d).- Propiedades de la Transformada de Fourier.

Algunas propiedades básicas de la transformada de Fourier, y que se desprenden de su definición, son las siguientes:

- La transformada de Fourier es una aplicación lineal, es decir, la trasformada de una suma de funciones es la suma de las transformadas.

$$F\{af(t)+bg(t)\}(\omega)=aF\{f(t)\}(\omega)+bF\{g(t)\}(\omega)$$

- Si la función es absolutamente integrable se cumplen las siguientes relaciones.
  - Cambio de escala

$$F\{f(at)\}(\omega)=\frac{1}{|a|}F\{f(t)\}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

  - Traslación

$$F\{f(t-a)\}(\omega)=e^{-i\omega a}F\{f(t)\}(\omega)$$

  - Traslación en la variable transformada

$$F\{f(t)\}(\omega-a)=F\{e^{iat}f(t)\}(\omega)$$

  - Transformada de la derivada: Si f y su derivada son integrables, entonces satisface que

$$F\{f'(t)\}(\omega)=i\omega F\{f(t)\}(\omega)$$

  - Derivada de la transformada:

$$F\{f(t)\}'(\omega)=F\{-it\cdot f(t)\}(\omega)$$

Estas identidades se demuestran mediante un cambio de variables o integración por partes, operada sobre la definición.

Ejercicios sugeridos.

1. (a) Encuentre la transformada de Fourier de la función $f(t)=e^{-|t|}$; y (b) Usando el resultado anterior y el teorema integral de Fourier muestre que

$$\frac{\pi}{2}e^{-|t|}=\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\omega t}{1+\omega^2}\,d\omega$$

2. Encuentre la transformada de Fourier de la función $g(t)=H(t-a)e^{-bt}$, donde $H(t)$ es la *función de Heaviside* (o función "escalón").

Otro ejemplo.

Por lo anterior, vamos a calcular la transformada de Fourier de la distribución Gaussiana normalizada, definida por

$$f(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)}$$

Esta distribución Gaussiana está centrada en $t = 0$ y tiene una desviación raíz media cuadrática $\Delta t_{\mathrm{rms}} = \sigma$.

Solución. Partiendo de la definición de transformada de Fourier podemos escribir

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)}e^{i\omega t}dt$$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(t^2-2\sigma^2 i\omega t\right)\right)}dt$$

El argumento de la exponencial se puede escribir como

$$\begin{aligned}\left(t^2-2\sigma^2 i\omega t\right)&=\left(t^2-2\sigma^2 i\omega t\right)+\left(-\sigma^2 i\omega\right)^2-\left(-\sigma^2 i\omega\right)^2\\&=\left(t^2-2\sigma^2 i\omega t+\left(\sigma^2 i\omega\right)^2\right)-\left(\sigma^2 i\omega\right)^2\\&=\left(t-i\sigma^2\omega\right)^2-\left(i\sigma^2\omega\right)^2\end{aligned}$$

lo que permite reescribir a la transformada de Fourier $F(\omega)$ como

$$F(\omega)=\frac{e^{\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2\right)}}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\left(-\frac{\left(t-i\sigma^2\omega\right)^2}{2\sigma^2}\right)}dt\right\}$$

La integral del término entre corchetes se puede escribir como

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\left(-\frac{\left(t-i\sigma^2\omega\right)^2}{2\sigma^2}\right)}dt=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\left(-\left(\frac{t-i\sigma^2\omega}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right)}dt$$

y haciendo el cambio de variable

$$x=\frac{t-i\sigma^2\omega}{\sqrt{2}\sigma}\qquad dt=\sqrt{2}\sigma dx$$

tenemos

La última integral se puede escribir como

$$F(\omega) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha - i\omega)t} dt$$

que nos lleva a

$$F(\omega) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{e^{-(\alpha - i\omega)t}}{\alpha - i\omega} \right)_{t=0}^{t=\infty}$$

y valuando en los límites correspondiente, nos permite escribir la transformada de Fourier que buscamos

$$F(\omega) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\alpha - i\omega} \right)$$

Como podemos advertir, en general, la transformada de una función real suele ser una función compleja de variable real; en este caso, podemos escribir

$$F(\omega) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\alpha + i\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \right)$$

c).- Teorema integral de Fourier.

Antes de enunciar el teorema integral de Fourier es importante mencionar que la transformada integral de Fourier está sujeta a las condiciones:

i. $f(t)$ es continua o continua por trozos; y
ii. $f(t)$ es absolutamente integrable.

Por lo que podemos partir de la definición de la transformada integral de Fourier (7.1) para establecer que es posible recuperar o encontrar $f(t)$ a partir de su transformada de Fourier $F(\omega)$ mediante la expresión

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \tag{7.2}$$

donde la integral es un valor principal de Cauchy y recibe el nombre de ***Transformada Inversa de Fourier***.

La transformada inversa de Fourier no proporciona correctamente el valor de $f(t)$ en los valores t_d en los que $f(t)$ no es continua. En dichos puntos, la expresión (7.2) proporciona el valor medio de los límites de $f(t)$ por la derecha y por la izquierda del punto considerado t_d, es decir,

$$\tfrac{1}{2}\left[f(t_d+) + f(t_d-) \right].$$

Este resultado se conoce como **teorema integral de Fourier**.

Antes de entrar en materia enunciaremos un par de definiciones importantes.

Integrabilidad absoluta

Definición. Decimos que una función de una variable real $f(t)$ es absolutamente integrable cuando la integral

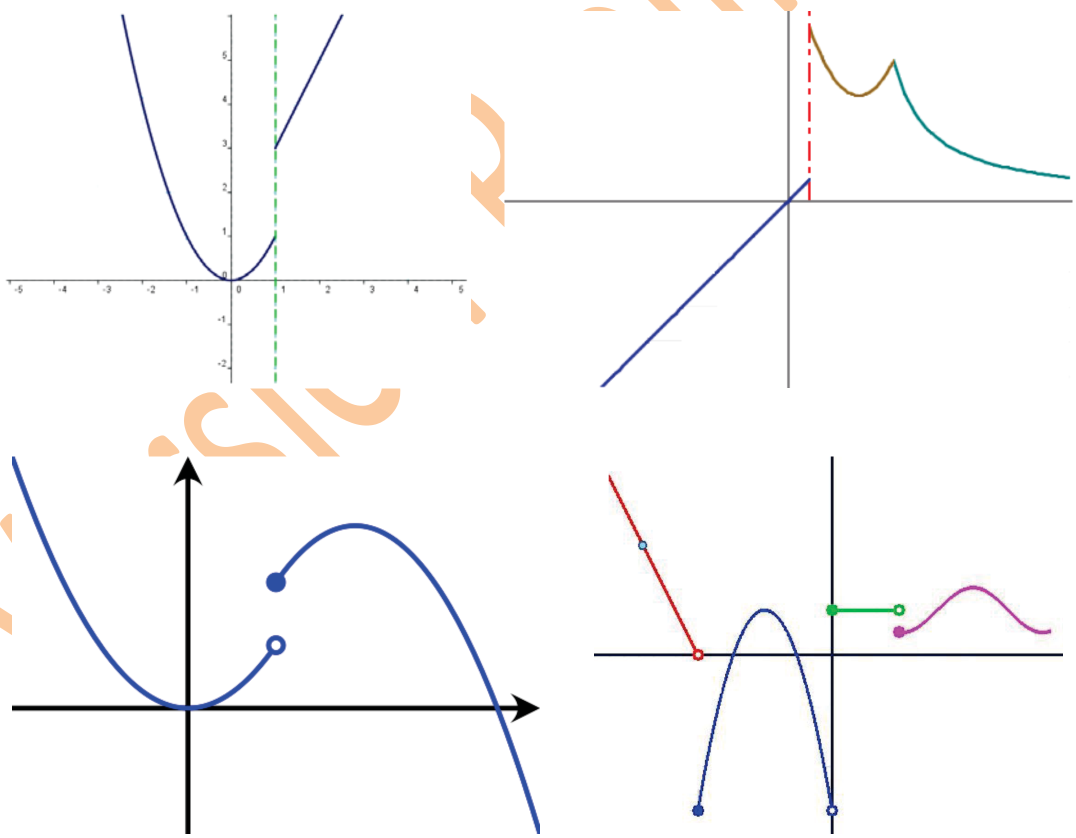
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt$$

existe.

Continuidad a trozos

Definición. Decimos que la función $f(t)$ es *continua a trozos* sobre un intervalo del eje t si podemos dividir este intervalo en un número finito de subintervalos en que $f(t)$ sea continua. En cada subintervalo $f(t)$ tiene límites finitos cuando la variable tiende hacia los extremos desde el interior del subintervalo.

Ejemplos de funciones continuas a trozos



En los ejemplos anteriores, las discontinuidades presentes corresponden a “saltos” finitos, lo que implica que en cada salto las funciones tienen límites finitos tanto a la izquierda como a la derecha de la discontinuidad.

(d) $f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \\ \pi - \frac{t}{2} & \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$

(e) $f(x) = \frac{x}{2} \quad 0 < x < 4$

(f) $f(t) = \begin{cases} 3t & 0 < t \leq 3 \\ 0 & -3 < t \leq 0 \end{cases}$

(g) $g(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leq \pi \\ 2\pi - x & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$

8. Encuentre y grafique la serie de Fourier compleja para la función $f(t) = t^3 - t$ en el intervalo $-2 < t < 2$. Para ello, considere una extensión periódica que busque eliminar el fenómeno de Gibbs en los extremos del intervalo.

Ejercicios sugeridos.

1. En los siguientes problemas bosqueje la función, encuentre el periodo mínimo y construya el desarrollo en Series de Fourier que corresponda.

   (a) $f(t) = \begin{cases} 2t+4 & -2 < t < 0 \\ 4 & 0 < t < 4 \end{cases}$

   (b) $f(t) = |\text{sen}\, 2t|$, para $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.

   (c) $f(t) = H(t)$, para $-2 < t < 2$. En este caso, $H(t)$ representa a la función unitaria de Heaviside (llamada en ocasiones, función escalón).

   (d) $f(t) = \begin{cases} \text{sen}\,\frac{x}{2} & 0 < x \leq \pi \\ -\text{sen}\,\frac{x}{2} & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$

   (e) $f(t) = \begin{cases} -x + e^{x} & -3 < t < 0 \\ x + e^{-x} & 0 < t < 3 \end{cases}$

2. En algunos problemas es conveniente aproximar $\sin \pi t$ en el intervalo $[0,1]$ mediante una parábola $f(t) = at(1-t)$, donde a es una constante. Para tener una idea de la exactitud de esta aproximación,

   (a) Expanda la función $f(t) = 4t(1-t)$ en una serie de Fourier considerando

$$f(t) = \begin{cases} 4t(1+t) & -1 \leq t < 0 \\ 4t(1-t) & 0 < t < 1 \end{cases}$$

   (b) grafique, junto a la función $f(t) = \sin \pi t$, la expansión obtenida considerando 2, 4, 8 y 20 términos.

3. Una función diente de sierra se describe por

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(\pi+t) & -\pi \leq t < 0 \\ +\frac{1}{2}(\pi-t) & 0 < t \leq \pi \end{cases}$$

   Muestre que

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}$$

Esta simplificación toma en cuenta que $e^{inx} = \cos nx + i \text{ sen } nx$. Lo que permite escribir la expansión en series de Fourier compleja como

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(i\frac{2n\pi}{T}t\right)$$

donde los coeficientes de Fourier c_n (para $n \neq 0$) están dados por

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp\left(-i\frac{2n\pi}{T}t\right)dt$$

mientras que c_0 está dado por

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt\,.$$

Esta relación se puede derivar de manera similar a como se hizo la derivación de los coeficientes reales a_n y b_n; sólo que en este caso, se debe multiplicar el desarrollo de $f(t)$ por

$$\exp\left(-i\frac{2m\pi}{T}t\right)$$

e integrar usando la relación de ortogonalidad

$$\int_0^T \exp\left(-i\frac{2m\pi}{T}t\right)\exp\left(i\frac{2n\pi}{T}t\right)dt = \begin{cases} T & \text{para} \quad m = n \\ 0 & \text{para} \quad m \neq n \end{cases}$$

Los coeficientes complejos c_n se relacionan con los coeficientes reales a_n y b_n mediante

$$c_n = \tfrac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right)$$
$$c_{-n} = \tfrac{1}{2}\left(a_n + ib_n\right)$$

Si $f(t)$ es real entonces $c_{-n} = c_n^*$, donde el asterisco (*) significa complejo conjugado.

Un ejemplo.

Encuentre una serie de Fourier compleja para $f(t) = t^3$ en el intervalo $-3 < t < 3$.

Solución. En este caso debemos escribir una serie de la forma

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(i\frac{2n\pi}{T}t\right)$$

donde los coeficientes de Fourier c_n (para $n \neq 0$) estarán dados por

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp\left(-i\frac{2n\pi}{T}t\right)dt$$
$$= \frac{1}{6}\int_{-3}^{3} t^3 \exp\left(-i\frac{n\pi}{3}t\right)dt$$

usando integración por partes, encontramos que los coeficientes son

$$c_n = \frac{1}{6}\int_{-3}^{3} t^3 \exp\left(-i\frac{n\pi}{3}t\right)dt$$

Como la extensión que realizamos es par, podemos aplicar las condiciones de simetría presentadas anteriormente, de tal manera que los coeficientes b_n serán cero y tendremos una serie coseno de Fourier de medio rango

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t$$

así que nuestra tarea será calcular los coeficientes a_0 y a_n, lo que haremos a continuación.

De la definición

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} t^2 dt$$

$$= \frac{4}{4}\int_0^2 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}$$

Mientras que

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t dt = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt$$

donde hemos usado la definición de la frecuencia fundamental ω.

Así que la integral a evaluar es

$$a_n = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} t^2 \cos\left(\frac{2\pi nt}{4}\right)dt = \frac{4}{4}\int_0^2 t^2 \cos\left(\frac{\pi nt}{2}\right)dt$$

$$= \int_0^2 t^2 \cos\left(\frac{\pi nt}{2}\right)dt$$

que podemos resolver usando integración por partes, para obtener sucesivamente,

$$a_n = \left[\frac{2}{n\pi}t^2 \sin\left(\frac{\pi nt}{2}\right)\right]_0^2 - \frac{4}{n\pi}\int_0^2 t\sin\left(\frac{\pi nt}{2}\right)dt$$

$$= \frac{8}{n^2\pi^2}\left[\frac{2}{n\pi}t^2 \sin\left(\frac{\pi nt}{2}\right)\right]_0^2 - \frac{8}{n^2\pi^2}\int_0^2 \cos\left(\frac{\pi nt}{2}\right)dt$$

$$= \frac{16}{n^2\pi^2}\cos(\pi n) = \frac{16}{n^2\pi^2}(-1)^n$$

Con lo que la serie coseno de Fourier para $f(t) = t^2$ en el intervalo $-2 < t \leq 2$, se escribe como

$$f(t) = \frac{4}{3} + 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{\pi nt}{2}\right)$$

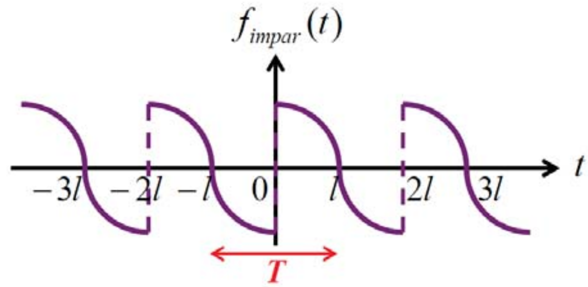
Queda de tarea para el lector interesado, construir la serie seno de Fourier para esta función, mediante una extensión impar de $f(t)$.

- Extensión periódica impar:

$$f(t)=\begin{cases} y(t) & , \quad 0<t<l \\ -y(-t) & , \quad -l<t<0 \end{cases}$$

$$f(t+2l)=f(t)$$

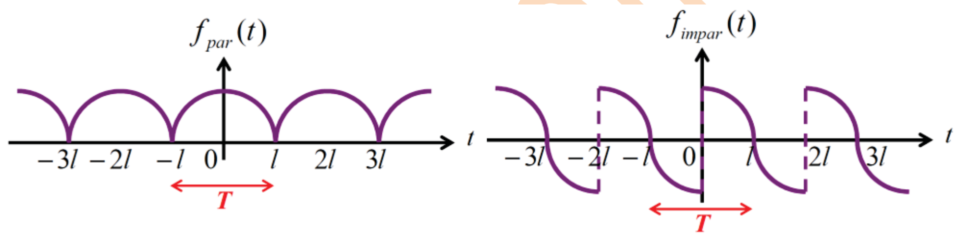
$$T=2l$$



Como puede verse, para la misma función $f(t)$, las diferentes extensiones implican modificar el periodo, en el caso recién mostrado, un dominio inicialmente entre 0 y L, se mantiene sin cambios para una extensión normal, pero se duplicó para las extensiones par e impar.

Serie de Fourier de medio rango

Definición. La serie de Fourier de una extensión periódica par o impar de una función no periódica se le llama **serie de Fourier de medio rango**. Lo anterior se debe a que la función no periódica se considera equivalente a la mitad de la función expandida, ya sea mediante una función par, o una función impar.



Serie coseno de Fourier de medio rango

Definición. Si la función no periódica se extiende mediante una función par entonces los coeficientes b_n se anulan y, por lo tanto, el desarrollo de la función se reduce a

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t$$

que sólo contiene el desarrollo en términos de cosenos, por lo que se le conoce como *Serie coseno de Fourier de medio rango*.

Serie seno de Fourier de medio rango

Definición. Si la función no periódica se extiende mediante una función impar entonces los coeficientes a_n se anulan y, por lo tanto, el desarrollo de la función se reduce a

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

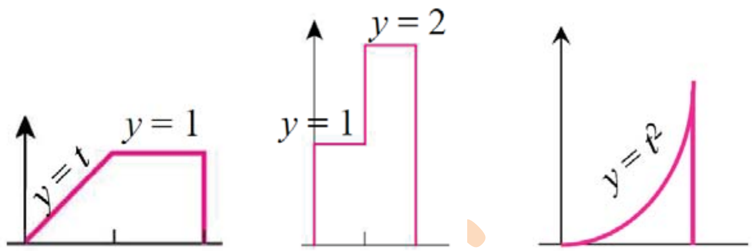
que sólo contiene el desarrollo en términos de senos, por lo que se le conoce como *Serie seno de Fourier de medio rango*.

g).- Expansión de Fourier de medio rango.

Hasta este punto hemos considerado funciones periódicas, por lo que aplicar la teoría de Fourier para hacer un desarrollo en series de senos y cosenos ha sido directo.

Sin embargo, en muchas situaciones físicas lo que se tienen son funciones no periódicas, pero esto no debe representar mayor problema ya que (casi) siempre se pueden definir sobre un intervalo dado, considerando que en una observación o medición sobre un sistema física el tiempo involucrado es finito.

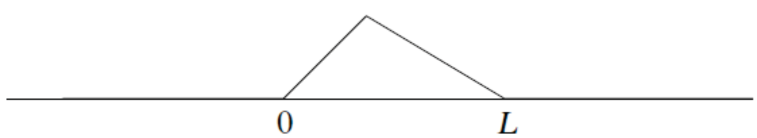
Algunos ejemplos de funciones no periódicas se muestran en las figuras siguientes, las cuales son distintas de cero en un intervalo finito.



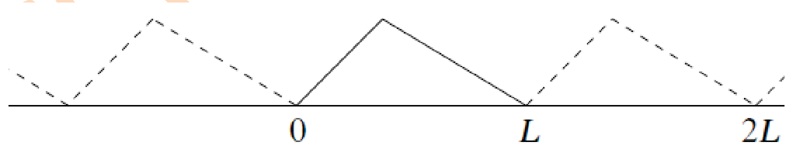
Por lo anterior, resulta muy útil extender la función no periódica en una función periódica antes de calcular su representación en serie de Fourier.

La serie de Fourier de esta función periódica representaría entonces correctamente a la función no periódica en el intervalo deseado.

Por ejemplo, si consideramos una función no periódica tal como la mostrada a continuación.

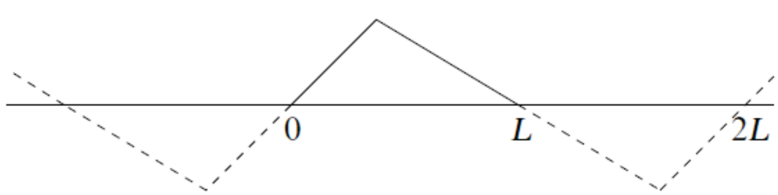


Podemos extenderla, simplemente repitiendo la función, tal como se muestra



en cuyo caso no hay simetría respecto al eje y.

Otra opción puede ser

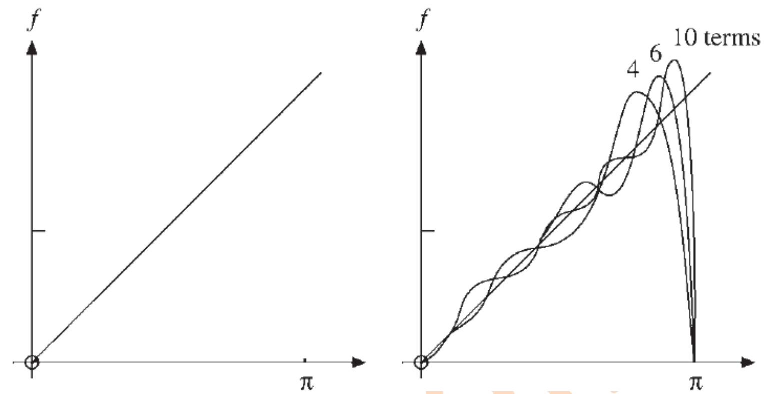


que como vemos presenta simetría impar, ya que $f(-t) = -f(t)$.

f).- Funciones discontinuas. Fenómeno de Gibbs.

La expansión en Serie de Fourier usualmente funciona de manera adecuada cuando tenemos funciones que son discontinuas en el intervalo requerido. Sin embargo, en estos casos la serie no produce una función discontinua, sino que “conecta” la función original en su discontinuidad.

Por ejemplo, para la función diente de sierra definida como $f(t) = at$ (con $a > 0$) y periodo π, que se muestra en la figura de la izquierda, y que presenta una discontinuidad en $t = \pi$, encontramos que el desarrollo en Serie de Fourier existe, tal como se muestra en la figura de la derecha, el cual se ha calculado para 4, 6 y 10 términos.



En este punto mencionaremos, sin probar, que el valor de la función en términos de la Serie de Fourier en la discontinuidad será el promedio de los valores que toma $f(t)$ en la discontinuidad.

Matemáticamente, podemos expresar que en el punto de discontinuidad t_d, la serie converge al valor dado por

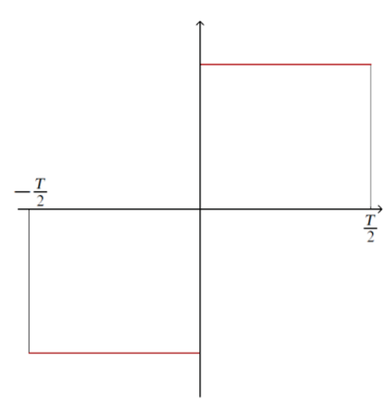
$$f_{FOURIER}(t_d) = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon \to 0}\left[f(t_d + \varepsilon) + f(t_d - \varepsilon) \right]$$

En la discontinuidad, la representación en series de Fourier de la función, $f_{FOURIER}(t)$ toma valores que rebasan los correspondientes a la función original $f(t)$.

Conforme se incluyen más términos en la representación en serie, los puntos con rebasamiento se acercan cada vez más a la discontinuidad, pero no desaparecen, incluso en el límite cuando se considera la serie completa. Este comportamiento se conoce como *fenómeno de Gibbs*.

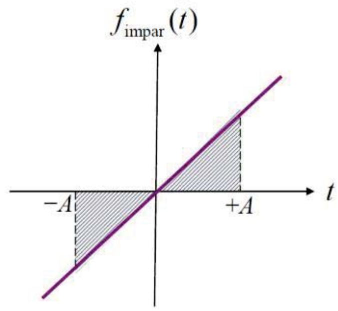
En las siguientes imágenes se muestra este fenómeno para el desarrollo en serie de Fourier de la función cuadrada, definida como

$$f(t) = \begin{cases} F_0 & \text{para} \quad -\frac{T}{2} < t < 0 \\ -F_0 & \text{para} \quad 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$



que evidentemente no es continua, tal como se aprecia en la gráfica.

Evidentemente, la integral de una función impar de $-A$ a $+A$



se anula, es decir

$$\int_{-A}^{A} f_{impar}(t)dt = 0$$

Producto de funciones pares e impares.

De acuerdo a la clasificación presentada anteriormente, el producto de funciones satisface las siguientes propiedades:

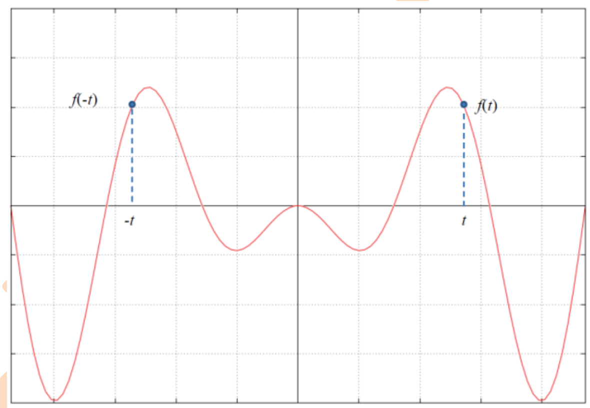
- (par) x (par) = par
- (impar) x (impar) = par
- (par) x (impar) = impar
- (impar) x (par) = impar

e).- Algunas consideraciones de simetría.

En muchas ocasiones, la paridad de la función $f(t)$ permite simplificar el cálculo de su serie de Fourier, para ello vale la pena identificar el tipo de simetría que presenta dicha función y obviar el cálculo de los coeficientes a_0 y a_n, o los coeficientes b_n, según sea la paridad mostrada por $f(t)$.

Función par

Una función $f(t)$ es par si su gráfica es simétrica respecto al eje vertical, tal como se muestra en la figura.

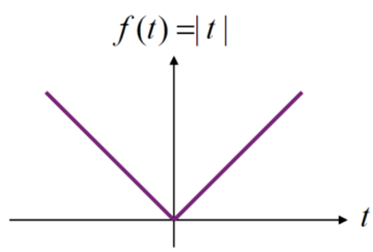


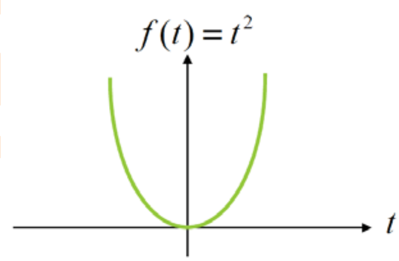
En este caso se cumple que

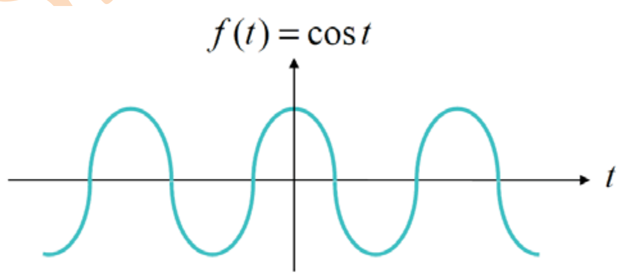
$$f(-t) = f(t)$$

para todo valor de t en el dominio de definición.

Algunos ejemplos de funciones pares son los siguientes







Evidentemente, la integral de una función par de $-A$ a $+A$

$$a_n = 0 + \frac{\cos n\pi - \cos(-n\pi)}{n^2\pi^2} = 0$$

Para terminar, calculemos el coeficiente b_n

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-1}^{1} f(t)\sin n\omega t dt = \int_{-1}^{1} t\sin n\pi t dt$$

es decir

$$\begin{aligned}
b_n &= \left[-\frac{t\cos n\pi t}{n\pi}\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\frac{\cos n\pi t}{n\pi}dt \\
&= \frac{-\cos n\pi + [-\cos(-n\pi)]}{n\pi} + \left[\frac{\sin n\pi t}{n^2\pi^2}\right]_{-1}^{1} \\
&= -\frac{2\cos n\pi}{n\pi} + \frac{\sin n\pi - \sin(-n\pi)}{n^2\pi^2} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \\
&= -\frac{2\cos n\pi}{n\pi} = -\frac{2(-1)^n}{n\pi}
\end{aligned}$$

Con lo anterior, para la función $f(t) = t$ definida en el intervalo $[-1,1]$ y con periodo $T = 2$, la serie de Fourier resulta ser

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi t$$

o expandida en sus primeros términos

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\sin\pi t - \frac{2}{2\pi}\sin 2\pi t + \frac{2}{3\pi}\sin 3\pi t - \mathrm{K}$$

Finalmente, la serie de Fourier resulta ser

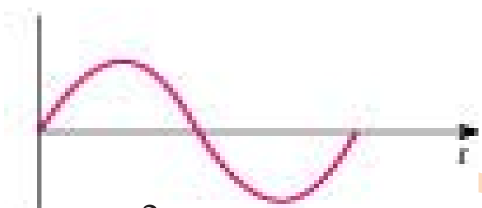
$$f(t)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\right]\sin n\pi t$$

que desarrollando los primeros términos se escribe como

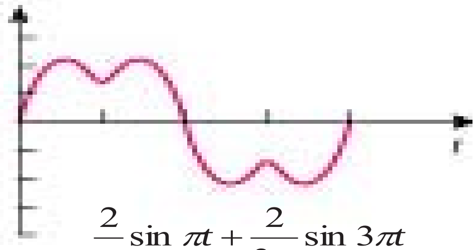
$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sin\pi t+\frac{2}{3\pi}\sin 3\pi t+\frac{2}{5\pi}\sin 5\pi t+\ldots$$

Es importante mencionar que la serie obtenida anteriormente, en principio, es una serie infinita; sin embargo, en muchas situaciones será suficiente considerar un número finito de términos para obtener la aproximación deseada, toda vez que conforme sumamos términos el resultado va convergiendo a la función original $f(t)$.

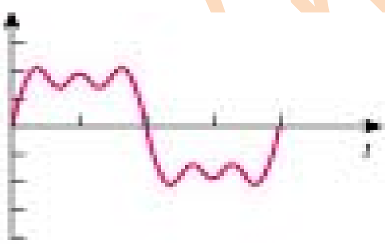
Lo que puede apreciarse mejor en la siguiente secuencia de imágenes correspondientes a la serie de Fourier recién construida.



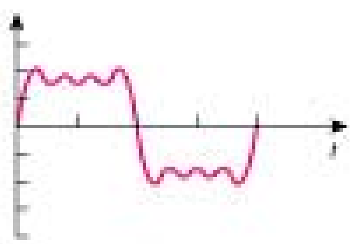
$$\frac{2}{\pi}\sin\pi t$$



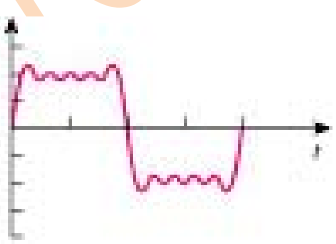
$$\frac{2}{\pi}\sin\pi t+\frac{2}{3\pi}\sin 3\pi t$$



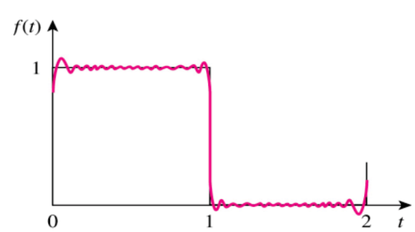
$$\frac{2}{\pi}\sin\pi t+\frac{2}{3\pi}\sin 3\pi t+\frac{2}{5\pi}\sin 5\pi t$$



$$\frac{2}{\pi}\sin\pi t+\frac{2}{3\pi}\sin 3\pi t+\frac{2}{5\pi}\sin 5\pi t+\frac{2}{7\pi}\sin 7\pi t$$



$$\frac{2}{\pi}\sin\pi t+\frac{2}{3\pi}\sin 3\pi t+\frac{2}{5\pi}\sin 5\pi t+\frac{2}{7\pi}\sin 7\pi t+\frac{2}{9\pi}\sin 9\pi t$$



$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sin\pi t+\frac{2}{3\pi}\sin 3\pi t+\ldots+\frac{2}{23\pi}\sin 23\pi t$$

El término $\frac{a_0}{2}$ corresponde al valor promedio de la función $f(t)$ en el periodo T, como veremos a continuación.

Si multiplicamos la expresión (6.1) por ($\cos m\omega t$) e integramos de 0 a T encontramos que

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t dt \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

mientras que para $n = 0$, se tiene

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt$$

Por otro lado, multiplicando la expresión (6.1) pero ahora por ($\sin m\omega t$), e integrando de 0 a T, encontramos que

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t dt \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Desarrollo en Serie de Fourier

Definición. Sea $f(t)$ una función convergente en el intervalo $0 \le t \le T$, el desarrollo en serie de Fourier para $f(t)$ existe y está dado por

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

donde los coeficiente del desarrollo a_n y b_n están dados por

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t dt$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$; mientras que a_0 está dado por

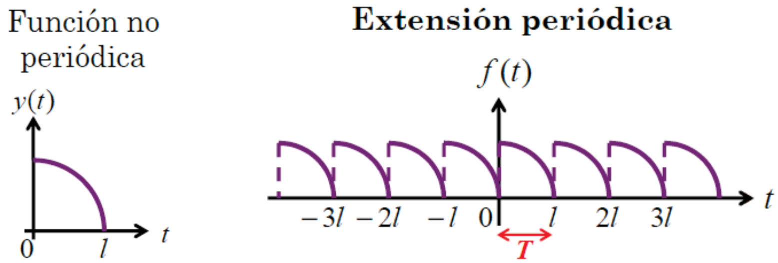
$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt$$

A la cantidad ω que aparece en las expresiones anteriores se le conoce como **frecuencia fundamental** y está dada por

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

donde T es el periodo de la función $f(t)$.

El cálculo y estudio de las series de Fourier se conoce como **análisis armónico** (o análisis de Fourier) y es extremadamente útil al estudiar funciones periódicas arbitrarias y hacer un análisis de la misma en términos de su contenido frecuencial o espectro, ω_n.

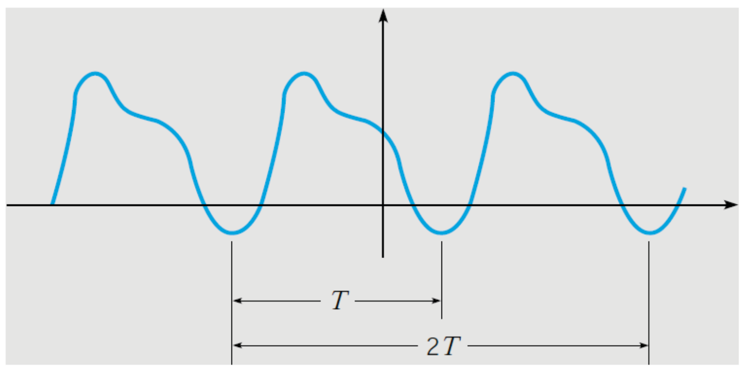


El procedimiento que seguiremos en tales casos se discutirá más adelante.

Resumiendo.

Se dice que una función $f(t)$ es periódica, con periodo T, si

- el dominio de $f(t)$ contiene tanto a t como a $t+T$; y
- $f(t+T) = f(t)$



Aunque $2T$ también satisface las condiciones anteriores, el valor mínimo de T será el que usaremos en lo que sigue.

c).- Desarrollo en Series de Fourier.

Definición. Una serie de Fourier es una expansión de una función periódica $f(t)$, con periodo T, en términos de una suma infinita de senos y cosenos que toma la forma

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

En otras palabras, cualquier función periódica se puede reescribir como una suma de funciones armónicas multiplicadas por constantes a determinar: a_n y b_n.

En el desarrollo anterior, se considera que la función $f(t)$ tiene una periodicidad definida; sin embargo, más adelante veremos que aunque la función no sea periódica podremos hacer un análisis de Fourier mediante la *transformada integral de Fourier*.

Sin embargo, debido a la propiedad de ortogonalidad, las integrales del lado derecho son cero, excepto cuando $m = n$, así que la expresión anterior se reduce a

$$\int_a^b f(t)\phi_n(t)dt = c_n \int_a^b \phi_n(t)\phi_n(t)dt$$

de donde podemos despejar los coeficientes c_n del desarrollo propuesto para $f(t)$.

Con el resultado anterior, podemos escribir el desarrollo de $f(t)$ como

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(t)$$

donde

$$c_n = \frac{\int_a^b f(t)\phi_n(t)dt}{\left\|\phi_n(t)\right\|^2}$$

Si el conjunto de funciones $\phi_n(t)$ es *ortonormal*, entonces el denominador en la última expresión es igual a 1, y el cálculo del coeficiente c_n del desarrollo de $f(t)$ se reduce a

$$c_n = \int_a^b f(t)\phi_n(t)dt\,.$$

En particular, las funciones periódicas (como el seno y el coseno) de frecuencias distintas, pero múltiplos de una frecuencia fundamental, son ortogonales y forman un conjunto completo, por lo que son una buena opción para realizar un desarrollo de la forma descrita líneas arriba.

En lo que sigue analizaremos los desarrollos para una función $f(t)$ en términos de una suma de senos y cosenos.

Tal representación se llama *serie de Fourier* y, a diferencia de la serie de Taylor, puede describir funciones que no son completamente continuas o diferenciables. Además, son fáciles de diferenciar e integrar, sus módulos son fáciles de evaluar y cada término incluye solamente una frecuencia característica.

Este último punto es importante porque, como se verá más adelante, la serie de Fourier se utiliza a menudo para representar la respuesta de un sistema a una entrada periódica, y esta respuesta a menudo depende directamente de la frecuencia de entrada.

Las series de Fourier se utilizan en una amplia variedad de situaciones físicas, por ejemplo, las vibraciones de una cuerda finita, la dispersión de la luz por una rejilla de difracción, la transmisión de una señal de entrada a través de un circuito electrónico, etc.

16.- Use residuos para encontrar los valores principales de Cauchy de las integrales en los ejercicios siguientes.

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}$.

RESPUESTA. (b) $-\pi/5$.

17.- Use residuos para evaluar las integrales impropias en los siguientes ejercicios.

(a) $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+1} dx$ con $a > 0$.

(b) $\int_0^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2+3} dx$.

RESPUESTA. (a) $\frac{\pi}{2} e^{-a}$; (b) $\frac{\pi}{2} e^{-2\sqrt{3}}$.

18.- Pruebe que

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

19.- Pruebe que si $m > 0$,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi e^{-m}(1+m)}{4}$$

20.- (a) Encuentre el residuo de $\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^5}$ en $z = i$. (b) Evalúe la integral $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^5} dx$.

Sección 5e:

6.- En cada caso, demuestre que los puntos singulares son polos. Determine el orden m de cada polo, y encuentre el residuo correspondiente B.

(a) $f(z) = \frac{z^2+2}{z-1}$;

(b) $f(z) = \left(\frac{z}{2z+1}\right)^3$;

(c) $f(z) = \frac{e^z}{z^2+\pi^2}$.

RESPUESTA: (a) $m = 1, B = 3$; (b) $m = 3, B = -3/16$; (c) $m = 1, B = \pm i/2\pi$.

7.- Halle el valor de la integral

$$\int_C \frac{3z^3+2}{(z-1)(z^2+9)} dz$$

en sentido contrarreloj a lo largo de la cirunferencia (a) $|z-2| = 2$; (b) $|z| = 4$.

RESPUESTA: (a) πi ; (b) $6\pi i$.

8.- Halle el valor de la integral

$$\int_C \frac{dz}{z^3(z+4)}$$

en sentido contrarreloj a lo largo de la circunferencia (a) $|z| = 2$; (b) $|z+2| = 3$.

9.- Evalúe la integral

$$\int_C \frac{\cosh \pi z\, dz}{z(z^2+1)}$$

considerando que C es la circunferencia $|z| = 2$ recorrida en sentido positivo.

RESPUESTA: $4\pi i$.

10.- Use el teorema (5.8) de la Sección 5e, para evaluar la integral de $f(z)$ a lo largo de la circunferencia $|z| = 3$ orientada positivamente, cuando

(a) $f(z) = \frac{(3z+2)^2}{z(z-1)(2z+5)}$;

(b) $f(z) = \frac{z^3(1-3z)}{(1+z)(1+2z^4)}$;

(c) $f(z) = \frac{z^3 e^{1/z}}{1+z^3}$.

RESPUESTA: (a) $9\pi i$; (b) $-3\pi i$; (c) $2\pi i$.

Un ejemplo.

Determine el valor principal de Cauchy para la integral

$$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x}$$

Solución. Usando la definición anterior, podemos escribir

$$VP\left[\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x}\right] = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int_{-1}^{\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{2} \frac{dx}{x}\right]$$

Lo que lleva a

$$\begin{aligned} VP\left[\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x}\right] &= \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\ln|\varepsilon| - \ln|-1| + \ln|2| - \ln|\varepsilon|\right] \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0}\left[-\ln|-1| + \ln|2|\right] \\ VP\left[\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x}\right] &= \ln|2| \end{aligned}$$

Es importante mencionar que aunque en el límite cuando $\varepsilon \to 0$ las integrales no existen por separado, cuando se considera la suma el resultado converge, por lo que podemos calcular el Valor Principal de Cauchy para esta integral.

Sin embargo, habrá integrales para las cuales no podamos calcular esta suma, de tal manera que el Valor Principal no existirá debido a la inexistencia del límite requerido por la definición.

Ejercicios sugeridos.

Secciones 5a y 5b:

1.- En cada caso, escriba la parte principal de la función en su punto singular aislado y determine si se trata de un polo, un punto singular removible, o un punto singular esencial.

(a) $f(z) = ze^{\left(\frac{1}{z}\right)}$;

(b) $f(z) = \frac{z^2}{1+z}$;

(c) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$;

(d) $f(z) = \frac{\cos z}{z}$;

(e) $f(z) = \frac{1}{(2-z)^3}$.

$$f(z)=\frac{e^{i2z}}{z^2-16}$$

en z = -4, resultando

$$B_0=\text{Res}\left[\frac{e^{i2z}}{z^2-16}\right]_{c_0=1}=\left.\frac{e^{i2z}}{2z}\right|_{c_0=-4}=-\frac{e^{-8i}}{8}$$

con lo que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_{\rho_1}} f(z)dz=\frac{e^{-8i}}{8}\pi i$$

Procediendo de manera similar encontramos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_{\rho_2}} f(z)dz=-\frac{e^{8i}}{8}\pi i$$

Una vez tomados los límites $R\to\infty$ y $\varepsilon\to 0$ podemos escribir

$$\int_{-R}^{-4-\varepsilon}\frac{e^{i2x}}{x^2-16}dx+\int_{C_{\rho_1}}\frac{e^{i2z}}{z^2-16}dz+\int_{-4+\varepsilon}^{4-\varepsilon}\frac{e^{i2x}}{x^2-16}dx+\int_{C_{\rho_2}}\frac{e^{i2z}}{z^2-16}dz+\int_{4+\varepsilon}^{R}\frac{e^{i2x}}{x^2-16}dx+\int_{C_R}\frac{e^{i2z}}{z^2-16}dz=0$$

como

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\left[\int_{-R}^{-4-\varepsilon}\frac{e^{i2x}}{x^2-16}dx+\int_{-4+\varepsilon}^{4-\varepsilon}\frac{e^{i2x}}{x^2-16}dx+\int_{4+\varepsilon}^{R}\frac{e^{i2x}}{x^2-16}dx\right]+\frac{e^{-8i}}{8}\pi i-\frac{e^{8i}}{8}\pi i=0$$

En el límite indicado, la primera parte de la ecuación se reduce al valor principal de Cauchy para la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i2x}}{x^2-16}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x+i\sin 2x}{x^2-16}dx$$

Así pues,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x}{x^2-16}dx+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x^2-16}dx=\frac{e^{8i}}{8}\pi i-\frac{e^{-8i}}{8}\pi i$$

$$=\frac{i\pi}{8}\left[(\cos 8+i\sin 8)-(\cos 8-i\sin 8)\right]=-\frac{\pi}{4}\sin 8$$

con lo que igualando partes real e imaginaria por separado, nos permite escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x}{x^2-16}dx=-\frac{\pi}{4}\sin 8 \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x^2-16}dx=0$$

$$f(z)=\frac{e^{i3z}}{z-1}$$

por lo que aplicando el teorema de Cauchy podemos escribir

$$\int_C \frac{e^{i3z}}{z-1}dz=\int_{-R}^{1-\varepsilon}\frac{e^{i3x}}{x-1}dx+\int_{C_\rho}\frac{e^{i3z}}{z-1}dz+\int_{1+\varepsilon}^{R}\frac{e^{i3x}}{x-1}dx+\int_{C_R}\frac{e^{i3z}}{z-1}dz=0$$

Queda de tarea demostrar que la última integral, en el límite cuando $R\to\infty$, es cero.

A continuación, vamos a evaluar la segunda integral en el límite cuando $\varepsilon\to 0$ considerando que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\rho} f(z)dz=-B_0\pi i$$

lo que implica evaluar el residuo B_0 de

$$f(z)=\frac{e^{i3z}}{z-1}$$

En este caso, podemos usar

$$B_0=\operatorname{Res}\left[\frac{e^{i3z}}{z-1}\right]_{c_0=1}=\left.\frac{e^{i3z}}{1}\right|_{c_0=1}=e^{3i}$$

con lo que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\rho} f(z)dz=-e^{3i}\pi i$$

Una vez tomados los límites $R\to\infty$ y $\varepsilon\to 0$ podemos escribir

$$\int_{-R}^{1-\varepsilon}\frac{e^{i3x}}{x-1}dx+\int_{C_\rho}\frac{e^{i3z}}{z-1}dz+\int_{1+\varepsilon}^{R}\frac{e^{i3x}}{x-1}dx+\int_{C_R}\frac{e^{i3z}}{z-1}dz=0$$

como

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\left[\int_{-R}^{1-\varepsilon}\frac{e^{i3x}}{x-1}dx+\int_{1+\varepsilon}^{R}\frac{e^{i3x}}{x-1}dx\right]-i\pi e^{3i}=0$$

En el límite indicado, la primera parte de la ecuación se reduce al valor principal de Cauchy para la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i3x}}{x-1}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3x+i\sin 3x}{x-1}dx$$

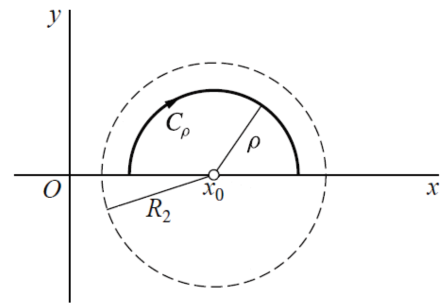
Así pues,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3x}{x-1}dx+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 3x}{x-1}dx=i\pi e^{3i}=i\pi\left[\cos 3+i\sin 3\right]$$

con lo que igualando partes real e imaginaria por separado, nos permite escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3x}{x-1}dx=-\pi\sin 3$$

Teorema. Supongamos que



i. Una función $f(z)$ tiene un polo simple en un punto $z = x_0$ del eje real, con una representación en serie de Laurent en el disco perforado $0 < |z - x_0| < R_2$ y residuo B_0.

ii. C_ρ denota la mitad superior de una circunferencia $|z - x_0| = \rho$, con $\rho < R_2$, recorrida en sentido negativo (el de las agujas de un reloj).

Entonces

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)dz = -B_0\pi i$$

Demostración. Suponiendo que se satisfacen las condiciones (i) y (ii) del teorema, podemos escribir las serie de Laurent de $f(z)$ como

$$f(z) = g(z) + \frac{B_0}{z - x_0} \quad \left(0 < |z - x_0| < R_2\right)$$

donde

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(z - x_0\right)^n \quad \left(|z - x_0| < R_2\right)$$

Con esto, la integral sobre $f(z)$ se puede escribir como

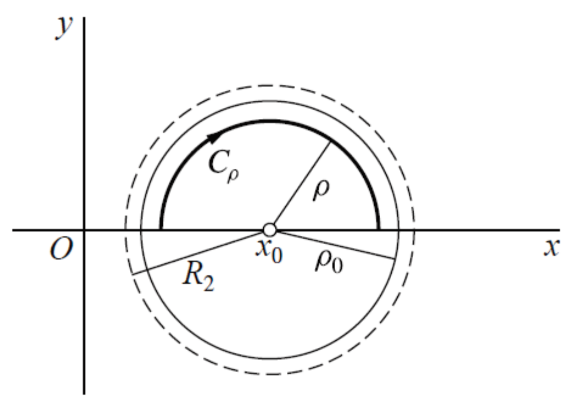
$$\int_{C_\rho} f(z)dz = \int_{C_\rho} g(z)dz + B_0\int_{C_\rho}\frac{dz}{z - x_0}$$

A continuación veamos cada una de las integrales del lado derecho de la expresión anterior, considerando el límite cuando $\rho \to 0$.

La función $g(z)$ es continua cuando $|z - x_0| < R_2$, por lo que si tomamos un número ρ_0 tal que

$$\rho < \rho_0 < R_2,$$

$g(z)$ debe estar acotada en el disco cerrado $|z - x_0| < \rho_0$, .



Así pues, existe una constante M tal que

$|g(z)| \le M$ siempre que $|z - x_0| < \rho_0$

con lo anterior, puesto que la longitud de C_ρ es $L = \pi\rho$, se tiene

$$\left|\int_{C_\rho} g(z)dz\right| \le ML = M\pi\rho$$

Por consiguiente

$$\lim_{\rho\to 0}\left|\int_{C_\rho} g(z)dz\right| = 0$$

Para evaluar la segunda integral, parametricemos la semicircunferencia $-C_\rho$ como que podemos simplificar al desarrollar las operaciones indicadas en el denominador y en el argumento de las exponenciales para llegar a

$$\sum_k \mathrm{Res}\left[\frac{ze^{i2z}}{z^4+1}\right]_{z_k} = \frac{e^{i\sqrt{2}(1+i)}}{4i} + \frac{e^{i\sqrt{2}(-1+i)}}{-4i}$$

que se reduce a

$$\sum_k \mathrm{Res}\left[\frac{ze^{i2z}}{z^4+1}\right]_{z_k} = \frac{e^{-\sqrt{2}}}{2}\left(\frac{e^{i\sqrt{2}}-e^{-i\sqrt{2}}}{2i}\right)$$

o

$$\sum_k \mathrm{Res}\left[\frac{ze^{i2z}}{z^4+1}\right]_{z_k} = \frac{e^{-\sqrt{2}}}{2}\sin\sqrt{2}$$

Así que finalmente, el resultado buscado es

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin 2x}{x^4+1}dx = \mathrm{Im}\left[2\pi i\left(\frac{e^{-\sqrt{2}}}{2}\sin\sqrt{2}\right)\right]$$

es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin 2x}{x^4+1}dx = \pi e^{-\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}$$

De hecho, una vez calculado el residuo podemos establecer un par de resultados adicionales

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos 2x}{x^4+1}dx = \mathrm{Re}\left[2\pi i\left(\frac{e^{-\sqrt{2}}}{2}\sin\sqrt{2}\right)\right] = 0$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i2x}}{x^4+1}dx = 2\pi i\left(\frac{e^{-\sqrt{2}}}{2}\sin\sqrt{2}\right) = \pi i\left(e^{-\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}\right)$$

Otro ejemplo.

Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3x}{x^2+4}dx$

Solución. En este caso identificamos

$$f(z)e^{iaz} = \frac{p(z)}{q(z)}e^{iaz} = \frac{1}{z^2+4}e^{i3z}$$

por lo que tenemos que calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3x}{x^2+4}dx = \mathrm{Re}\left[2\pi i\sum_i \mathrm{Res}\left[\frac{e^{i3z}}{z^2+4}\right]_{z_k}\right]$$

Para ello advertimos que los polos z_k se ubican en los ceros de z^2+4, resultando $z_k = \pm 2i$. Como los dos valores son distintos, podemos afirmar que corresponden a polos simples.

Para nuestro problema bastará considerar es polo ubicado en el semiplano superior, que corresponde al valor $z_k = +2i$.

Lema de Jordan

En la evaluación de integrales sobre el contorno C_R, cuyo integrando es de la forma $f(z)e^{iaz}$, en algunas ocasiones se hace necesario usar el llamado *Lema de Jordan*, que se enuncia a continuación.

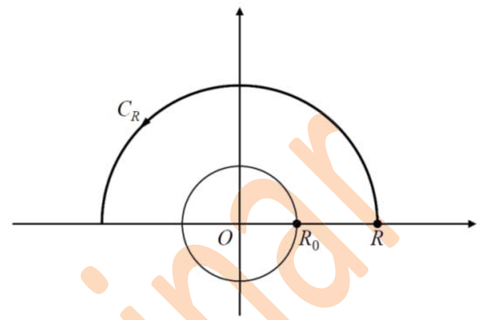
Teorema. Suponga que

(a) la función $f(z)$ es analítica en todos los puntos z del semiplano complejo superior que son exteriores a un círculo $|z| = R_0$;

(b) C_R denota el semicírculo representa-do por $z = Re^{i\theta}$ $(0 \le \theta \le \pi)$, donde $R > R_0$;

(c) para todos los puntos z de C_R hay una constante positiva M_R tal que

$$\left| f(z) \right| \le M_R \quad \text{y} \quad \lim_{R\to\infty} M_R = 0$$



Entonces, para toda constante positiva a,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)e^{iaz}dz = 0 \tag{5.17}$$

Integrales impropias en el análisis de Fourier.

Otra aplicación del teorema de los residuos aparece en el cálculo de integrales impropias convergentes de las formas

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin axdx \qquad \text{ó} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos axdx$$

donde a es una constante positiva y, tal como lo hemos hecho, supondremos que

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios con coeficientes reales sin factores en común; además, $q(x)$ no tiene ceros reales.

Este tipo de integrales aparecen en la teoría y aplicaciones de la Integral de Fourier que veremos más adelante en este curso.

En este tipo de integrales no podemos aplicar directamente las ideas desarrolladas anteriormente para el cálculo de integrales impropias, pero aún podemos hacer algo si consideramos que

$$\int_{-R}^{R} f(x)\cos axdx + i\int_{-R}^{R} f(x)\sin axdx = \int_{-R}^{R} f(x)e^{iax}dx$$

es decir, en vez de calcular la integral que involucra al seno o al coseno, calculamos la integral que contiene a la exponencial y al final igualamos partes reales e imaginarias en ambos lados del resultado que se obtiene.

En este caso

$$B_k = \operatorname{Res}\left[\frac{z^2}{z^6+1}\right]_{z=c_k} = \frac{c_k^2}{6c_k^5} = \frac{1}{6c_k^3}$$

Por lo que

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i\left[\frac{1}{6i} - \frac{1}{6i} + \frac{1}{6i}\right] = \frac{\pi}{3}$$

de donde

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx = \frac{\pi}{3} - \int_{C_R} f(z)dz$$

válida para toda R, tal que $R > 1$.

En este punto tenemos que considerar el cálculo de la integral del lado derecho, para ello vamos a utilizar la parametrización de C_R dada por

$$z(t) = Re^{it}$$

con $0 \le t \le \pi$.

A partir de lo anterior, tenemos que

$$\left|z^2\right| = \left|z\right|^2 = R^2$$

y, usando la desigualdad del triángulo para números complejos $\left(\left|z_1 + z_2\right| \ge \left\|z_1\right| - \left|z_2\right\|\right)$, podemos escribir

$$\left|z^6 + 1\right| \ge \left\|z\right|^6 - 1\right| = R^6 - 1$$

Así que si z es cualquier punto sobre el contorno C_R, entonces

$$|f(z)| = \left|\frac{z^2}{z^6+1}\right| \le \frac{R^2}{R^6 - 1}$$

En este punto podemos usar un resultado que se tiene cuando evaluamos una integral sobre un contorno de longitud L en el que el módulo de la función $f(z)$ está acotado por un valor M, es decir

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \le ML$$

lo cual implica que

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \le \left(\frac{R^2}{R^6-1}\right)\pi R = \frac{\pi R^3}{R^6 - 1}$$

es decir

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \le \frac{\dfrac{\pi}{R^3}}{\dfrac{R^6}{R^6} - \dfrac{1}{R^6}} = \frac{\dfrac{\pi}{R^3}}{1 - \dfrac{1}{R^6}}$$

A continuación describiremos un método basado en los residuos que permite evaluar integrales impropias de funciones racionales pares $f(x)$ de la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

con

$$f(-x) = f(x)$$

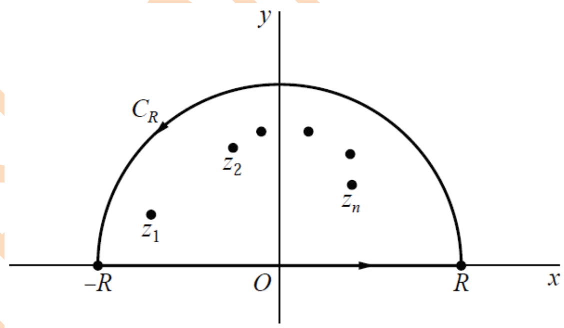
y donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios con coeficientes reales sin factores comunes.

Suponemos que $q(z)$ no tiene ceros reales y que tiene al menos un cero en el semiplano complejo superior (donde $\mathrm{Im}(z) > 0$).

El método se inicia identificando todos los ceros distintos del polinomio $q(z)$ situados en el semiplano superior, hay un número finito de ellos (dependiendo del grado del polinomio) y podemos denotarlos como $z_1, z_2, \ldots, z_n$, donde n es menor o igual que el grado N de $q(z)$.

A continuación se integra el cociente

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$



sobre el contorno semicircular formado por el segmento recto desde $z = -R$ a $z = R$ y la mitad superior de la circunferencia $|z| = R$ descrita en sentido positivo y que denotaremos por C_R, tal como se muestra en la figura.

En todo caso supondremos que R es lo suficientemente grande para que los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sean todos interiores al contorno cerrado que se está considerando.

Usando el teorema de los residuos de Cauchy y la parametrización $z = x$ para el segmento recto, podemos escribir

$$\int_C f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z)]_{z=z_k}$$

de donde

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z)]_{z=z_k} - \int_{C_R} f(z)dz$$

Si

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0$$

entonces

$$VP\left[\int_{-R}^{R} f(x)dx\right] = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z)]_{z=z_k}$$

Tomando en cuenta que $f(x)$ es una función par, podemos escribir finalmente que

Para calcular el residuo, usamos $\operatorname{Res}\left[\frac{p(z)}{q(z)}\right]_{z=z_0} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$

es decir

$$\operatorname{Res}\left[z\sec z\right]_{z=z_n} = \operatorname{Res}\left[\frac{z}{\cos z}\right]_{z=z_n} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)}{(-1)^{n+1}} = (-1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)$$

con lo que se llega al resultado deseado.

g).- Aplicación de los residuos.

Calculo de integrales impropias.

En cálculo, la integral impropia de una función $f(x)$ sobre la semirrecta $x \geq 0$ se define como

$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R f(x)dx \tag{1}$$

Cuando el límite existe se dice que la integral impropia es convergente y que converge a dicho límite.

Si $f(x)$ es continua en todo x, su integral impropia sobre la recta $-\infty < x < \infty$ se define como

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{R_1\to\infty}\int_{-R_1}^0 f(x)dx + \lim_{R_2\to\infty}\int_0^{R_2} f(x)dx \tag{2}$$

y cuando los dos límites existen se dice que la integral impropia converge a la suma de ambos límites.

Definición. Esta última integral tiene otro valor asignado conocido como **valor principal de Cauchy** (VP) que se define como el número

$$VP\left[\int_{-\infty}^\infty f(x)dx\right] = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R f(x)dx$$

siempre que este límite exista.

Es importante mencionar que si la integral dada por la ecuación (2) es convergente, su valor principal de Cauchy (VP) existe; sin embargo, la existencia del valor principal de Cauchy NO garantiza la convergencia de la integral (2), tal como se muestra en el ejemplo siguiente.

Un ejemplo.

Observemos que para la integral

$$\int_{-\infty}^\infty xdx$$

el valor principal es

$$\text{Res}\left[f(z)\right]_{z=z_0} = \phi(z_0) \text{ donde } \phi(z) = \left(z - z_0\right) f(z),$$

podemos escribir

$$\text{Res}\left[\frac{p(z)}{q(z)}\right]_{z=z_0} = \frac{p(z_0)}{g(z_0)}$$

Pero como $q(z) = (z - z_0)g(z)$, podemos derivar con respecto a z y evaluar en $z = z_0$, para obtener sucesivamente

$$q'(z) = (z - z_0)'g(z) + (z - z_0)g'(z)$$

$$q'(z) = g(z) + (z - z_0)g'(z)$$

$$q'(z_0) = g(z_0) + (z_0 - z_0)g'(z)$$

con lo que, finalmente, se tiene

$$\text{Res}\left[\frac{p(z)}{q(z)}\right]_{z=z_0} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

lo que demuestra el teorema.

Un ejemplo.

Usando el teorema anterior, demostrar que el punto $z = 0$ es un polo simple de la función

$$f(z) = \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

y que su residuo es 1.

Solución. A partir de la expresión para $f(z)$, identificamos

$$p(z) = 1$$
$$q(z) = \sin z$$

A continuación verificamos las condiciones que deben cumplir $p(z)$ y $q(z)$, a saber

$$p(z_0) \neq 0,\ q(z_0) = 0 \text{ y } q'(z_0) \neq 0$$

que en este caso resultan

$$p(0) = 1 \neq 0,$$

$$q(0) = \text{sen } 0 = 0$$

y

$$q'(0) = \cos(0) = 1 \neq 0$$

Por lo que podemos concluir que z = 0 es un polo simple de csc z.

Mientras que para calcular el residuo, usamos

$$\text{Res}\left[\frac{p(z)}{q(z)}\right]_{z=z_0} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

es decir

Un ejemplo.

Considerando la función $f(z) = z^2 + 4$, identifique y clasifique el (o los) cero(s).

Solución. Los ceros de $f(z)$ son $z_0 = \pm 2i$, ya que $f(z) = (z + 2i)(z - 2i)$

- Considerando $z_0 = +2i$, escribamos $g(z)$ como

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^m} = \frac{(z + 2i)(z - 2i)}{(z - 2i)^m}$$

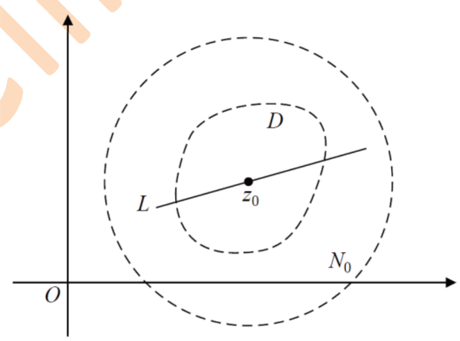
  que resulta diferente de cero en $z_0 = 2i$ cuando $m = 1$, por lo que $z_0 = +2i$ es un cero de orden 1.

- Considerando $z_0 = -2i$, escribamos $g(z)$ como

$$g(z) = \frac{(z + 2i)(z - 2i)}{(z + 2i)^m}$$

  que resulta diferente de cero en $z_0 = -2i$ cuando $m = 1$, por lo que $z_0 = -2i$ es un cero de orden 1.

Para continuar, establecemos un par de teoremas útiles.



Teorema 1. Dados una función $f(z)$ y un punto z_0, supongamos que

i. f es analítica en z_0
ii. $f(z_0) = 0$, pero f no es idénticamente nula en ningún entorno de z_0.

Entonces $f(z) \neq 0$ en algún entorno perforado $0 < |z - z_0| < \varepsilon$.

Teorema 2. Dados una función $f(z)$ y un punto z_0, supongamos que

i. f es analítica en un entorno N_0 de z_0
ii. $f(z_0) = 0$ y $f(z) = 0$, en todos los puntos de un dominio D o de un segmento recto que contengan a z_0.

Entonces $f(z) \equiv 0$ en N_0; esto es, $f(z)$ es idénticamente nula en el entorno N_0 .

Una vez establecidos los teoremas anteriores, vamos a ver el teorema que muestra cómo los ceros de orden m de una función f pueden producir polos de orden m.

Teorema. Supongamos que

i. $p(z)$ y $q(z)$ son funciones analíticas en el punto z_0
ii. $p(z_0) \neq 0$ y $q(z)$ tiene un cero de orden m en z_0.

Entonces el cociente $p(z)/q(z)$ tiene un polo de orden m en z_0.

Con lo que se demuestra el teorema.

Ejercicios.
Use el teorema anterior, donde aplique, para evaluar los residuos de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(z)=\dfrac{e^{-z}}{(z-1)^2}$

b) $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$

c) $f(z)=\dfrac{1}{z}$

d) $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2-2z}$

e) $f(z)=\dfrac{e^{-z}}{z^2}$

f) $f(z)=z^2\exp\left(\dfrac{1}{z}\right)$

g) $f(z)=\dfrac{z^5}{1-z^3}$

Residuos al infinito

Teorema. Si una función f es analítica en todo el plano finito a excepción de un número finito de puntos singulares interiores a un contorno cerrado simple C orientado positivamente, entonces

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)\right]_{z=z_0}$$

f).- Ceros de funciones analíticas.

Hay una relación estrecha entre los ceros y los polos de una función, de hecho más adelante veremos cómo los ceros pueden llevar a polos; sin embargo, previo a ello, veamos algunas ideas que nos pueden ser útiles en esto.

Anteriormente hemos visto que si f es una función analítica en un punto z_0, entonces existen todas sus derivadas $f^{(n)}(z_0)$ (para $n = 1, 2, \ldots$); lo anterior permite enunciar el siguiente teorema.

Teorema. Una función f analítica en z_0, tiene un cero de orden m en z_0 si, y solo si, existe una función g, analítica y no nula en z_0, tal que

$$f(z)=(z-z_0)^m g(z)$$

Ejercicios.

Use el teorema de los residuos de Cauchy para evaluar las integrales, sobre la circunferencia $|z| = 3$ recorrida en sentido positivo, de las funciones

a) $f(z) = \dfrac{e^{-z}}{z^2}$

b) $f(z) = \dfrac{e^{-z}}{(z-1)^2}$

c) $f(z) = z^2 \exp\left(\dfrac{1}{z}\right)$

d) $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2 - 2z}$

Soluciones: (a) $-2\pi i$; (b) $-2\pi i/e$; (c) $\pi i/3$; (d) $2\pi i$.

Cálculo de residuos mediante fracciones parciales

En situaciones en las que tenemos una función racional $f(z)$ de la forma

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

donde $q(z)$ es un polinomio de grado mayor al de $p(z)$, es posible usar la expansión en fracciones parciales para encontrar los valores del residuo, tal como lo establece el siguiente teorema.

Teorema. Sea $f(z)$ una función racional, con N polos simples z_k, entonces la expansión en fracciones parciales de $f(z)$ tiene la forma

$$f(z) = \frac{A_1}{(z-z_1)} + \frac{A_2}{(z-z_2)} + \frac{A_3}{(z-z_3)} + \ldots + \frac{A_N}{(z-z_N)}$$

donde los números complejos A_k, denominados coeficientes de la expansión, están dados por

$$A_k = \mathrm{Res}[f(z)]_{z=z_k} = [(z-z_k)f(z)]_{z=z_k} \ .$$

e).- Residuos y polos.

Hasta aquí, cuando una función $f(z)$ tiene una singularidad esencial en z_0, la única manera que tenemos para determinar el residuo en dicho punto consiste en obtener el desarrollo de Laurent alrededor de z_0 y elegir el coeficiente apropiado, correspondiente al término $(z - z_0)^{-1}$ de la parte principal de dicho desarrollo.

Pero si la función tiene un polo en z_0 no es necesario obtener todo el desarrollo de Laurent alrededor de z_0 para encontrar el coeficiente que buscamos.

Un ejemplo.

Calcular la integral

$$\int_C \frac{z-2}{z(z-1)}dz$$

donde C es la circunferencia $|z| = 3$ orientada positivamente.

Solución. Sea $f(z) = \dfrac{z-2}{z(z-1)}$. Los puntos singulares de f son $z_1 = 0$ y $z_2 = 1$. Se observa que ambos son puntos interiores de C, además, z_1 y z_2 son polos simples de f. De esta forma,

$$\operatorname{Res}\left[f(z)\right]_{z=z_0} = \operatorname{Res}\left[\frac{z-2}{z(z-1)}\right]_{z=0} = 2$$

y

$$\operatorname{Res}\left[f(z)\right]_{z=z_0} = \operatorname{Res}\left[\frac{z-2}{z(z-1)}\right]_{z=1} = -1$$

Como z_1 y z_2 son puntos singulares aislados de f y f es una función analítica en C y en su interior, salvo en z_1 y z_2, entonces por el Teorema de los Residuos

$$\int_C \frac{z-2}{z(z-1)}dz = 2\pi i\left[2+(-1)\right] = 2\pi i$$

Otro ejemplo.

Calcular la integral

$$\int_C \left(1+z+z^2\right)\left(e^{1/z} + e^{1/(z-1)} + e^{1/(z-2)}\right)dz$$

donde C es un contorno cerrado simple que contiene en su interior a los puntos $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ y $z_3 = 2$.

Solución. En este caso, tenemos que

$$f(z) = \left(1+z+z^2\right)\left(e^{1/z} + e^{1/(z-1)} + e^{1/(z-2)}\right)$$

la cual puede ser reescrita como la suma de las funciones $f_1(z)$, $f_2(z)$ y $f_3(z)$ definidas, respectivamente, como

$$f_1(z) = e^{1/z}\left(1+z+z^2\right)$$

$$f_2(z) = e^{1/(z-1)}\left(1+z+z^2\right)$$

$$f_3(z) = e^{1/(z-2)}\left(1+z+z^2\right)$$

Calculemos el residuo de $f_1(z)$ en $z_1 = 0$. Se tiene que $f_2(z)$ y $f_3(z)$ son analíticas en $z_1 = 0$, luego poseen desarrollo de Taylor. De esta forma, el residuo de $f(z)$ en $z_1 = 0$ viene dado por el coeficiente de z^{-1} en el desarrollo de Laurent de $f_1(z)$ alrededor de $z_1 = 0$, De este resultado, vemos que el residuo de $f(z)$ en el punto $z = 0$ es

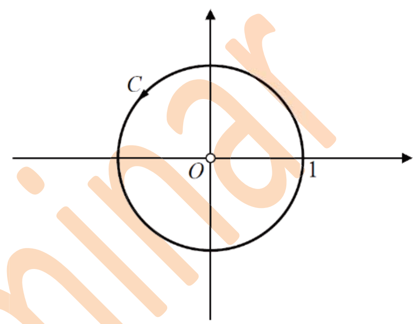
$$\text{Res}\left[f(z)\right]_{z=z_0} = \text{Res}\left[e^{1/z}\right]_{z=0} = 1$$

por lo que

$$\int_C e^{1/z} dz = 2\pi i$$

Otro ejemplo.
Considere la integral

$$\int_C z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$$



donde C es el círculo unitario orientado positivamente centrado en el origen, a saber, $|z| = 1$.

Solución. Para determinar el residuo, retomamos la representación en series de Maclaurin para sen z, a saber

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots \qquad \text{(Válida para } |z| < \infty\text{)}$$

y la usamos para escribir

$$z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) = z - \frac{1}{3!}\frac{1}{z} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^3} - \frac{1}{7!}\frac{1}{z^5} + \ldots \qquad \text{(Válida para } 0 < |z| < \infty\text{)}$$

Como podemos ver, el coeficiente de z^{-1}, y que corresponde al residuo del desarrollo, es $-\frac{1}{3!}$ por lo que

$$\int_C z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i\left(-\frac{1}{3!}\right) = -i\frac{\pi}{3}$$

Un ejemplo adicional.
Muestre que

$$\int_C e^{1/z^2} dz = 0$$

Solución. Considerando que la serie de Laurent para el integrando está dada por

$$e^{1/z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! z^{2n}}$$

Vemos que el coeficiente de z^{-1} es cero, ya que en la serie $n = 1$ corresponde a z^{-2}, con lo que se demuestra lo pedido.

Por lo tanto, para determinar si un punto singular aislado z_0 es un punto singular removible de $f(z)$, basta con verificar que

$$\lim_{z\to z_0} f(z)$$

existe y es finito.

Un ejemplo.

Verificar que $z_0 = 0$ es un punto singular removible de $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$.

Solución. Para verificar lo solicitado bastará mostrar que

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\sin z}{z}$$

existe; así que aplicando la regla de L'Hopital se tiene que

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z\to z_0} \frac{\cos z}{1} = 1$$

por lo tanto, al existir el límite, se demuestra que $z_0 = 0$ es un punto singular removible de la función $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$.

c).- Residuo.

Definición. Sea $f(z)$ una función analítica sobre un contorno cerrado simple C y en todo punto interior a C, salvo en z_0. El residuo de $f(z)$ en z_0, que se denota por $\operatorname{Res}\left[f(z)\right]_{z=z_0}$, está definido por

$$\operatorname{Res}\left[f(z)\right]_{z=z_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz$$

Cuando z_0 es un punto singular aislado de una función f, hay un número positivo R_2 tal que f es analítica en todos los puntos z para los cuales $0 < |z - z_0| < R_2$.

Consecuentemente, la función $f(z)$ tiene una representación en serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

donde los coeficientes a_n y b_n tienen cierta representación integral vista anteriormente.

En particular, los coeficientes de la parte principal (b_n) están dados por

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{-n+1}} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Si $p(z)$ y $q(z)$ son analíticas en z_0 con $p(z_0) \neq 0$ y $q(z_0) = 0$, entonces z_0 es un punto singular aislado de $f(z)$. Por otra parte, como $q(z)$ es analítica en z_0 y $q(z_0) = q'(z_0) = \cdot\cdot\cdot = q^{(m-1)}(z_0) = 0$ y $q^{(m)}(z_0) \neq 0$, entonces el desarrollo de Taylor de $q(z)$ alrededor de z_0 es

$$q(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

luego

$$\frac{q(z)}{(z - z_0)^m} = a_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-m}$$

por tanto,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{q(z)}{(z - z_0)^m} = a_m \neq 0$$

De esta forma,

$$\lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^m f(z) \right] = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^m \frac{p(z)}{q(z)} \right]$$

$$\lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^m f(z) \right] = \left(\lim_{z \to z_0} p(z) \right) \left(\lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)^m}{q(z)} \right)$$

$$= p(z_0) \left(\frac{1}{a_m} \right) \neq 0, \infty.$$

Lo cual indica que z_0 es un polo de orden m de $f(z)$.

Un ejemplo.

Establecer los puntos singulares aislados de la función $f(z) = \dfrac{e^z}{\sin z}$, así como el orden de estos.

Solución. En este caso se tiene que

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

con $p(z) = e^z$ y $q(z) = \sin z$; en ambos casos, advertimos que se trata de funciones analíticas.

Analizando los ceros de $q(z)$ encontramos que los puntos singulares aislados de $f(z)$ son

$z_n = n\pi$, con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

De esta forma, $p(z_n) \neq 0$, $q(z_n) = 0$ y $q'(z_n) \neq 0$, para todo n. Por tanto, z_n es un polo simple de $f(z)$ para todo n.

Un ejercicio.

Realice el mismo análisis para la función $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z - 3i)}$ (revisada anteriormente) y corrobore sus resultados previos.

Existen otros procedimientos más adecuados para verificar si un punto es o no un polo. El siguiente teorema nos muestra un procedimiento para verificar si un punto es un polo sin necesidad de construir su serie de Laurent.

Teorema. Si $f(z)$ tiene un polo en z_0, entonces $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$.

Demostración. Sea $f(z)$ una función con un polo de orden m en z_0, por lo que el desarrollo de Laurent para $f(z)$ toma la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \ldots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m}$$

donde $b_m \neq 0$. Multiplicando ambos lados por $(z - z_0)^m$ tenemos

$$(z - z_0)^m f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+m} + b_1 (z - z_0)^{m-1} + b_2 (z - z_0)^{m-2} + \ldots + b_m$$

Del resultado anterior tenemos

$$\lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^m f(z) \right] = b_m$$

como

$$|(z - z_0)^m| \to 0, \text{ cuando } z \to z_0,$$

la ecuación anterior indica que

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty,$$

con lo que se demuestra el enunciado del teorema.

El teorema anterior no sólo nos permite identificar si un punto es un polo, sino también el orden del mismo. Basándose en este teorema, las siguientes reglas nos permiten identificar el orden del polo.

- **Regla I**. Sea z_0 un punto singular aislado de $f(z)$. Si existe el

$$\lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^m f(z) \right]$$

  y si dicho límite no es cero ni infinito, entonces $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0.

- **Regla II**. Si el polo de $f(z)$ en z_0 es de orden m, entonces

$$\lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^n f(z) \right] = \begin{cases} 0 & n > m \\ \infty & n < m \end{cases}$$

Un ejemplo.

Establezca el orden de los polos que presenta la función

$$f(z) = \frac{1}{z^2 (z - 3i)}$$

Solución. En este caso vemos que $f(z)$ presenta polos en $z = 0$ y $z = 3i$. Así que analicemos estos polos por separado.

Ejemplos.

i. Encontrar los puntos singulares aislados de la función $f(z)$ definida por

$$f(z) = \frac{\sin z}{z - 4i}.$$

Solución. Se tiene que $z = 4i$ es el único punto singular de la función $f(z)$, dado que $f(z)$ es el cociente de las funciones enteras $f_1(z) = \sin z$ y $f_2(z) = z - 4i$, siendo $4i$ el único cero de $f_2(z)$. Así que $z = 4i$ es un punto singular aislado.

ii. Encontrar los puntos singulares aislados de la función $f(z)$ dada por

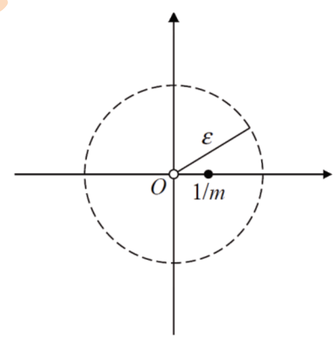
$$f(z) = \frac{z+1}{z\left(z^2+1\right)}.$$

Solución. En este caso tenemos tres puntos singulares aislados, a saber, $z_1 = 0$, $z_2 = i$ y $z_3 = -i$. Dado que $f(z)$ es el cociente de las funciones enteras $f_1(z) = z + 1$ y $f_2(z) = z(z^2 + 1)$, siendo 0 y $\pm i$ los únicos cero de $f_2(z)$. Así que estos tres puntos son singulares aislados.

iii. Encontrar los puntos singulares aislados de la función $f(z)$ definida por

$$f(z) = \frac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{z}\right)}.$$

Solución. En este caso, la función $f(z)$ tiene los puntos singulares $z = 0$ y $z = 1/n$ (con $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$), todos ubicados sobre el eje real entre $z = -1$ y $z = 1$. Todos los puntos son singulares aislados excepto $z = 0$. El punto singular $z = 0$ no es aislado porque cualquier vecindad alrededor de $z = 0$ contiene otro punto singular de la función.



Más precisamente, cuando especificamos un radio ε para la vecindad, tal como se muestra en la figura, habrá un entero positivo m tal que $m > 1/\varepsilon$. Esto lleva a que $0 < 1/m < \varepsilon$, lo que implicará que el punto $z = 1/m$ siempre queda dentro de la vecindad $|z| < \varepsilon$.

Tipos de singularidades aisladas

Antes de revisar los diferentes tipos de singularidades aisladas, vamos a definir la *parte principal* de un desarrollo de Laurent.

Definición. Sea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \tag{5.1}$$

el desarrollo de Laurent para la función $f(z)$ alrededor del punto singular aislado z_0. La parte del desarrollo de Laurent de $f(z)$ que tiene potencias negativas de $(z - z_0)$ se denomina **parte principal** de f en z_0.

En otras palabras, el término

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

es la parte principal de f en z_0.

c) $\frac{z+3}{(z-1)(z-4)}\,;\, z_0 = 2$

d) $e^{-z^2}\sinh(z+2)\,;\, z_0 = 0$

e) $\frac{e^z}{z(z-1)}\,;\, z_0 = 4i$

f) $z\coth 2z\,;\, z_0 = 0$

g) $\sec \pi z\,;\, z = 1$

SOLUCIÓN. (a) $|z| < 2$, (b) $|z| < \pi$, (c) $|z-2| < 1$, (d) $|z| < \infty$, (e) $|z-4i| < 4$, (f) $|z| < \pi/2$, (g) $|z-1| < 1/2$

Sección 4d:

11.- Encuentre la serie de Laurent que represente a la función $f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right)$ en el dominio $0 < |z| < \infty$.

SOLUCIÓN. $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{z^{4n}}$.

12.- Derive la representación en Serie de Laurent

$$\frac{e^z}{(z+1)^2} = \frac{1}{e}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{(n+2)!}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{(z+1)^2}\right] \quad (0<|z+1|<\infty)$$

13.- Encuentre una representación en potencias negativas de z, que sea válida cuando $1 < |z| < \infty$, para la función $f(z)=\frac{1}{1+z}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+(1/z)}$.

SOLUCIÓN. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{z^n}$

14.- Dé dos expansiones en serie de Laurent para la función $f(z)=\frac{1}{z^2(1-z)}$ y especifica la región de validez de cada una de ellas.

SOLUCIÓN. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2} \quad (0<|z|<1)$; $-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{z^n} \quad (1<|z|<\infty)$.

15.- Represente la función $f(z)=\frac{z+1}{z-1}$

a) mediante su Serie de Maclaurin, y establece dónde es válida esta representación;
b) mediante su Serie de Laurent en el dominio $1 < |z| < \infty$.

SOLUCIÓN. (a) $-1-2\sum_{n=1}^{\infty} z^n \quad (|z|<1)$; (b) $1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} \quad (1<|z|<\infty)$

Ejercicios sugeridos.

Sección 4a:

1.- Determine, en caso de existir, el intervalo de convergencia para las siguientes series, determinando el valor central (a) y el radio de convergencia (ρ):

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{10^n}(x-4)^n$
b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n6^n}(2x-1)^n$
c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^{2n-1}}(x-1)^{2n}$

2.- Encuentre la Serie de Maclaurin para las siguientes funciones reales $f(x)$:

a) $f(x) = x^2 e^x$
b) $f(x) = xe^{-2x}$
c) $f(x) = x \sin 3x$

3.- Encuentre la Serie de Taylor, centrada en el valor a dado, para las siguientes funciones reales $f(x)$:

a) $f(x) = \sin x$; con $a = \pi/4$.
b) $f(x) = \cos x$; con $a = \pi/3$.
c) $f(x) = 1/x$; con $a = 2$.

4.- Considerando los ejercicios 2 y 3 anteriores.

a) Escriba los primeros 4 términos de las series encontradas y llámele $f_{aprox}(x)$, en cada caso;
b) Evalúe $f_{aprox}(x)$ en $x = c$ para tener $f_{aprox}(c)$. Considere $c = 0.1$ para los ejercicios 2, y $c = 1.1a$ para los ejercicios 3.
c) Encuentre el error relativo que se tiene al considerar la serie parcial $f_{aprox}(x)$ al evaluarla cerca del valor central, para ello calcule el cociente $f_{aprox}(c)/f(c)$.
   El error relativo nos da una idea de qué tan buena es una aproximación o, en el caso del trabajo en un laboratorio, de la calidad de una medición.

Sección 4b:

5.- Muestre que si

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{z_n} = \bar{S}$$

6.- Encuentre la región de convergencia de

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}$

Los dos teoremas anteriores nos permiten afirmar que si una función $f(z)$ está representada con una serie de potencias en una región R, la serie que se obtiene por diferenciación término a término converge a $f'(z)$ dentro de R.

Este procedimiento puede repetirse un número indefinido de veces.

También es cierto que si se integra término a término la representación en serie de $f(z)$ a lo largo de una trayectoria contenida en R, la serie que resulta de esta operación converge a la integral de $f(z)$ efectuada a lo largo de la misma trayectoria.

iii. Multiplicación y división de series de potencias

Para revisar la multiplicación y división de series de potencias podemos, sin pérdida de generalidad, suponer que cada una de las series de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{y} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

converge dentro de cierta circunferencia $|z| = r_0$.

Las sumas $f(z)$ y $g(z)$ son entonces funciones analíticas en el disco $|z| < r_0$, y el producto de esas sumas tiene un desarrollo en serie de Maclaurin, que es válido en ese disco, dado por

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{4.12}$$

donde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \tag{4.13}$$

La serie (4.12) es igual a la serie que se obtiene al multiplicar las dos series de $f(z)$ y $g(z)$ entre sí término a término y agrupando los términos que resulten con potencias iguales de z; a dicha serie se le llama **producto de Cauchy** de las dos series dadas.

Por otra parte, para analizar el cociente de dos series de potencias, supongamos que la serie $g(z) \neq 0$ en cierta vecindad del origen.

El cociente $h(z) = f(z)/g(z)$ es analítico en esa vecindad y por eso admite un desarrollo de Maclaurin dado por

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \tag{4.14}$$

donde $d_0 = h(0)$, $d_1 = h'(0)$, $d_2 = h''(0)/2!$, etc.

$$\int_C \frac{dz}{(z-i)^{n+3}} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -2 \\ 2\pi i & \text{si } n = -2 \end{cases}$$

Ejercicios.

1. Encuentre la serie de Laurent alrededor de la singularidad indicada para cada una de las siguientes funciones:

   a) $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$; $z = 0$

   b) $f(z) = \left(z + \dfrac{1}{z}\right)^7$; $z = 0$

   c) $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{(z-2)^3}$; $z = 2$

   d) $f(z) = \dfrac{\cos{}^1\!/_z}{z^3}$; $z = 0$

   e) $f(z) = \dfrac{z - \sin z}{z^3}$; $z = 0$

   f) $f(z) = (z-3)\sin\dfrac{1}{z+4}$; $z = -4$

   g) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z-2)^3}$; $z = 2$

   h) $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$; $z = -2$

2. Expanda las siguientes funciones en una serie de Laurent para las potencias indicadas y encuentre el dominio de validez.

   a) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)}$; $(z+3)$

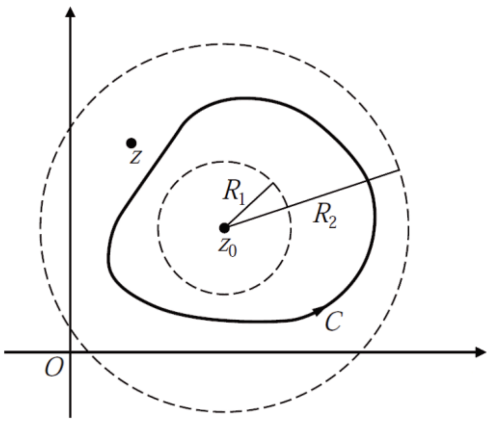
   b) $f(z) = \dfrac{1}{(z+2)}$; $(z-i)$

   c) $f(z) = \dfrac{z}{(z-i)}$; $(z-1)$

   Para resolver estos problemas pueden resultar útiles las siguientes series de Maclaurin:

   $$\frac{1}{1 \pm w} = 1 \mp w + w^2 \mp w^3 + w^4 \mp w^5 + \cdots \qquad \text{(Válidas para } |w| < 1\text{)}$$

   $$\frac{1}{(1 \pm w)^2} = 1 \mp 2w + 3w^2 \mp 4w^3 + 5w^4 \mp 6w^5 + \cdots$$



Teorema de Laurent

Sea $f(z)$ una función analítica en el anillo $R_1 < |z - z_0| < R_2$, centrado en z_0. Sea C cualquier contorno cerrado simple, orientado positivamente, que rodea a z_0 y está contenido por completo en ese dominio anular.

Entonces, en todo punto de ese dominio anular, $f(z)$ admite la representación

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \tag{4.3}$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4.4}$$

y

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{-n+1}} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4.5}$$

El desarrollo (4.3) se escribe, con frecuencia, de manera compacta como

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{4.6}$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{4.7}$$

Esta última representación es similar a la dada en (4.2); sin embargo, en cualquiera de las dos formas (4.3) o (4.6), el desarrollo en serie de potencias, así definido, se llama **serie de Laurent**.

Consideraciones acerca del Teorema de Laurent

- Si $f(z)$ es analítica en todos los puntos de la región $|z - z_0| \le R_2$, entonces el desarrollo de Laurent de $f(z)$ se convierte en el desarrollo de Taylor de $f(z)$ alrededor de z_0, ya que el integrando de los coeficientes b_n, dados por (4.5), se hace cero; mientras que los coeficientes a_n, dados por (4.4), se reducen a la fórmula integral de Cauchy extendida, a saber

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

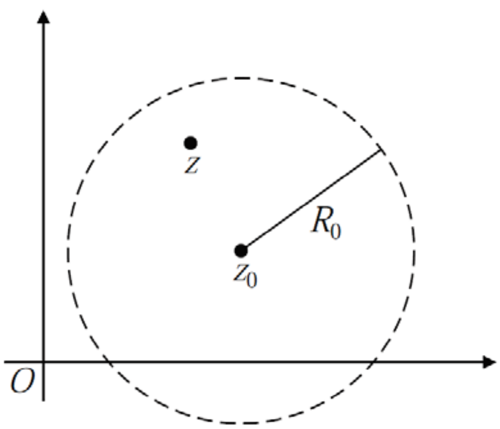
- Si $f(z)$ es analítica en la región $|z - z_0| \le R_2$ excepto en el punto z_0, entonces el desarrollo de Laurent es válido en toda la región $|z - z_0| \le R_2$.
- Si $f(z)$ es analítica en todo punto z del plano complejo que no pertenezca a cierto círculo, entonces es posible encontrar un desarrollo de Laurent de $f(z)$ que sea válido en una región anular cuyo radio exterior R_2 es infinito.

Ejemplo: Usando el criterio del cociente, halle el círculo y el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$.

Dada una función analítica ¿es siempre posible encontrar una serie de potencias cuya suma sea dicha función en algún dominio? Dicho de otro modo ¿es posible representar cualquier función analítica por medio de una serie de potencias? La respuesta es afirmativa, como veremos en el siguiente teorema.

Teorema de Taylor

Sea $f(z)$ una función analítica en todo punto del disco C_0, con centro en z_0 y radio R_0. Entonces, en cada punto z del disco C_0, $f(z)$ se expresa como



$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \qquad (4.1)$$

es decir, la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

converge a $f(z)$ cuando $|z - z_0| < R_0$.

La serie (4.1) se denomina **desarrollo en serie de Taylor**, o simplemente, desarrollo de Taylor de $f(z)$ alrededor del punto z_0.

Serie de Maclaurin

Si $z_0 = 0$, el desarrollo de Taylor (4.1) adquiere la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

y se denomina **desarrollo de Maclaurin** de $f(z)$.

Ejemplo. Dada la función $f(z)=e^z$, halle

a).- el desarrollo de Maclaurin de $f(z)$
b).- el desarrollo de Taylor de $f(z)$ alrededor de $z = -i$.

Ejercicio. Encuentre la serie de Maclaurin para las funciones $f(z)$ dadas:

a).- $f(z)$ = sen z
b).- $f(z)$ = cos z

El siguiente teorema nos garantiza que el desarrollo de Taylor alrededor de z_0 de una función $f(z)$, es la única serie de potencias que converge a $f(z)$ en un disco centrado en z_0.

Ejemplos: Use el criterio del cociente para analizar la convergencia absoluta de las siguientes series:

a).- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(z+\frac{1}{2}\right)^n$

b).- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!e^{n^2 z}$

c).- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2+i)^n}{(z+i)^n(n+i)^2}$

d).- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{z}\right)^n$

Remanente de una serie

Definición. Al establecer que la suma de una serie es un número dado S, a menudo es conveniente definir el remanente ρ_N después de N términos, usando la suma parcial S_N, de tal forma que

$$\rho_N = S - S_N$$

Con esto, vemos que $|S_N - S| = |\rho_N - 0|$, lo que nos permite establecer que una serie converge a un número S si y solo si la secuencia de remanentes ρ_N tiende a cero.

c).- Series de Taylor.

A continuación definimos una serie de potencias como una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots$$

donde z_0 y los coeficientes a_n son constantes complejas y z puede ser cualquier punto de una región dada que contiene a z_0.

En estas series que involucran la variable z, denotaremos las sumas, sumas parciales y remanentes, definidas anteriormente, como $S(z)$, $S_N(z)$ y $\rho_N(z)$, respectivamente.

Teorema de convergencia de una serie de potencias

Sea la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

definimos $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty}\left(|a_n|\right)^{1/n}$, entonces,

Teorema para la convergencia de una sucesión.

Sean $z_n = x_n + iy_n$ (para $n = 0, 1, 2, ...$), para x_n y y_n números reales, y $z = x + iy$ para x y y números reales. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z$$

si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

Ejemplo. Determine si la sucesión $z_n = \frac{1}{n} + i\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge y halle el límite si es el caso.

Ejercicio. Analice la convergencia de la sucesión

$$z_n = 2 - i\frac{(-1)^n}{n^2}$$

Si la sucesión es convergente, halle el límite de la sucesión.

Suma de una serie

Definición. Una serie infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + \cdots$$

de números complejos converge a un número complejo S, llamado **suma de la serie**, si la sucesión

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} z_n$$

($N = 0, 1, 2, \ldots$) de sumas parciales converge a S; entonces se escribe

$$\sum_{n=0}^{N} z_n = S$$

Cuando la serie no converge, decimos que dicha serie diverge.

Teorema para la convergencia de una serie.

Sean $z_n = x_n + iy_n$ (para $n = 0, 1, 2, ...$), para x_n y y_n números reales, y $S = X + iY$ para X y Y números reales. Entonces,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = S$$

si y sólo si

Para que inicie en $n=0$ bastará hacer el siguiente cambio: n se sustituye por $k+3$

$$y=\sum_{k+3=3}^{\infty}\frac{\left(2x+1\right)^{k+3}}{(k+3)^2}$$

y luego se regresa a n:
$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(2x+1\right)^{n+3}}{(n+3)^2}$$

Otro ejemplo. Supongamos que se tiene la siguiente serie:

$$y=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{5^k}{k!}x^k$$

Para que inicie en $n=0$ bastará hacer el siguiente cambio: k se sustituye por $n+2$

$$y=\sum_{n+2=2}^{\infty}\frac{5^{n+2}}{(n+2)!}x^{n+2}$$

y luego se regresa a k:

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{5^{k+2}}{(k+2)!}x^{k+2}$$

Derivando series de potencias

Una serie de potencias define una función $y(x)$ dada por

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$$

cuyo dominio es el intervalo de convergencia de la serie, en el cual es continua, derivable e integrable, lo que permite escribir la primera derivada como

$$y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}nc_n x^{n-1}$$

la segunda derivada como

$$y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)c_n x^{n-2}$$

y así sucesivamente.

La pregunta ahora es: ¿cómo sabemos si una serie converge o no?

La respuesta es sencilla, podemos usar el "criterio del cociente" (ratio test), pero antes generalicemos y ampliemos las ideas anteriores.

Si ahora consideramos la expresión general para una serie de potencias, a saber

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

entonces, la serie converge si existe el siguiente límite de las sumas parciales:

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} c_n (x-a)^n$$

Se llama **intervalo de convergencia** al conjunto de números reales x o intervalo para los que la serie converge.

Se llama **radio de convergencia** al número positivo (o cero) ρ, tal que la serie converge absolutamente si

$$|x-a| < \rho ,$$

y diverge si

$$|x-a| > \rho .$$

La región en la que

$$|x-a| < \rho$$

(donde la serie converge) se llama **intervalo de convergencia**. Dentro de su intervalo de convergencia, una serie de potencias converge absolutamente

Si $\rho = 0$ la serie converge solo para $x = a$, si la serie converge para todo x, entonces escribimos $\rho = \infty$.

Prueba de convergencia (criterio del cociente o "ratio test")

Considerando la serie

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

y suponiendo que $c_n \neq 0$ para todo n, podemos escribir el siguiente cociente

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n (x-a)^n} \right| = |\, x-a \,| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = L$$

Si $L < 1$, la serie converge absolutamente; si $L > 1$, la serie diverge; y si $L = 1$, el criterio no es concluyente.

b) $\int_0^{\pi+2i} \cos\left(\frac{z}{2}\right) dz$

c) $\int_1^3 (z-2)^3 dz.$

RESPUESTA. a) $\frac{1+i}{\pi}$; b) $e+\frac{1}{e}$; c) 0.

21.- Sea C la frontera orientada positivamente del cuadrado cuyos lados coinciden con las líneas $x=\pm 2$ y $y=\pm 2$. Evalúe cada una de las siguientes integrales:

a) $\int_C \frac{e^{-z}dz}{z-(\pi i/2)}$;

b) $\int_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)} dz$;

c) $\int_C \frac{zdz}{2z+1}$;

d) $\int_C \frac{\cosh z}{z^4} dz$;

d) $\int_C \frac{\tan(z/2)}{(z-x_0)^2} dz$, con $-2 < x_0 < 2$.

RESPUESTA. a) 2π; b) $\frac{\pi i}{4}$; c) $-\frac{\pi i}{2}$; d) 0; e) $i\pi \sec^2\left(\frac{x_0}{2}\right)$.

22.- Sea C el círculo $|z|=3$, descrito en sentido positivo, Muestre que si

$$g(w)=\int_C \frac{2z^2-z-2}{z-w} dz$$

con $|w| \neq 3$, entonces $g(2)=8\pi i$. ¿Cuál es el valor de $g(w)$ cuando $|w|>3$?

23.- Sea C un contorno simpre cerrado cualquiera, descrito en sentido positivo en el plano z. Considerando que

$$g(w)=\int_C \frac{z^3+2z}{(z-w)^3} dz$$

muestre que $g(w)=6\pi i w$ cuando w está dentro de C y que $g(w)=0$ cuando w está fuera de C.

24.- Muestre que si f es analítica dentro y sobre un contorno cerrado C, y z_0 no está dentro de C, entonces

$$\int_C \frac{f'(z)}{z-z_0} dz = \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$$

25.- Evalúe $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z^2dz}{z^2+4}$ donde C es el cuadrado con vértices en ± 2, $\pm 2+4i$ recorrido en dirección contrarreloj.

RESPUESTA. i

b) $u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$

c) $u(x,y) = \sinh x \sin y$

d) $u(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$

RESPUESTA. a) $v(x,y) = x^2 - y^2 + 2y$; b) $v(x,y) = 2y - 3x^2y + y^3$; c) $v(x,y) = -\cosh x \cos y$; d) $v(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

11.- Considere la función $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ analítica en un dominio D que excluye al origen. Use las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares y asumiendo la continuidad de las derivadas parciales, muestre que la función $u(r,\theta)$ satisface la ecuación diferencial parcial

$$r^2 u_{rr}(r,\theta) + r u_r(r,\theta) + u_{\theta\theta}(r,\theta) = 0$$

Que corresponde a la *forma polar de la Ecuación de Laplace*. Muestre que esto también es válido para la función $v(r,\theta)$.

12.- Determine cuáles de las siguientes funciones u son armónicas. Para cada función armónica, encuentre la función armónica conjugada v y exprese $u + iv$ como una función analítica de z.

a) $u(x,y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$

b) $u(x,y) = 2xy + 3xy^2 - 2y^3$

c) $u(x,y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y$

d) $u(x,y) = e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2)$

RESPUESTA. a) $v(x,y) = 4xy - x^3 + 3xy^2 + C$, $f(z) = 2z^2 - iz^3 + iC$; b) En este caso, $u(x,y)$ no es armónica; c) $v(x,y) = ye^x \cos y + xe^x \sin y + C$, $f(z) = ze^z + iC$; d) $v(x,y) = -e^{2xy}\cos(x^2 - y^2) + C$, $f(z) = -ie^{ix^2} + iC$.

Sección 3e:

13.- Evalúe las siguientes integrales:

a) $\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - i\right)^2 dt$

b) $\int_0^{\pi/6} e^{i2t} dt$

c) $\int_0^{\infty} e^{-zt} dt$, con $\operatorname{Re} z > 0$.

RESPUESTA. a) $-\frac{1}{2} - i \ln 4$; b) $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}$; c) $\frac{1}{z}$.

14.- Muestre que si m y n son enteros, entonces

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta}\, e^{-in\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & \text{cuando } m \neq n \\ 2\pi & \text{cuando } m = n \end{cases}$$

$$\int_C \frac{dz}{\left(z^2+4\right)^2} = \int_C \frac{dz}{\left(z+2i\right)^2\left(z-2i\right)^2} = \int_C \frac{\frac{1}{\left(z+2i\right)^2}dz}{\left(z-2i\right)^2}$$

En este caso advertimos que $f(z) = \frac{1}{\left(z+2i\right)^2}$ no presenta singularidad dentro (ni sobre) el contorno C, por lo que es factible aplicar la extensión de la fórmula integral de Cauchy con $z_0 = 2i$ y $n = 1$, por lo que

$$\int_C \frac{f(z)}{\left(z-z_0\right)^2}dz = \frac{2\pi i f'(z_0)}{n!} = \frac{2\pi i f'(2i)}{1!}$$

$$= 2\pi i\left(\frac{-2}{\left(z_0+2i\right)^3}\right) = \frac{-4\pi i}{\left(2i+2i\right)^3}$$

Por lo que

$$\int_C \frac{dz}{\left(z^2+4\right)^2} = \frac{\pi}{16}$$

Ejercicios sugeridos.

Repaso:

1.- Muestre que

a) $e^{(2\pm 3\pi i)} = -e^2$

b) $e^{\left(\frac{2+\pi i}{4}\right)} = \sqrt{\frac{e}{2}}(1+i)$

c) $e^{(z+\pi i)} = -e^z$

2.- Muestre que $\left|e^{z^2}\right| \leq e^{|z|^2}$.

3.- Encuentre todos los valores de z tales que

a) $e^z = -2$

b) $e^z = 1 + i\sqrt{3}$

c) $e^{(2z-1)} = 1$

RESPUESTA. a) $z = \ln 2 + (2n+1)\pi i$; b) $z = \ln 2 + \left(2n + \frac{1}{3}\right)\pi i$; c) $z = \frac{1}{2} + n\pi i$.

4.- (a) Muestre que si e^z es real, entonces $\operatorname{Im} z = n\pi$ (con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). (b) Si e^z es un imaginario puro, ¿qué restricción se requiere para z?

A continuación veremos que si una función es analítica en un punto, sus derivadas de todos los órdenes existen en ese punto y son también analíticas ahí.

Previo a este resultado veremos un resultado interesante que se obtiene a través del Teorema de Cauchy-Goursat. Este resultado se conoce como *fórmula integral de Cauchy*.

Si consideramos una función analítica sobre y en el interior de un contorno cerrado simple, basta con conocer los valores que ella toma sobre ese contorno, para determinar los valores que toma en el interior del mismo.

Fórmula integral de Cauchy.

Definición. Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio simplemente conexo D. Sea C un contorno cerrado simple perteneciente a D. Sea z_0 un punto interior de C. Entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z - z_0)}dz$$

La expresión anterior se denomina *fórmula integral de Cauchy*.

El siguiente ejemplo aclara el uso de esta fórmula en la evaluación de integrales.

Ejemplo.

Hallar el valor de la integral $\int_c \frac{dz}{(z^2+4)}$, donde C es la circunferencia $|z - i| = 2$.

Solución. Para resolver esta integral veamos si podemos aplicar alguno de los teoremas vistos anteriormente, para ello analicemos la posible analiticidad del integrando en el contorno C.

El integrando presenta dos puntos en los que se indefine ($z = \pm 2i$), uno de los cuales ($z = 2i$) se ubica dentro del contorno C, por lo que no es posible aplicar el Teorema de Cauchy-Goursat; para investigar la factibilidad de aplicar la fórmula integral de Cauchy, procedemos de la siguiente forma.

Factorizando el denominador, podemos escribir

$$\int_C \frac{dz}{(z^2+4)} = \int_C \frac{dz}{(z+2i)(z-2i)} = \int_C \frac{\frac{1}{(z-2i)}dz}{(z+2i)} = \int_C \frac{\frac{1}{(z+2i)}dz}{(z-2i)}$$

En la primera posibilidad, la función $f(z) = \frac{1}{(z-2i)}$ presenta la singularidad ($z = 2i$) que cae dentro del contorno C, por lo que no permite aplicar la fórmula integral de Cauchy; por otro lado, $f(z) = \frac{1}{(z+2i)}$ no presenta singularidad dentro (ni sobre) el contorno C, por lo que es factible aplicar la fórmula, así que tomamos

R es la región cerrada que consta de todos los puntos dentro y sobre C excepto los puntos interiores a cada C_j (R es un dominio múltiplemente conexo).

Se denota por B la frontera completa orientada de R que consta de C y todos los C_j, descrita en una dirección tal que los puntos de R se encuentran a la izquierda de B. En este caso, si una función f es analítica en R, entonces

$$\int_B f(z)dz = 0$$

Ejemplo. Demostrar que

$$\int_B \frac{dz}{z^2\left(z^2-1\right)} = 0$$

donde B consta de la circunferencia $|z| = 2$ descrita en la dirección positiva, y de las circunferencias $|z+1| = 1/2$, $|z| = 1/2$ y $|z-1| = 1/2$, descritas en la dirección negativa.

Integral indefinida

El Teorema de Cauchy-Goursat es una herramienta valiosa cuando se trata de integrar una función analítica alrededor de un contorno cerrado. En caso de que el contorno no sea cerrado, existen métodos que se pueden deducir a partir de dicho teorema y que facilitan el cálculo de la integral considerada.

El siguiente teorema se conoce como *principio de independencia de la trayectoria*.

Principio de independencia de la trayectoria. Sea $f(z)$ una función analítica en todo punto de un dominio simplemente conexo D y sean z_1 y z_2 dos puntos de D. Entonces, si usamos contornos contenidos en D, el valor de

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$$

no dependerá del contorno utilizado para ir de z_1 a z_2.

Demostración. Sea D un dominio simplemente conexo y C_1 y C_2 dos contornos en D sin intersección que van de z_1 a z_2. Se tiene que los contornos C_1 y $-C_2$ forman un contorno cerrado simple, que denominaremos C. Luego, por el Teorema de Cauchy-Goursat si

$$\int_C f(z)dz = 0$$

pero

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{-C_2} f(z)dz$$

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz$$

Por ejemplo, integrales como

$$\int_C \sin z dz \ , \ \int_C \cosh z dz \ \text{ y } \int_C e^z dz$$

deben anularse si C es un contorno cerrado simple cualquiera. En todos estos casos, el integrando es una función entera.

Obsérvese que la dirección de integración en la ecuación (3.43) no afecta el resultado pues $\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$.

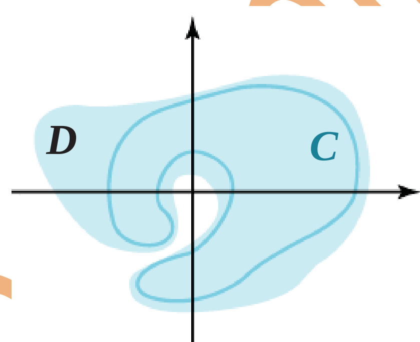
Ejemplo.

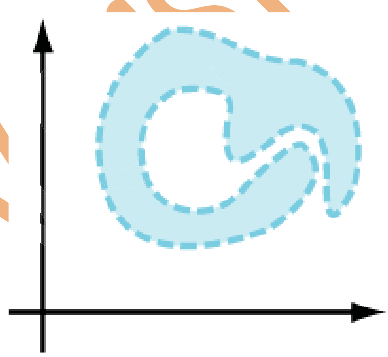
Verifique que

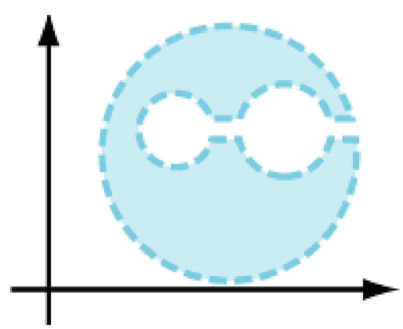
$$\int_C z^n dz = 0$$

donde n es un entero positivo y C es la circunferencia $|z| = r$, con $r > 0$.

Dominio simplemente conexo. Un dominio D se dice simplemente conexo si todo contorno cerrado simple C dentro del mismo encierra sólo puntos de D.







f).- Integrales de funciones de variable compleja.

La integración de una función compleja de variable compleja se define sobre curvas en el plano complejo en vez de sobre intervalos de la recta real, como vimos en las secciones previas. Estas curvas se conocen como *contornos*, así que a continuación veremos con un poco más de detalle estas trayectorias. Para entender, y estar en condiciones de aplicar, estas clases de curvas (adecuadas para el estudio de las integrales de una función de variable compleja) se hace necesario que veamos algunas definiciones.

Curva. Una curva C es un conjunto de puntos $z = x + iy$ en el plano complejo tales que

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \le t \le b$$

donde $x(t)$ e $y(t)$ son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$. Los puntos de C se pueden describir mediante la ecuación

$$z(t) = x(t) + iy(t) \qquad a \le t \le b$$

y se dice que $z(t)$ es continua, ya que $x(t)$ y $y(t)$ son continuas.

Curva suave. Una curva C se llama *curva suave*, si $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ existe y es continua en el intervalo $a \le t \le b$ y si $z'(t)$ nunca se hace cero en el intervalo.

Contorno. Un contorno o curva suave a tramos, es una curva que consta de un número finito de curvas suaves unidas por sus extremos.

Contorno cerrado simple. Sea C un contorno. Se dice que C es un contorno cerrado simple si solamente los valores inicial y final de $z(t)$ son iguales, es decir, $z(b) = z(a)$.

Integrales de línea.

Sea $f(z)$ una función de variable compleja. Sea C un contorno representado por la ecuación

$$z(t) = x(t) + iy(t) \qquad a \le t \le b$$

que se extiende del punto $\alpha = z(a)$ al punto $\beta = z(b)$.

Supongamos que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es continua a trozos en C, es decir, las partes real e imaginaria,

$$u\big(x(t), y(t)\big) \quad \text{y} \quad v\big(x(t), y(t)\big)$$

de $f(z(t))$ son funciones de t continuas por tramos.

Bajo estas condiciones, se define la integral de línea de f a lo largo de C como:

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f\big(z(t)\big)z'(t)dt \tag{3.42}$$

donde $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

De igual manera, podemos establecer que

$$\int_a^b w(t)dt = \int_a^c w(t)dt + \int_c^b w(t)dt \tag{3.34}$$

con lo que podemos integrar una función $w(t)$ continua a trozos o por segmentos, sin importar que sea discontinua en c, ya que sólo necesitamos que posea límites laterales que garanticen la existencia de las integrales por separado.

Definición. Si $u(t)$ y/o $v(t)$ son continuas a trozos en un intervalo $[a,b]$, entonces diremos que $w(t)$ es continua a trozos en dicho intervalo.

El teorema fundamental del cálculo sobre primitivas puede extenderse a las integrales del tipo (3.33), para lo cual supongamos que las funciones

$$w(t) = u(t) + i\, v(t)$$

y

$$W(t) = U(t) + i\, V(t)$$

son continuas en el intervalo $a \leq t \leq b$.

Si $W'(t) = w(t)$, para $a \leq t \leq b$, entonces

$$U'(t) = u(t)$$

y

$$V'(t) = v(t).$$

Por lo tanto

$$\int_a^b w(t)dt = U(t)\Big|_a^b + iV(t)\Big|_a^b$$

$$\int_a^b w(t)dt = \left[U(b) + iV(b)\right] - \left[U(a) + iV(a)\right]$$

es decir

$$\int_a^b w(t)dt = W(t)\Big|_a^b = W(b) - W(a) \tag{3.35}$$

Finalmente estableceremos una propiedad básica de los valores absolutos de las integrales; para ello, tomemos $a < b$ y supondremos que el valor de la integral definida en la ecuación (3.33) es un número complejo no nulo z_0.

Si r_0 es el módulo y θ_0 es un argumento de z_0, tenemos que

$$\int_a^b w(t)dt = z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \tag{3.36}$$

de donde

$$r_0 = \int_a^b e^{-i\theta_0} w(t)dt \tag{3.37}$$

Teorema. Si una función $f(z) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ es analítica en un dominio D, sus funciones componentes u y v son armónicas en D.

Demostración. Supuesta $f(z)$ analítica en D, se deben cumplir las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u_x(x,y) = v_y(x,y) \tag{3.13}$$

y

$$u_y(x,y) = -v_x(x,y) \tag{3.14}$$

Derivando las ecuaciones anteriores respecto a x, tenemos

$$u_{xx}(x,y) = v_{yx}(x,y) \tag{3.24}$$

y

$$u_{yx}(x,y) = -v_{xx}(x,y) \tag{3.25}$$

Similarmente, si derivamos respecto a y tendremos

$$u_{xy}(x,y) = v_{yy}(x,y) \tag{3.26}$$

y

$$u_{yy}(x,y) = -v_{xy}(x,y) \tag{3.27}$$

Ahora, usando las ecuaciones (3.24) y (3.27), se ve que podemos escribir

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 \tag{3.28}$$

y usando (3.25) y (3.26) vemos que también podemos escribir

$$v_{xx}(x,y) + v_{yy}(x,y) = 0 \tag{3.29}$$

Con estos resultados [ecuaciones (3.28) y (3.29)] vemos que u y v son armónicas en D, con lo que se demuestra el teorema.

Definición. Si dos funciones dadas u y v son armónicas en un dominio D y sus derivadas parciales de primer orden satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el dominio D se dice que v es **armónica conjugada** de u.

Ejemplos.

1. Pruebe que la función $u(x,y)$ dada, es armónica.
2. Encuentre una función $v(x,y)$ tal que $f(z) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ sea analítica, es decir, encuentre la función armónica conjugada de $u(x,y)$.
3. Exprese f en términos de z, es decir, $f(z)$.

En los tres casos, considere que

a) $u(x,y) = 2x(1 - y)$

b) $u(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y$

Si suponemos que las derivadas parciales de primer orden de u y de v con respecto a x e y existen en una vecindad no nula de z_0 y que son continuas en dicho punto, entonces las derivadas parciales con respecto a r y θ tienes esas propiedades; así que

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

es decir

$$u_r = u_x \cos\theta + u_y \sin\theta \tag{3.15}$$

y

$$u_\theta = r\left(-u_x \sin\theta + u_y \cos\theta\right) \tag{3.16}$$

Similarmente, para la componente imaginaria v, se tiene

$$v_r = v_x \cos\theta + v_y \sin\theta \tag{3.17}$$

y

$$v_\theta = r\left(-v_x \sin\theta + v_y \cos\theta\right) \tag{3.18}$$

Si a continuación retomamos las ecuaciones (3.13) y (3.14)

$$u_x = v_y \tag{3.13}$$

$$v_x = -u_y \tag{3.14}$$

podemos escribir a (3.17) y (3.18) como

$$v_r = -u_y \cos\theta + u_x \sin\theta \tag{3.19}$$

y

$$v_\theta = r\left(u_y \sin\theta + u_x \cos\theta\right) \tag{3.20}$$

Usando las ecuaciones (3.19) y (3.15) en las ecuaciones (3.16) y (3.20), tenemos

$$u_\theta = -r\left(-u_y \cos\theta + u_x \sin\theta\right) = -r\left(v_r\right) \tag{3.16}$$

y

$$v_\theta = r\left(u_y \sin\theta + u_x \cos\theta\right) = r\left(u_r\right) \tag{3.20}$$

Con lo anterior, las ecuaciones de Cauchy-Riemann (3.13) y (3.14) en coordenadas polares se reescriben como

$$v_r\left(r_0,\theta_0\right) = -\frac{1}{r_0} u_\theta\left(r_0,\theta_0\right) \tag{3.21}$$

y

$$u_r\left(r_0,\theta_0\right) = \frac{1}{r_0} v_\theta\left(r_0,\theta_0\right) \tag{3.22}$$

Si ahora consideramos la trayectoria vertical ($\Delta x = 0$) tenemos que el cociente $\Delta w/\Delta z$ es

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta w}{i\Delta y} = \frac{\left[u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)\right] + i\left[v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)\right]}{i\Delta y}$$

ó

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\left[v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)\right] - i\left[u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)\right]}{\Delta y}$$

con lo que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \operatorname{Re}\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta y \to 0}\left(\frac{\left[v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)\right]}{\Delta y}\right)$$

es decir

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \operatorname{Re}\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \tag{3.10}$$

y

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \operatorname{Im}\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta y \to 0}\left(\frac{-\left[u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)\right]}{\Delta y}\right)$$

es decir

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \operatorname{Im}\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -u_y(x_0, y_0) \tag{3.11}$$

Usando las expresiones (3.10) y (3.11), ahora la expresión para la derivada dada por (3.6), se escribe como

$$f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0) \tag{3.12}$$

Las expresiones (3.9) y (3.12) no sólo nos proporcionan una forma de escribir la derivada de f en z_0 en términos de las derivadas parciales de las funciones componentes u y v, sino que también nos dan dos condiciones necesarias para la existencia de $f'(z_0)$.

Igualando las ecuaciones (3.9) y (3.12) tenemos que

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$$

lo que lleva (igualando partes real e imaginaria de ambos lados) a las dos ecuaciones siguientes.

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \tag{3.13}$$

$$v_x(x_0, y_0) = -u_y(x_0, y_0) \tag{3.14}$$

Este par de ecuaciones (3.13) y (3.14) son las **Ecuaciones de Cauchy-Riemann**, llamadas así en honor del francés Augustin Louis Cauchy y del alemán Georg Friederich Bernhard Riemann.

Ejercicios:

1. Usando la definición de derivada calcule $f'(z)$ para
   a. $f(z) = z^3 - 2z^2 + 6iz$.
   b. $f(z) = 5/z^2$.
   c. $f(z) = (3z - 4i) / (z + i)$.
2. Usando las reglas de diferenciación enunciadas anteriormente, verifique sus resultados.
3. Encuentre la derivada $f'(z)$ y evalúela en el punto z_0 dado, considerando que
   a. $f(z) = z^2 + 5iz + 3 - i$; $z_0 = 6 - i$.
   b. $f(z) = (z^2 + 2iz) / (z - i)$; $z_0 = 4 + 2i$.
   c. $f(z) = \text{sen}(z^2 + 3iz)$; $z_0 = i\pi$.

c).- Ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Las llamadas ecuaciones de Cauchy-Riemann son dos ecuaciones que deben satisfacerse en z_0 para que la derivada de una función f exista en z_0.

Que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplan es una *condición necesaria pero no suficiente* para la existencia de $f'(z)$.

Partiendo de que la función $f(z)$ se puede separar en sus componentes real e imaginaria, tal que

$$f(z) = f(x,y) = u(x,y) + i\, v(x,y) \tag{3.4}$$

y considerando que

$$z_0 = x_0 + i\, y_0 \quad \text{con} \quad \Delta z = \Delta x + i\, \Delta y$$

podemos escribir

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$

es decir

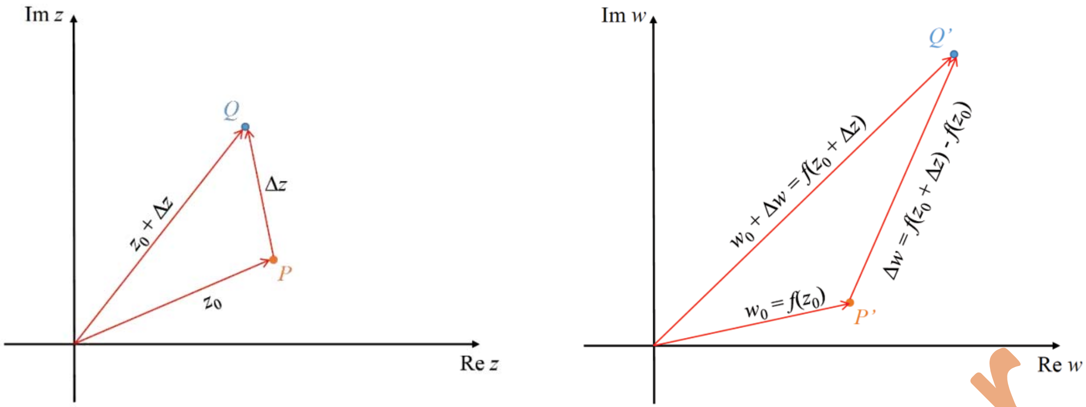
$$\Delta w = [u(x_0 + \Delta x\, , y_0 + \Delta y) - u(x_0\, , y_0)] + i\, [v(x_0 + \Delta x\, , y_0 + \Delta y) - v(x_0\, , y_0)]. \tag{3.5}$$

Por otro lado, la derivada $f'(z_0)$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

se puede escribir como

$$f'(z_0) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \text{Re}\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right) + i \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \text{Im}\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right) \tag{3.6}$$



En la ecuación (3.2) es evidente que, sin pérdida de generalidad, podemos eliminar el subíndice 0, y escribir

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{3.3}$$

ó

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{dw}{dz}$$

donde Δw denota el cambio en el valor $w = f(z)$ correspondiente a un cambio Δz en el punto en el que se evalúa f.

Ejemplos:

1. Considere una función f dada por $f(z) = 2z^3 + z - i$. Use la definición para mostrar que la derivada de la función f está dada por $f'(z) = 6z^2 + 1$.
2. Para la función $g(z) = 3z^2 - 2iz + 8$, (a) muestre que $g'(z) = 6z - 2i$; y (b) calcule $g'(5 - 2i)$.
3. Demuestre la **Regla de L'Hopital**, la cual establece que "si $f(z)$ y $g(z)$ son analíticas en z_0 y además $f(z_0) = g(z_0) = 0$, pero con $g'(z_0) \neq 0$, se cumple que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}."$$

b).- Reglas de diferenciación.

Suponga que $f(z)$, $g(z)$ y $h(z)$ son funciones analíticas de z, entonces son válidas las siguientes reglas de diferenciación.

1. $\dfrac{d}{dz}\left[f(z) \pm g(z)\right] = \dfrac{df(z)}{dz} \pm \dfrac{dg(z)}{dz} = f'(z) \pm g'(z)$.
2. $\dfrac{d}{dz}\left[cf(z)\right] = c\dfrac{df(z)}{dz} = cf'(z)$, donde c es una constante.

Sección 2d:

13.- Use los teoremas sobre límites al infinito para mostrar que

(a) $\lim_{z\to\infty} \frac{4z^2}{(z-1)^2} = 4;$

(b) $\lim_{z\to 1} \frac{1}{(z-1)^3} = \infty;$

(c) $\lim_{z\to\infty} \frac{z^2+1}{z-1} = \infty.$

14.- Con la ayuda de los teoremas sobre límites al infinito, muestre que cuando

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

con $ad - bc \neq 0$, se cumple que

(a) $\lim_{z\to\infty} T(z) = \infty$, si $c = 0$;

(b) $\lim_{z\to\infty} T(z) = \frac{a}{c}$ y $\lim_{z\to -d/c} T(z) = \infty$, si $c \neq 0$.

15.- Demuestre que $\lim_{z\to\infty} \frac{z^3-3z+2}{z^4+z^2-3z+5} = 0.$

Finalmente, con las ideas desarrolladas anteriormente, resulta válido establecer que si z_0 y w_0 son puntos en los planos complejos z y w, respectivamente, entonces

i. $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$, si y sólo si $\lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$

ii. $\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0$, si y sólo si $\lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0$

iii. $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$, si y sólo si $\lim_{z\to 0} \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} = 0$

Ejercicios sugeridos.

Sección 2a:

1.- Escribe la función $f(z) = z^3 + z + 1$ en la forma $f(z) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$.

RESPUESTA: $f(x,y) = (x^3 - 3xy^2 + x + 1) + i(3x^2y - y^3 + y)$.

2.- Suponga que $f(z) = f(x,y) = x^2 - y^2 - 2y + i(2x - 2xy)$, donde $z = x + iy$. Use las expresiones

$$x = \frac{z+z^*}{2} \quad \text{y} \quad y = \frac{z-z^*}{2i}$$

para escribir $f(z)$ en términos de z, y simplifique el resultado.

RESPUESTA. $f(z) = z^{*2} + 2iz$.

3.- Escriba la función $f(z) = z + \frac{1}{z}$ con $(z \neq 0)$ en la forma $f(z) = f(r,\theta) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$.

RESPUESTA. $f(z) = f(r,\theta) = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta$.

4.- Separe cada una de las siguientes funciones $f(z)$ en sus componentes real e imaginaria, es decir, encuentre $u(x,y)$ y $v(x,y)$ tales que $f(z) = u + iv$.

(a) $f(z) = 2z^2 - 3iz$;

(b) $f(z) = z + 1/z$;

(c) $f(z) = \frac{1-z}{1+z}$;

(d) $f(z) = z^{1/2}$;

(e) $f(z) = z + \bar{z}^2 + 5i$.

Límite absoluto

Otro resultado de aplicar la definición de límite establece que si

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

entonces

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = |w_0|$$

d).- Límites y el punto al infinito.

Plano complejo extendido

Hasta el momento el plano complejo, como lo hemos visto, no tiene claramente definido el infinito.

Sin embargo, en muchas situaciones es necesario considerar un punto al infinito; cuando esto ocurre, y el plano complejo incluye al infinito, hablamos del *plano complejo extendido*.

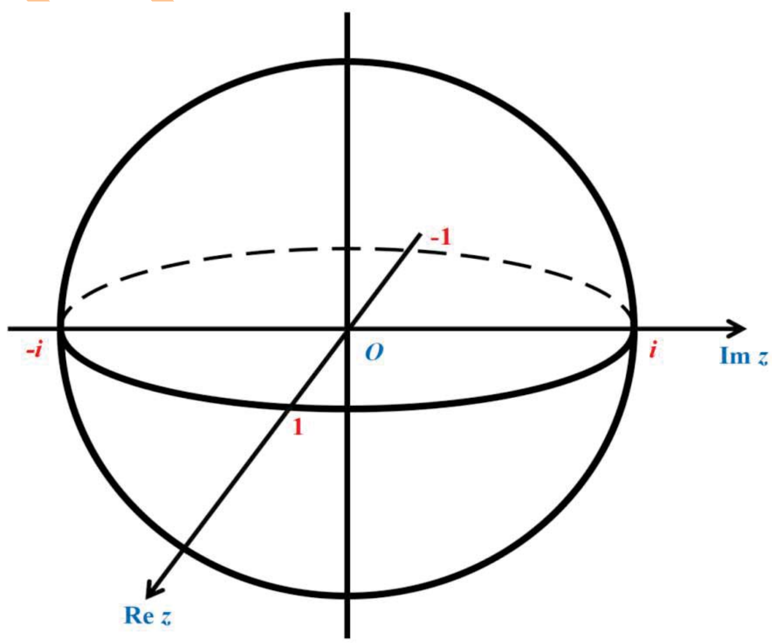
En el caso de variables reales, el infinito consta de dos puntos ubicados en los extremos negativo y positivo del eje real, en ambos casos el valor absoluto es el mismo: infinito. Para el caso de los números complejos, si queremos extender la idea nos encontramos con un problema, ya que existe un número infinito de números complejos z tales que su módulo (el análogo al valor absoluto) es infinito, para evitar esta situación trataremos con el llamado punto al infinito.

Para visualizar este punto al infinito se utiliza la siguiente idea.

Consideremos que el plano complejo pasa por el ecuador de una esfera unitaria centrada en el origen O, tal como se muestra.

A cada punto z del plano le corresponde un punto P en la superficie de la esfera.

El punto P se determina por la intersección de la recta que va del polo norte N al punto z sobre el plano.



si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(z) = u_0$$

y

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(z) = v_0$$

con lo que

$$w_0 = u_0 + iv_0$$

Teoremas útiles sobre límites

Supongamos que

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A \qquad \text{y} \qquad \lim_{z\to z_0} g(z) = B$$

entonces

i. $\lim_{z\to z_0}\left[f(z)\pm g(z)\right] = A\pm B$ (Suma de límites)

ii. $\lim_{z\to z_0}\left[f(z)g(z)\right] = AB$ (Producto de límites)

iii. $\lim_{z\to z_0}\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right] = \dfrac{A}{B}$, siempre que $B \neq 0$ (Cociente de límites)

Continuidad de una función

La condición de continuidad para una función de variable compleja $w = f(z)$, en analogía con el caso de funciones reales, se enuncia de la siguiente manera.

Definición. La función $f(z)$ *es continua* en el punto z_0 si se cumple que

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

lo que implica que $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existe, y que $f(z_0)$ también existe.

Función polinomial $P_n(z)$

Las ideas anteriormente desarrolladas nos permiten concluir que una función polinomial $P_n(z)$ es continua para todo z, donde $P_n(z)$ está definido como

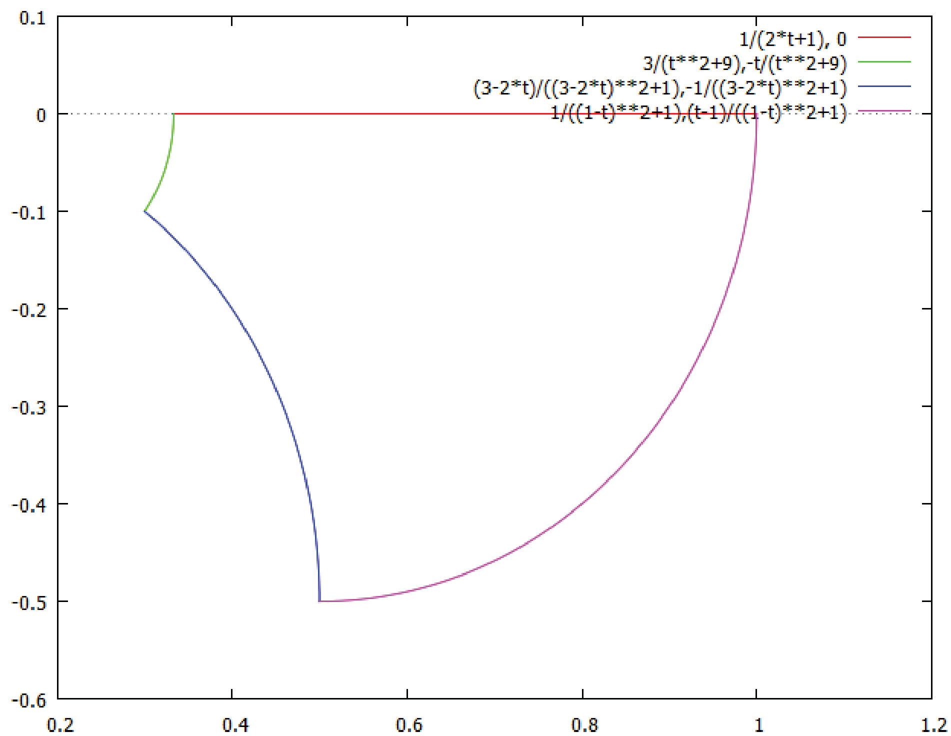
$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_1 z + a_0$$

donde n es un entero positivo.

Mientras que para $f(z) = 1 / (z + 1)$, los segmentos considerados previamente, nos llevan a

- $w = \left(\dfrac{1}{(2t+1)}, 0 \right)$
- $w = \left(\dfrac{3}{(t^2+9)}, \dfrac{-t}{(t^2+9)} \right)$
- $w = \left(\dfrac{3-2t}{(3-2t)^2+1}, \dfrac{-1}{(3-2t)^2+1} \right)$
- $w = \left(\dfrac{1}{1+(1-t)^2}, \dfrac{t-1}{1+(1-t)^2} \right)$

Este mapeo se muestra en la figura siguiente.

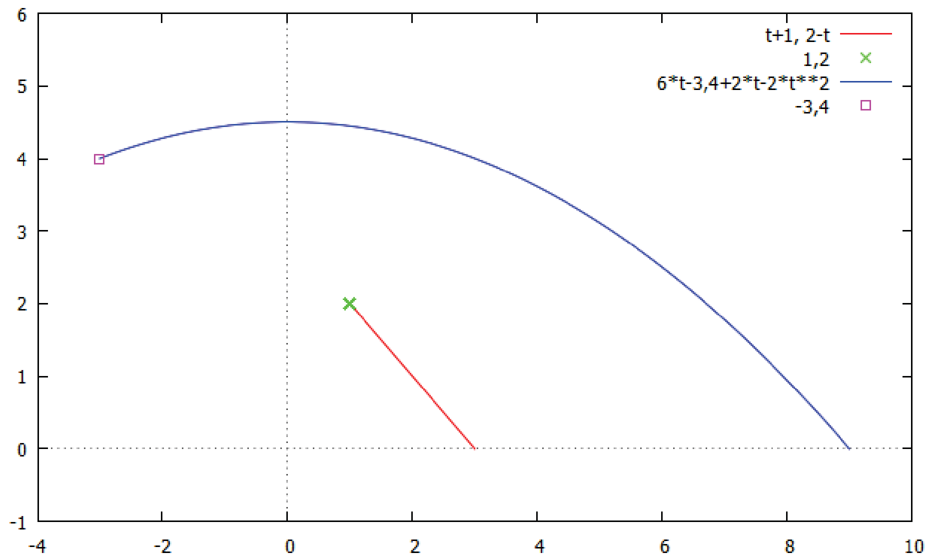


c).- Límite y continuidad de una función.

Para introducir los conceptos de límite y continuidad de una función vamos a considerar que la función $f(z)$ está definida en un dominio D y que z_0 es un punto de D.

A continuación, vamos a ver que el límite y la continuidad de la función $f(z)$ se definen de la misma manera que en el caso de variable real.

Mientras que en la figura siguiente se muestran las gráficas correspondientes al segmento de recta en el plano z y su mapeo en el plano w, para la función $f(z) = z^2$.



Ejercicios.

1. Para el segmento de recta que va del punto $z_1 = x_1 + iy_1$ al punto $z_2 = x_2 + iy_2$, encuentre el mapeo de dicho segmento bajo las siguientes transformaciones:
   a) $f(z) = e^z$; y
   b) $f(z) = 1 / (z + 1)$.
2. Usando los resultados del problema anterior, bosqueje la región del plano w en la que se mapea el rectángulo con vértices en (0,0), (2,0), (2,1) y (0,1) del plano z.

Solución.

1. Para este problema, la expresión que parametriza al segmento de recta es

$$z(t) = ((x_2 - x_1)t + x_1) + i((y_2 - y_1)t + y_1),\ \text{con } 0 \le t \le 1$$

por lo que las expresiones para el mapeo en el plano w son

$$w = f(z) = e^{x(t)}\left(\cos\left[y(t)\right] + i\sin\left[y(t)\right]\right)$$

y

$$w = f(z) = \left(\frac{x(t)+1}{\left(x(t)+1\right)^2 + \left(y(t)\right)^2}\right) - i\left(\frac{y(t)}{\left(x(t)+1\right)^2 + \left(y(t)\right)^2}\right)$$

2. En este caso, lo segmentos son

- De (0,0) a (2,0): $x(t) = 2t$, $y(t) = 0$.
- De (2,0) a (2,1): $x(t) = 2$, $y(t) = t$.
- De (2,1) a (0,1): $x(t) = 2 - 2t$, $y(t) = 1$.
- De (0,1) a (0,0): $x(t) = 0$, $y(t) = 1 - t$.

Reflexión

Un caso particular de mapeo corresponde a la reflexión del número complejo z, con respecto al eje real, el cual está dado por la función

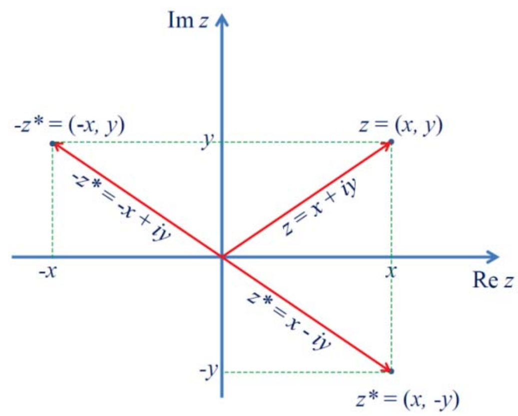
$$f(z) = z^* \tag{2.7}$$

es decir, la función que asigna a un número z su complejo conjugado representa una reflexión en el eje real; mientras que la función

$$f(z) = -z^* \tag{2.8}$$

la cual asigna a un número z el inverso aditivo de su complejo conjugado, representa una reflexión en el eje imaginario.

Lo mencionado anteriormente puede visualizarse en la figura adjunta.



Ejercicio. Represente el mapeo correspondiente a la función $f(z) = z^* + 4i$ para el segmento que va del origen al punto $z = 3 - 5i$.

Inversión

Antes de concluir con esta parte del curso, vamos a considerar la función $f(z)$ dada por

$$w = f(z) = 1 / z \tag{2.9}$$

De nueva cuenta, retomamos la representación polar de los números complejos w y z

$$w = \rho e^{i\phi} \text{ y } z = re^{i\theta}$$

para escribir la expresión (2.9) como

$$\rho e^{i\phi} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

de donde vemos que

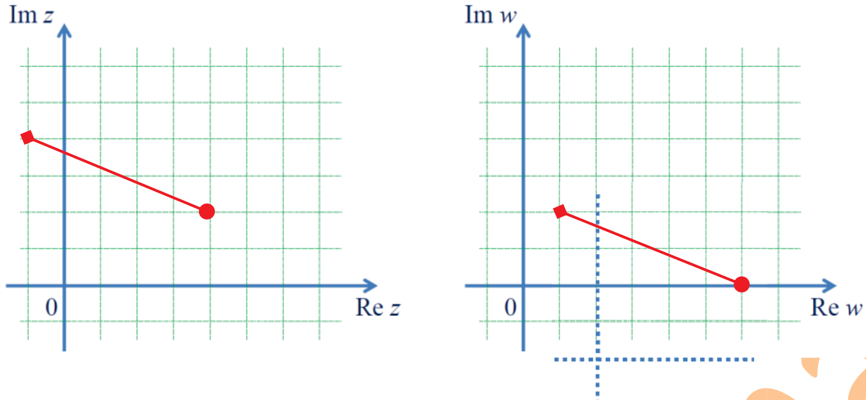
$$\rho = 1/r$$

y

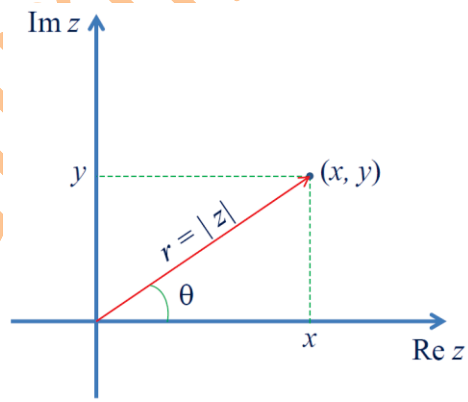
$$\phi = -\theta$$

La primera de las dos últimas expresiones muestra claramente la inversión, el interior de un círculo se mapea en el exterior y el exterior en el interior; mientras que la segunda de ellas muestra que el ángulo se invierte, tal como ocurre con el complejo conjugado.

Mientras que $g(z) = z + 2 - 2i$ traslada al segmento de recta que une los puntos $z_1 = -1 + 4i$ y $z_2 = 4 + 2i$ tal como se muestra.



Rotación



Para analizar la rotación es conveniente retomar la representación exponencial del número complejo z, a saber

$$z = re^{i\theta}$$

Tal como se puede inferir de la figura, rotar al número z un ángulo θ_0 es equivalente a sumar θ_0 al argumento de z.

Con lo anterior, podemos afirmar que la función

$$w = f(z) = ze^{i\theta_0} \qquad (2.5)$$

corresponde a una transformación o mapeo que representa una rotación pura del eje de coordenadas, es decir, que rota los ejes real e imaginario un ángulo θ_0.

Si a continuación consideramos el producto

$$w = zz_0$$

podemos usar la siguiente representación polar de dichos números

$$w = \rho e^{i\phi},\ z = re^{i\theta} \text{ y } z_0 = r_0e^{i\theta_0}$$

para tener

$$\rho e^{i\phi} = (re^{i\theta})(r_0e^{i\theta_0})$$

de donde vemos que

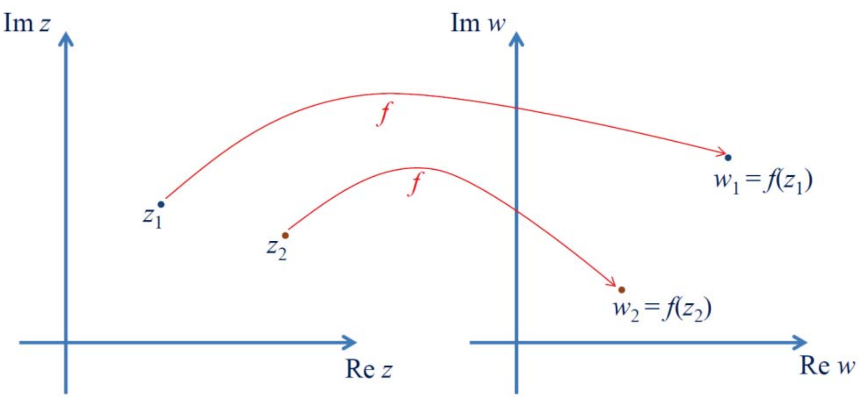
$$\rho = rr_0$$

y

$$\phi = \theta + \theta_0$$

Aquí vemos que han ocurrido dos cosas: por una parte, el módulo de z se ha modificado por un factor r_0; y por otra parte, el ángulo se ha incrementado una constante θ_0, tal como se muestra en la figura.

Para representar gráficamente esta asignación o mapeo, se requieren 2 planos complejos: el plano z y el plano w, tal como se muestra en la figura anexa.



Dado que z y w son números complejos, relacionados por la función f, es posible escribir

$$w = f(z)$$

$$u + iv = f(x + iy)$$

donde hemos considerado que

$$w = u + iv$$

y

$$z = x + iy.$$

Lo anterior permite expresar a la función de variable compleja $f(z)$ como la suma

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{2.2}$$

cuando usamos la representación rectangular; mientras que en la representación exponencial podemos escribir

$$f(z) = f(r, \theta) = u(r, \theta) + iv(r, \theta) \tag{2.3}$$

donde se ha considerado que

$$z = re^{i\theta}.$$

Ejemplo. Encuentre las partes real e imaginaria de la función $f(z) = 2z^2 - 8z$ y expréselas en forma rectangular [$u(x, y)$ y $v(x, y)$] y forma exponencial [$u(r, \theta)$ y $v(r, \theta)$].

Ejercicios. Encuentre las partes real e imaginaria de las funciones indicadas y expréselas en representación rectangular ($u(x, y)$ y $v(x, y)$) y representación exponencial ($u(r, \theta)$ y $v(r, \theta)$).

1. $f(z) = zz^*$
2. $f(z) = 1 / z$
3. $f(z) = (2z - 8)/(z^2 + 1)$

Si al realizar esta separación, en cualquiera de sus representaciones, resulta que la función v es siempre cero, entonces decimos que la función $f(z)$ es una **función real de variable compleja**. Un ejemplo de tales funciones es la primera de las listadas en el ejercicio previo, $f(z) = zz^*$.

$$\pm\sqrt{A}\exp\left(i\frac{\alpha}{2}\right)$$

donde $A = \sqrt{a^2+1}$ y $\alpha = \mathrm{Arg}(a+i)$.

(b) Con la ayuda de las identidades trigonométricas

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2} \text{ y } \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

muestre que las raíces cuadradas obtenidas en la parte (a) se pueden escribir como

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{A+a} + i\sqrt{A-a}\right)$$

24. Encuentre los cuatro ceros (raíces) del polinomio $z^4 + 4$, siendo uno de ellos

$$z_0 = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = 1+i$$

Luego use estos ceros para factorizar $z^4 + 4$ en factores cuadráticos con coeficientes reales.

RESPUESTA: $(z^2+2z+2)(z^2-2z+2)$.

25. Encuentre cada una de las raíces indicadas, localícelas gráficamente e identifique a la raíz principal.

(a) $\left(2\sqrt{3}-2i\right)^{1/2}$;

(b) $(-4+4i)^{1/5}$;

(c) $\left(2+2\sqrt{3}i\right)^{1/3}$;

(d) $(-16i)^{1/4}$;

(e) $(64)^{1/6}$;

(f) $(i)^{2/3}$.

26. Encuentre todas las raíces indicadas, localícelas en el plano complejo e identifique a la raíz principal.

(a) Raíz cúbica de 8;

(b) Raíz cuadrada de $4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$;

(c) Raíz quinta de $-16+16\sqrt{3}i$;

(d) Raíz sexta de $-27i$.

27. Encuentre las raíces cuadradas de (a) $5-12i$, (b) $8+4\sqrt{5}i$.

RESPUESTA: (a) $3-2i, -3+2i$; (b) $\sqrt{10}+\sqrt{2}i, -\sqrt{10}-\sqrt{2}i$.

Sección 1f:

28. Bosqueje los siguientes conjuntos y determine cuáles son dominios:

(a) $|z-2+i| \leq 1$;

(b) $|2z+3| > 4$;

(a) $|z - 1 + i| = 1$;

(b) $|z + i| \leq 3$;

(c) $|3z - 5 + i| > 6$;

(d) $|2z - 4i| \geq 7$.

11. Use las propiedades de conjugados y módulos para mostrar que

(a) $\overline{\bar{z} + 3i} = z - 3i$;

(b) $\overline{iz} = -i\bar{z}$;

(c) $\overline{(2 + i)^2} = 3 - 4i$;

(d) $\left|(2\bar{z} + 5)\left(\sqrt{2} - i\right)\right| = \sqrt{3}|2z + 5|$.

12. Bosqueje el conjunto de puntos determinados por la condición

(a) $\mathrm{Re}(\bar{z} - i) = 2$;

(b) $|2\bar{z} + i| = 4$.

13. Pruebe que

(a) z es real si y sólo si $\bar{z} = z$;

(b) z es ya sea real o imaginario puro si y sólo si $\bar{z}^2 = z^2$.

14. Usando las expresiones

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}\, z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

muestre que la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ se puede escribir como $z^2 + \bar{z}^2 = 2$.

Sección 1d:

15. Encuentre el argumento principal $\mathrm{Arg}\, z$ cuando

(a) $z = \frac{i}{-2-2i}$;

(b) $z = \left(\sqrt{3} - i\right)^6$.

RESPUESTA. (a) $-3\pi/4$; (b) π.

16. Use la fórmula de Moivre para derivar las siguientes identidades trigonométricas:

(a) $\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta$;

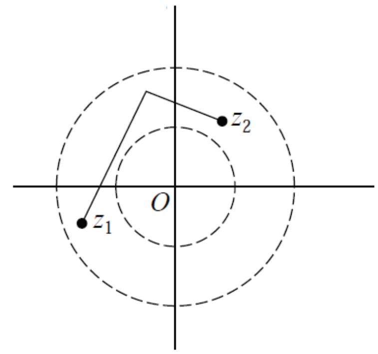
(b) $\sin 3\theta = 3 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin^3 \theta$.

17. Considerando que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, use el desarrollo de $e^{i\frac{\pi}{12}}$ para evaluar $\cot \frac{\pi}{12}$.

RESPUESTA. $2 + \sqrt{3}$.

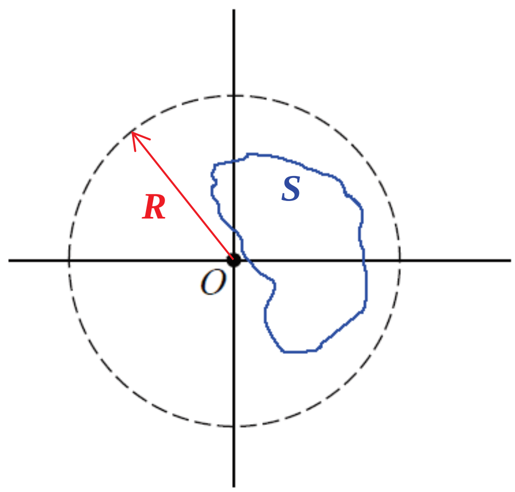
Si consideramos un ejemplo similar al anterior, pero definido por $|z| \leq 1$ se tendrá un conjunto cerrado.

Definición. Un ***conjunto*** abierto es ***conexo*** si para cualquier par de puntos z_1 y z_2 pertenecientes a dicho conjunto estos se pueden unir por una línea poligonal que esté completamente contenida en el conjunto. Si no satisface esta condición, entonces se dice que es un ***conjunto no conexo***.



Definición. Un conjunto con estas características: abierto y conexo, se llama ***dominio*** y si incluye a todos los puntos frontera se llama ***región***.

Definición. Un ***conjunto*** S es ***acotado*** si todos los puntos de S están dentro de un círculo de radio finito R, es decir que todos los puntos z de S satisfagan la relación
$|z| < R$, en caso contrario será un ***conjunto no acotado***.



Ejercicios sugeridos.

Secciones 1a y 1b:

1. Verifique que

(a) $\left(\sqrt{2} - i\right) - i\left(1 - \sqrt{2}i\right) = -2i;$

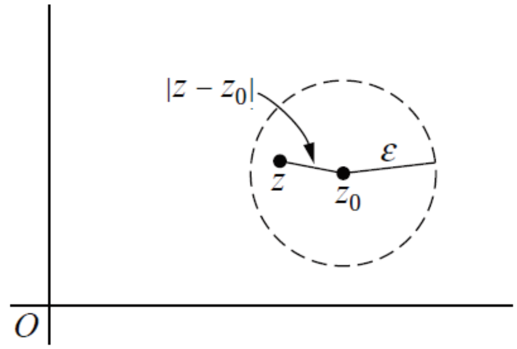
(b) $(2, -3)(-2, 1) = (-1, 8);$

(c) $(3, 1)(3, -1)\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{10}\right) = (2, 1).$

2. Muestre que $(1 + z)^2 = 1 + 2z + z^2$.

Definición. La ***vecindad o entorno*** ε del número complejo z_0 se define como el conjunto de puntos z tales que

$$|z - z_0| < \varepsilon$$

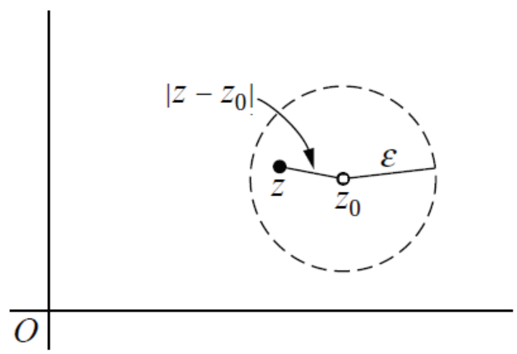


Gráficamente, el entorno está formado por el conjunto de puntos que forman parte del círculo de radio ε centrado en z_0 dejando fuera a los puntos de la circunferencia, tal como se muestra en la figura.

En ocasiones se tiene que trabajar con entornos en los que se excluye a z_0, en tal caso se habla de un entorno punteado o perforado.

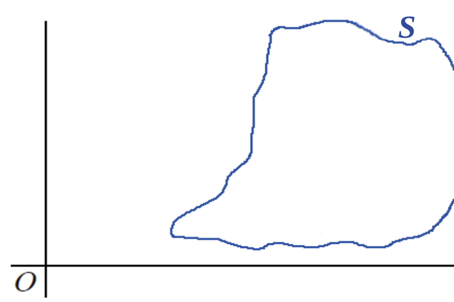
Definición. Se define como ***entorno punteado o perforado*** del número complejo z_0 al conjunto de números complejos z tales que

$$0 < |z - z_0| < \varepsilon$$



Gráficamente, el entorno perforado es similar al anterior, solo que ahora se ha eliminado el punto z_0, tal como lo muestra el esquema.

Continuando con los conceptos que usaremos más adelante, consideremos el siguiente conjunto de números complejos S para definir tres tipos de puntos: interior, exterior y frontera.



Ambas ecuaciones son muy útiles en el producto o cociente de dos números complejos, ya que pueden utilizarse para encontrar uno de los argumentos, conocidos los otros dos.

A continuación vamos a revisar la operación pendiente: el cálculo de la raíz de un número complejo.

Para ello vale la pena resolver primero la ecuación

$$z^n = 1 \tag{1.16}$$

es decir, encontrar la raíz n-ésima de la unidad.

La ecuación anterior se puede escribir como

$$\left(|z|\, e^{i\theta}\right)^n = e^{i(0+2\pi k)} \quad \text{con} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

es decir

$$|z|^n\, e^{in\theta} = 1 e^{i2\pi k}$$

Separando la ecuación anterior en sus partes real e imaginaria podemos escribir las siguientes igualdades

$$|z|^n = 1$$
$$n\theta = 2\pi k \quad \text{con } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

de donde

$$|z| = 1 \tag{1.17}$$

y

$$\theta = \frac{2\pi k}{n} \tag{1.18}$$

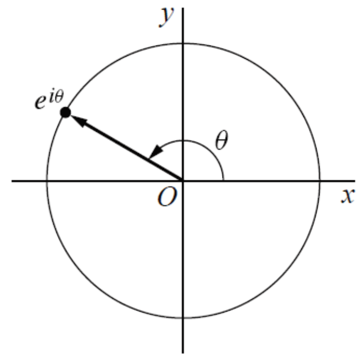
Con lo que la solución para la ecuación (1.16) se puede escribir como

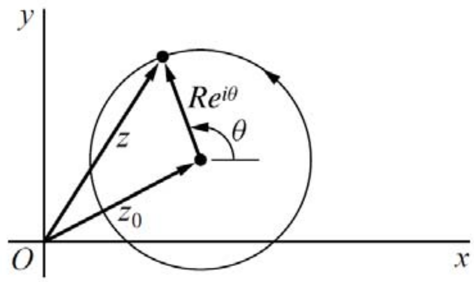
$$z = e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \tag{1.19}$$

Para tener soluciones distintas, y recordando que el Argumento de un número complejo toma valores entre $-\pi$ y π, se debe considerar que

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{1.20}$$

Si ahora consideramos el ángulo como un parámetro que toma valores entre 0 y 2π, la expresión (1.8) se convierte en una representación paramétrica de una circunferencia de radio R, centrada en el origen. Conforme el parámetro θ se incrementa de $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$, el punto z inicia en el eje real positivo y sigue un recorrido en dirección contrarreloj.





De manera más general, la circunferencia $|z - z_0| = R$, cuyo centro se ubica en z_0 y con un radio R, tiene la representación paramétrica

$$z = z_0 + Re^{i\theta} \tag{1.9}$$

Con $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

e).- Potencias y raíces de números complejos.

Considerando simple trigonometría, podemos ver que la exponencial compleja $e^{i\theta}$ tiene la siguiente propiedad para el producto $e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$.

$$\begin{aligned}
e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\
&= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)
\end{aligned}$$

es decir

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

Con esto, podemos obtener rápidamente el producto $z_1 z_2$ como

$$z_1 z_2 = |z_1| e^{i\theta_1} |z_2| e^{i\theta_2} = |z_1||z_2| e^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{1.10}$$

y el cociente z_1/z_2 como

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| e^{i\theta_1}}{|z_2| e^{i\theta_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1-\theta_2)} \tag{1.11}$$

Un caso particular de este último resultado es el relacionado con el inverso multiplicativo z^{-1} de un número complejo no nulo $z = |z|e^{i\theta}$; en tal caso se tiene

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{|1| e^{i0}}{|z| e^{i\theta}} = \frac{1}{|z|} e^{i(0-\theta)} = \frac{1}{|z|} e^{-i\theta}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right) \tag{1.3}$$

o simplemente,

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Es importante asentar que cuando $z = 0$, la representación polar no es posible ya que el ángulo θ queda indefinido.

Como el cálculo del ángulo, al involucrar una función tangente, resulta en un número infinito de valores que difieren por múltiplos enteros de 2π, se hace necesaria la siguiente definición.

Definición. Cada valor de θ, dado por la ecuación (1.3), se llama *argumento de z*, y el conjunto de todos esos valores se denota por $\arg z$. El *valor principal* de $\arg z$, denotado por $\operatorname{Arg} z$, corresponde al valor del argumento ubicado entre $-\pi$ y π.

Usando esto, podemos escribir

$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2n\pi$$

donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Con lo anterior, **la representación polar para el número complejo** $z = x + iy$, en su forma más general, se escribe como

$$z = |z|\left[\cos\left(\theta + 2n\pi\right) + i\sin\left(\theta + 2n\pi\right)\right] \tag{1.4}$$

con $|z|$ y θ definidos anteriormente y $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Si ahora se considera el desarrollo en Series de Taylor para la exponencial, conocida como Fórmula de Euler, a saber

$$e^{i\theta} = \operatorname{Cos}\,\theta + i\,\operatorname{Sen}\,\theta$$

podemos escribir al número complejo z, dado por la ecuación (1.1), como

$$z = |z|\,e^{i\theta} \tag{1.5}$$

o en forma más general como

$$z = |z|\,e^{i(\theta + 2n\pi)} \tag{1.6}$$

con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, y $|z|$ y θ definidos previamente.

Vale la pena mencionar que al realizar el cálculo del ángulo se debe considerar una corrección en el valor real de θ con base en la siguiente tabla.

Ejercicio. Dado el número complejo $z_1 = x_1 + iy_1$, encuentre el número complejo z_2 tal que $z_1 z_2 = 1$.

Solución.

$$z_2 = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} - i\frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}$$

En este ejemplo, el número complejo z_2 representa el inverso multiplicativo de z_1., es decir

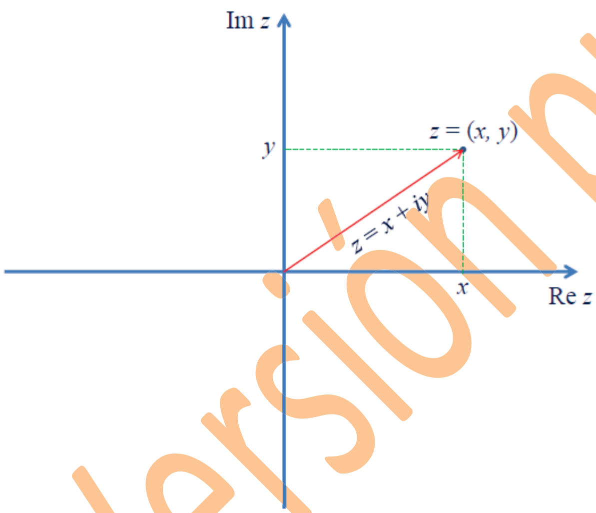
$$z_2 = (z_1)^{-1}$$

c).- Vectores y módulos en el plano complejo.

Dada la estructura de los números complejos surge de manera natural la inquietud por una representación geométrica de los mismos, para lo cual retomamos ideas de graficación empleadas anteriormente que nos permiten definir el plano complejo o z-plano.

El plano complejo o z-plano se forma por la intersección de los ejes real e imaginario, tal como lo hacen los ejes x e y de un plano cartesiano.

Con lo anterior, podemos interpretar geométricamente al número complejo z como el vector que va del origen al punto (x, y).



El vector z se puede escribir como la suma de las componentes real e imaginaria, a saber

$$z = x + iy$$

que corresponde a la representación rectangular de un número complejo.

La interpretación vectorial de un número complejo es especialmente útil para extender el concepto de valor absoluto de números reales al plano complejo.

Definición. El *módulo o valor absoluto* de un número complejo $z = x + iy$ se define como el número real no negativo $\sqrt{x^2 + y^2}$ y se denota por $|z|$, es decir

$$|z| \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$$

Geométricamente, el número $|z|$ es la distancia entre el punto (x, y) y el origen, o la longitud del radio vector que representa a z. Se reduce al conocido valor absoluto que se tiene en el conjunto de los reales, cuando $y = 0$.

Es importante notar que la desigualdad $z_1 < z_2$ carece de sentido, a menos que z_1 y z_2 sean reales; sin embargo, la desigualdad $|z_1|<|z_2|$ significa que el punto z_1 está más cerca al origen que lo que el punto z_2 lo está.

Cuando $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$, la suma

$$z = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

Igualdad de números complejos

Dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$ serán iguales siempre y cuando tengan las mismas partes reales y las mismas partes imaginarias, es decir

$$x_1 = x_2 \quad \text{e} \quad y_1 = y_2.$$

Lo que significa que z_1 y z_2 corresponden al mismo punto en el plano complejo.

Es importante mencionar que **en los números complejos no existe una relación de orden**, es decir, las conocidas relaciones de orden que se usan en el caso de los números reales no son aplicables. Por ejemplo, usando números reales podemos afirmar que $3 < 8$ ó que $11 > -4$, pero al emplear números complejos no tiene sentido afirmar que $3 + i < 4 + 2i$.

b).- Sumas y productos de números complejos.

Para construir las operaciones básicas del algebra de los números complejos, como lo son sumar (o restar) y multiplicar (o dividir), es importante considerar que los números reales son un subconjunto de los números complejos, de tal forma que muchas de las propiedades ampliamente conocidas de los reales se extienden a los complejos.

Suma (o resta) de números complejos

Sean dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ se define la suma (o resta) de z_1 y z_2 como

$$z = z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2)$$

es decir

$$z = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

La definición anterior implica que para sumar (o restar) dos números complejos es suficiente sumar (o restar) por separado las partes reales e imaginarias de dichos números.

Producto de números complejos

Sean dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ se define el producto (o multiplicación) de z_1 y z_2 como

$$z = z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

$$z = x_1 x_2 + x_1 i y_2 + i y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2$$

es decir

$$z = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2)$$

En general, el resultado del producto de dos números complejos definido anteriormente es un número complejo; sin embargo, hay un caso particular de producto que aparece en muchos campos de la