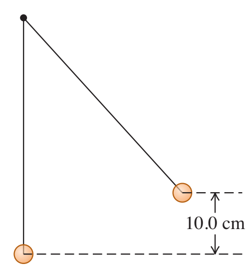
13.88. Dos cilindros sólidos conectados a lo largo de su eje común por una varilla corta y ligera tienen radio R y masa total M, y descansan sobre una mesa horizontal. Un resorte con constante de fuerza k tiene un extremo sujeto a un soporte fijo, y el otro, a un anillo sin fricción en el centro de masa de los cilindros (figura 13.38). Se tira de los cilindros hacia la izquierda una distancia x, estirando el resorte, y se sueltan. Hay suficiente fricción entre la mesa y los cilindros para que éstos rueden sin resbalar al oscilar horizontalmente. Demuestre que el movimiento del centro de masa de los cilindros es armónico simple, y calcule su periodo en términos de M y k. [*Sugerencia:* el movimiento es armónico simple si a_x y x están relacionados por la ecuación (13.8) y por lo tanto, el periodo es $T = 2\pi/\omega$. Aplique $\sum\tau_z = I_{\text{cm}}\alpha_z$ y $\sum F_x = Ma_{\text{cm-}x}$ a los cilindros con la finalidad de relacionar $a_{\text{cm-}x}$ con el desplazamiento x de los cilindros con respecto a su posición de equilibrio.]

Figura 13.38 Problema 13.88.



13.89. En la figura 13.39, la esfera superior se suelta del reposo, choca contra la esfera inferior estacionaria y se pega a ella. Ambos cordones tienen 50.0 cm de longitud. La esfera superior tiene masa de 2.00 kg y está inicialmente 10.0 cm más alta que la inferior, cuya masa es de 3.00 kg. Calcule la frecuencia y el desplazamiento angular máximo del movimiento después del choque.

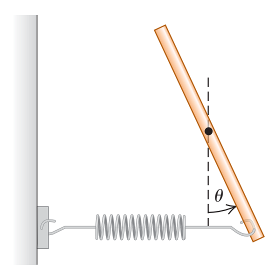
Figura 13.39 Problema 13.89.



13.90. *T. rex.* Modele la pierna del *T. rex* del ejemplo 13.10 (sección 13.6) como dos varillas uniformes con longitud de 1.55 m cada una y unidas rígidamente por un extremo. La varilla inferior tiene masa M, y la superior, $2M$. El objeto compuesto pivota en torno a la parte superior de la varilla de arriba. Calcule el periodo de oscilación de este objeto para oscilaciones de amplitud pequeña. Compare su resultado con el del ejemplo 13.10.

13.91. Una varilla metálica delgada y uniforme con masa M pivota sin fricción sobre un eje que pasa por su punto medio y es perpendicular a la varilla. Un resorte horizontal con constante de fuerza k se conecta al extremo inferior de la varilla, y el otro extremo del resorte se fija a un soporte rígido. La varilla se desplaza un ángulo pequeño Θ con respecto a la vertical (figura 13.40) y se suelta. Demuestre que se mueve en MAS angular y calcule su periodo. (*Sugerencia:* suponga que Θ es suficientemente pequeño para que las aproximaciones sen $\Theta \approx \Theta$ y cos $\Theta \approx 1$ sean válidas. El movimiento es armónico simple si $d^2\theta/dt^2 = -\omega^2\theta$, y el periodo es entonces $T = 2\pi/\omega$.)

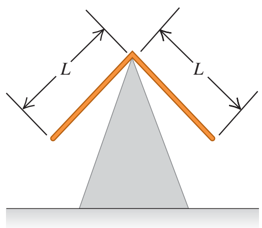
Figura 13.40 Problema 13.91.



13.92. El problema de la campana que suena en silencio. Una campana grande de 34.0 kg cuelga de una viga de madera, de modo que puede oscilar con fricción despreciable. Su centro de masa está 0.60 m bajo el pivote, y su momento de inercia con respecto a un eje en el pivote es de 18.0 kg · m^2. El badajo es una masa de 1.8 kg que cuelga del extremo de una varilla delgada de longitud L y masa despreciable. El otro extremo de la varilla está sujeto al interior de la campana, de modo que puede oscilar libremente sobre el mismo eje de la campana. ¿Qué longitud L debe tener la varilla para que la campana suene en silencio, es decir, para que el periodo de oscilación de la campana sea igual a la del badajo?

13.93. Dos varillas delgadas idénticas, cada una con masa m y longitud L, se unen en ángulo recto para formar un objeto en forma de L, el cual se balancea sobre la cúspide de un triángulo agudo (figura 13.41). Si el objeto en forma de L se desvía un poco, oscila. Calcule la frecuencia de oscilación.

Figura 13.41 Problema 13.93.



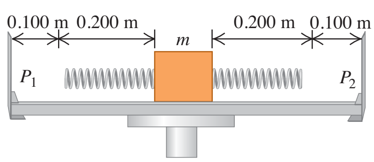
13.94. Se desea construir un péndulo con un periodo de 4.00 s en un lugar donde $g = 9.80 \text{ m/s}^2$. *a*) ¿Qué longitud tiene un péndulo *simple* con este periodo? *b*) Suponga que el péndulo debe montarse en una caja que no puede tener más de 0.50 m de altura. ¿Puede inventar un péndulo con un periodo de 4.00 s que cumpla este requisito?

13.95. Una varilla uniforme de longitud L oscila con ángulo pequeño alrededor de un punto a una distancia x de su centro. *a*) Demuestre que su frecuencia angular es $\sqrt{gx/[(L^2/12) + x^2]}$. *b*) Demuestre que su frecuencia angular máxima se da cuando $x = L/\sqrt{12}$. *c*) ¿Qué longitud tiene la varilla si la frecuencia angular máxima es $2/\pi$ rad/s?

Problemas de desafío

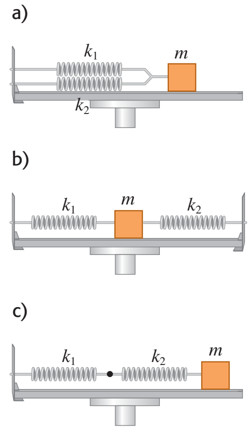
13.96. Dos resortes, ambos con longitud no estirada de 0.200 m, pero con diferentes constantes de fuerza k_1 y k_2, están unidos a extremos opuestos de un bloque de masa m en una superficie plana sin fricción. Ahora los extremos exteriores de los resortes se unen a dos agujas P_1 y P_2 que están a 0.100 m de las posiciones originales de los extremos de los resortes (figura 13.42). Sea $k_1 = 2.00$ N/m, $k_2 = 6.00$ N/m y $m = 0.100$ kg. *a*) Calcule la longitud de cada resorte cuando el bloque está en su nueva posición de equilibrio, después de que los resortes se fijan a las agujas. *b*) Calcule el periodo de vibración del bloque, si se desplaza un poco de su nueva posición de equilibrio y se suelta.

Figura 13.42 Problema de desafío 13.96.



13.97. Constante de fuerza efectiva de dos resortes. Dos resortes con la misma longitud no estirada, pero diferentes constantes de fuerza k_1 y k_2, se unen a un bloque de masa m en una superficie plana sin fricción. Calcule la constante de fuerza efectiva k_{efe} en cada uno de los tres casos: *a*), *b*) y *c*) de la figura 13.43. (La constante de fuerza efectiva está definida por $\sum F_x = -k_{efe}x$.) *d*) Un objeto de masa m, suspendido de un resorte uniforme con constante de fuerza k, vibra con una frecuencia f_1. Si el resorte se parte a la mitad y el mismo objeto se cuelga de una de las mitades, la frecuencia es f_2. Determine la relación f_2/f_1.

Figura 13.43 Problema de desafío 13.97.



13.98. *a*) Determine el cambio ΔT del periodo de un péndulo simple cuando la aceleración debida a la gravedad cambia en Δg. (*Sugerencia:* el nuevo periodo $T + \Delta T$ se obtiene sustituyendo $g + \Delta g$ por g:

$$T + \Delta T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g + \Delta g}}$$

Para obtener una expresión aproximada, expanda el factor $(g + \Delta g)^{-1/2}$ usando el teorema binomial (Apéndice B) y conservando sólo los primeros dos términos:

$$(g + \Delta g)^{-1/2} = g^{-1/2} - \frac{1}{2}g^{-3/2}\Delta g + \cdots$$

Los demás términos contienen potencias mayores de Δg y son muy pequeños si Δg es pequeño.) Exprese su resultado como el cambio *fraccionario* del periodo $\Delta T/T$, en términos del cambio fraccionario $\Delta g/g$. *b*) Un reloj de péndulo da la hora correcta en un punto donde $g = 9.8000 \text{ m/s}^2$, pero se atrasa 4.0 s cada día a una altura mayor. Use el resultado del inciso *a*) para calcular el valor aproximado de g en este nuevo lugar.

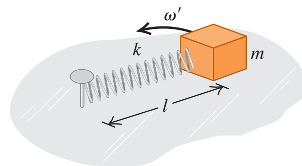
13.99. Resorte con masa. En todos los problemas anteriores del capítulo, hemos supuesto que los resortes tienen masa despreciable aunque, desde luego, ningún resorte carece por completo de masa. Para determinar el efecto de la masa de un resorte, considere un resorte de masa M, con longitud de equilibrio L_0 y constante de fuerza k. Si el resorte se estira o comprime a una longitud L, la energía potencial es $\frac{1}{2}kx^2$, donde $x = L - L_0$. *a*) Considere un resorte como éste con un extremo fijo y el otro en movimiento con rapidez v. Suponga que la rapidez de los puntos a lo largo del resorte varía linealmente con la distancia l al extremo fijo, y que la masa M del resorte está distribuida uniformemente a todo lo largo del resorte. Calcule la energía cinética del resorte en términos de M y v. (*Sugerencia:* divida el resorte en partes de longitud dl; determine la rapidez de cada parte en términos de l, v y L; determine la masa de cada parte en términos de dl, M y L; e integre de 0 a L. El resultado *no* es $\frac{1}{2}Mv^2$, ya que no todo el resorte se mueve con la misma rapidez.) *b*) Obtenga la derivada de la ecuación de conservación de la energía (ecuación 13.21) con respecto al tiempo, para una masa m que se mueve en el extremo de un resorte *sin masa*. Comparando sus resultados con la ecuación (13.8), que define ω, demuestre que la frecuencia angular de oscilación es $\omega = \sqrt{k/m}$. *c*) Aplique el procedimiento del inciso *b*) para obtener la frecuencia angular de oscilación ω del resorte considerado en el inciso *a*). Si la *masa efectiva* M' del resorte está definida por $\omega = \sqrt{k/M'}$, exprese M' en términos de M.

13.100. Una cinta métrica uniforme (con longitud de 1.00 m) cuelga de un eje horizontal por un extremo y oscila como péndulo físico. Un objeto pequeño con masa igual a la de la cinta métrica se sujeta a la misma a una distancia y por debajo del eje. Sea T el periodo del sistema con el cuerpo pegado y T_0 el periodo de la cinta métrica sola. *a*) Determine la relación T/T_0. Evalúe su expresión para valores de y desde 0 hasta 1.0 m en incrementos de 0.1 m, y grafique T/T_0 contra y. *b*) ¿Hay algún valor de y, distinto de $y = 0$, para el que $T = T_0$? Si lo hay, encuéntrelo y explique por qué el periodo no cambia cuando y tiene ese valor.

13.101. Se determina que el periodo de un péndulo físico alrededor de un punto pivote es T. Luego se encuentra otro punto pivote en el lado opuesto del centro de masa que da el mismo periodo. Los dos puntos están separados una distancia L. Use el teorema de ejes paralelos para demostrar que $g = L(2\pi/T)^2$. (Este resultado sugiere una forma de calcular g sin conocer la masa ni ningún momento de inercia del péndulo físico.)

13.102. Resonancia en un sistema mecánico. Una masa m está unida al extremo de un resorte sin masa con constante de fuerza k y longitud no estirada l_0. El otro extremo del resorte puede girar libremente alrededor de un clavo incrustado en una superficie horizontal sin fricción (figura 13.44). Se hace que la masa gire en un círculo con frecuencia angular de ω'. *a*) Calcule la longitud l del resorte en función de ω'. *b*) ¿Cómo cambia el resultado del inciso *a*) cuando ω' se acerca a la frecuencia natural $\omega = \sqrt{k/m}$ del sistema masa-resorte? (Si el resultado le parece extraño, recuerde que los resortes sin masa y las superficies sin fricción no existen; sólo son descripciones aproximadas de resortes y superficies reales. Además, la ley de Hooke misma es sólo una aproximación al comportamiento de los resortes reales; cuanto más se alargue un resorte, más se desviará su comportamiento de la ley de Hooke.)

Figura 13.44 Problema de desafío 13.102.



***13.103. Vibración de una molécula con enlace covalente.** Muchas moléculas diatómicas (de dos átomos) están unidas por *enlaces covalentes* que son mucho más fuertes que la interacción de Van der Waals. Ejemplos de ello son H_2, O_2 y N_2. Los experimentos indican que, en el caso de muchas de tales moléculas, la interacción puede describirse con una fuerza de la forma

$$F_r = A\left[e^{-2b(r-R_0)} - e^{-b(r-R_0)}\right]$$

donde A y b son constantes positivas, r es la separación de los centros de los átomos y R_0 es la separación de equilibrio. Para la molécula de hidrógeno (H_2), $A = 2.97 \times 10^{-8}$ N, $b = 1.95 \times 10^{10}\ \text{m}^{-1}$, y $R_0 = 7.4 \times 10^{-11}$ m. Calcule la constante de fuerza para oscilaciones pequeñas alrededor del equilibrio. (*Sugerencia:* use la expansión de e^x dada en el Apéndice B.) Compare su resultado con el valor dado en el ejercicio 13.40.