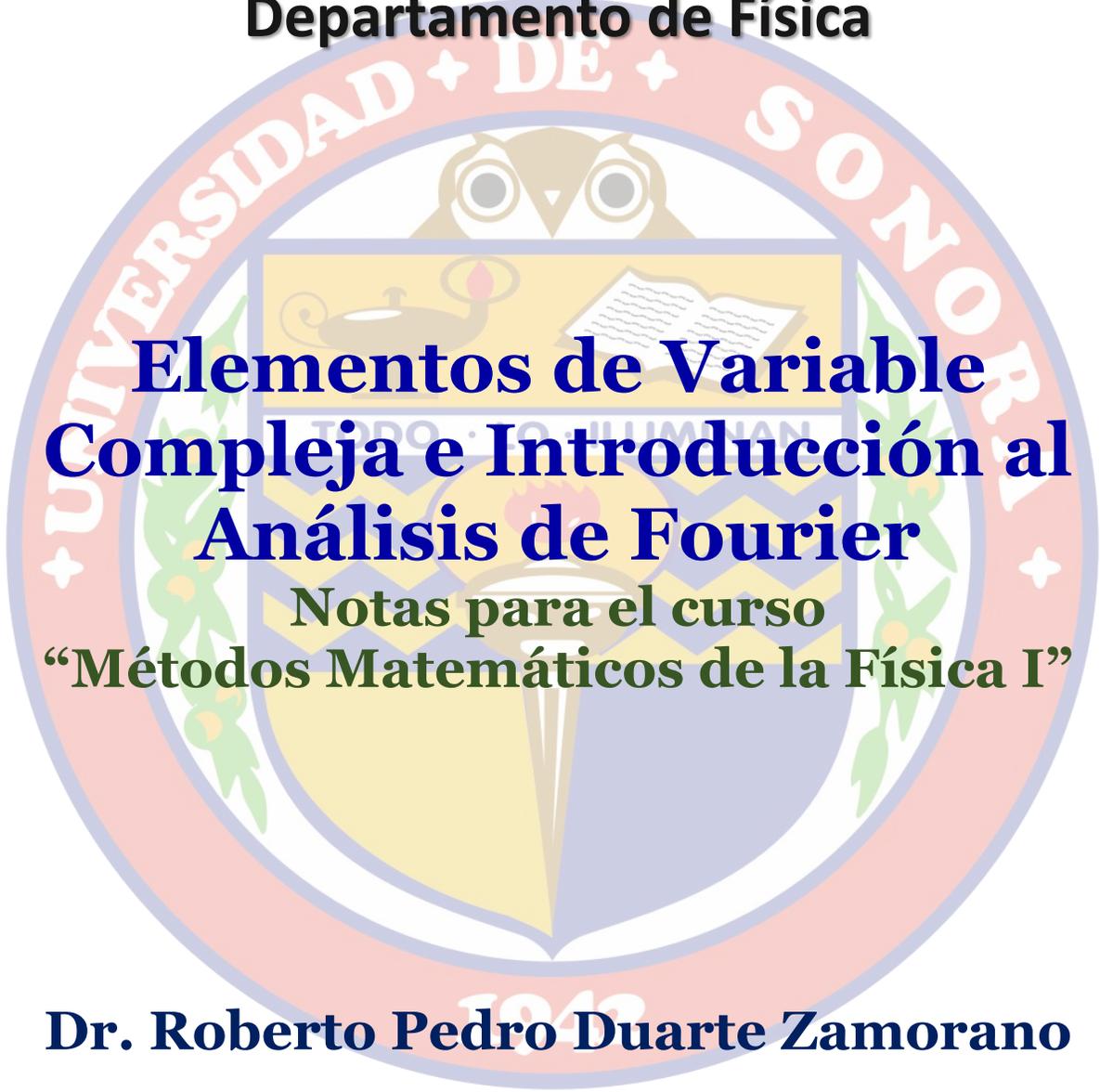


Universidad de Sonora

División de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

The seal of the University of Sonora is a circular emblem. It features a central shield with a yellow upper half and a blue lower half. On the shield, there is a lamp of knowledge, an open book, and a quill pen. Above the shield is an owl. The shield is flanked by green laurel branches. The entire seal is enclosed in a red ring with the text "UNIVERSIDAD DE SONORA" in white. The year "1942" is visible at the bottom of the seal.

**Elementos de Variable
Compleja e Introducción al
Análisis de Fourier**

**Notas para el curso
“Métodos Matemáticos de la Física I”**

Dr. Roberto Pedro Duarte Zamorano

Temario del Curso

“Métodos Matemáticos de la Física I”

1. Álgebra de números complejos.
2. Funciones de variable compleja.
3. Derivada e integral de funciones de variable compleja.
4. Series. Criterios de convergencia. Series de Taylor y Laurent.
5. Teoremas de Cauchy y del Residuo.
6. Series de Fourier de funciones periódicas.
7. Teorema integral de Fourier. Transformada de Fourier.
8. Tópicos especiales.

Índice

1.- Álgebra de números complejos.	1
a) Definición y representación geométrica.	1
b) Sumas y productos de números complejos.	2
c) Vectores y módulos en el plano complejo.	4
d) Representación en forma exponencial. Fórmula de Euler.	5
e) Potencias y raíces de números complejos.	8
f) Regiones en el plano complejo (o z-plano).	11
Ejercicios sugeridos.	14
2.- Funciones de variable compleja.	21
a) Introducción. Definición de función de variable compleja.	21
b) Mapeos o transformaciones.	23
c) Límite y continuidad de una función.	30
d) Límites y el punto al infinito.	34
Ejercicios sugeridos.	36
3.- Derivada e integral de funciones de variable compleja.	39
a) Derivadas, funciones analíticas e interpretación geométrica.	39
b) Reglas de diferenciación.	40
c) Ecuaciones de Cauchy-Riemann.	42
Ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares.	45
d) Funciones armónicas.	47
e) Integración compleja.	49
f) Integrales de funciones de variable compleja.	52
Teorema de Cauchy-Goursat.	53
Fórmula integral de Cauchy.	58
Ejercicios sugeridos.	60
4.- Series. Criterios de convergencia. Series de Taylor y Laurent.	65
a) Introducción. Series de funciones reales.	65
b) Convergencia de secuencias y series.	69
c) Series de Taylor.	72
Teorema de Taylor.	74
d) Series de Laurent.	75
Teorema de Laurent.	76
e) Propiedades adicionales de las series.	79
Ejercicios sugeridos.	82
5.- Teoremas de Cauchy y del Residuo.	87
a) Introducción.	87
b) Puntos singulares aislados.	87
c) Residuo.	94

d) Teorema de Cauchy.	97
e) Residuos y polos.	100
f) Ceros de funciones analíticas.	102
g) Aplicación de los residuos.	108
Ejercicios sugeridos.	124
6.- Series de Fourier de funciones periódicas.	129
a) Introducción.	129
b) Condiciones de Dirichlet.	131
c) Desarrollo en Series de Fourier.	132
d) Coeficientes de Fourier.	133
e) Algunas consideraciones de simetría.	140
f) Funciones discontinuas. Fenómeno de Gibbs.	144
g) Expansión de Fourier de medio rango.	146
h) Series de Fourier complejas.	151
Ejercicios sugeridos.	154
7.- Teorema integral de Fourier. Transformada de Fourier.	157
a) Introducción.	157
b) Transformada de Fourier.	159
c) Teorema integral de Fourier.	160
d) Propiedades de la Transformada de Fourier.	164
Ejercicios sugeridos.	164
Bibliografía.	167

1.- Álgebra de números complejos.

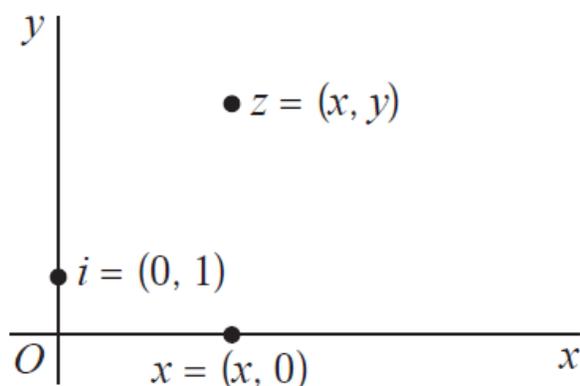
- a) Definición y representación geométrica.
- b) Sumas y productos de números complejos.
- c) Vectores y módulos en el plano complejo.
- d) Representación en forma exponencial. Fórmula de Euler.
- e) Potencias y raíces de números complejos.
- f) Regiones en el plano complejo (o z -plano).

a).- Definición y representación geométrica.

En cursos previos de Matemáticas se han estudiado los números complejos, por lo que en esta parte del curso haremos una revisión de lo ya visto en dichos cursos, partiendo de la definición de número complejo.

Definición. Un número complejo, z , es un número que se expresa como $z = x + iy$ o, de manera equivalente, $z = x + yi$, donde x e y son dos reales cualesquiera. Se conoce a i como la **unidad imaginaria**, tal que $i^2 = -1$.

El número complejo z se puede representar como pares ordenados (x, y) de números reales, tal que



$$z = (x, y)$$

los cuales pueden interpretarse como puntos en el plano complejo, con coordenadas rectangulares x e y ; de manera análoga a la representación de los reales x como puntos sobre el eje real.

Por lo anterior, se denotará con $x = \text{Re } z$, a la parte real del número z ; y con $y = \text{Im } z$, a la parte imaginaria de z .

Los números complejos de la forma $z = x + i0$ se denominan **reales puros** o, simplemente, **reales**; y los números complejos de la forma $z = 0 + iy$ se denominan **imaginarios puros**.

Igualdad de números complejos

Dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$ serán iguales siempre y cuando tengan las mismas partes reales y las mismas partes imaginarias, es decir

$$x_1 = x_2 \quad \text{e} \quad y_1 = y_2.$$

Lo que significa que z_1 y z_2 corresponden al mismo punto en el plano complejo.

Es importante mencionar que **en los números complejos no existe una relación de orden**, es decir, las conocidas relaciones de orden que se usan en el caso de los números reales no son aplicables. Por ejemplo, usando números reales podemos afirmar que $3 < 8$ ó que $11 > -4$, pero al emplear números complejos no tiene sentido afirmar que $3 + i < 4 + 2i$.

b).- Sumas y productos de números complejos.

Para construir las operaciones básicas del algebra de los números complejos, como lo son sumar (o restar) y multiplicar (o dividir), es importante considerar que los números reales son un subconjunto de los números complejos, de tal forma que muchas de las propiedades ampliamente conocidas de los reales se extienden a los complejos.

Suma (o resta) de números complejos

Sean dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ se define la suma (o resta) de z_1 y z_2 como

$$z = z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2)$$

es decir

$$z = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

La definición anterior implica que para sumar (o restar) dos números complejos es suficiente sumar (o restar) por separado las partes reales e imaginarias de dichos números.

Producto de números complejos

Sean dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ se define el producto (o multiplicación) de z_1 y z_2 como

$$z = z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

$$z = x_1 x_2 + x_1 iy_2 + iy_1 x_2 + i^2 y_1 y_2$$

es decir

$$z = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2)$$

En general, el resultado del producto de dos números complejos definido anteriormente es un número complejo; sin embargo, hay un caso particular de producto que aparece en muchos campos de la

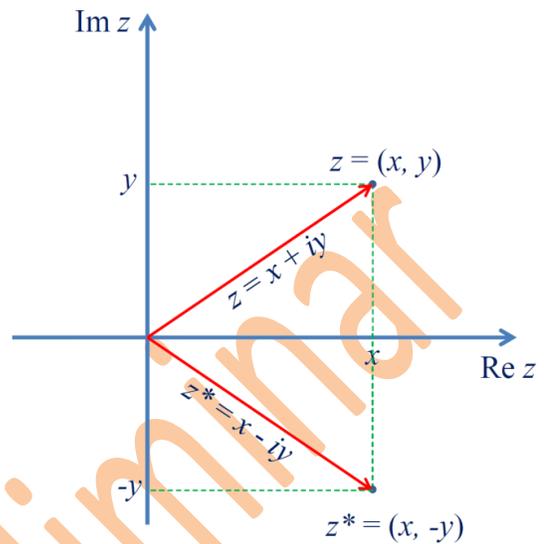
física cuando requerimos tener cantidades que representen magnitudes reales (medibles) a partir de cantidades complejas.

Para ello se define el **complejo conjugado** de un número complejo z , de la siguiente manera.

Sea un número complejo $z = x + iy$, se define su complejo conjugado z^* como

$$z^* = x - iy$$

El número complejo z^* se representa por el punto $(x, -y)$, el cual es la reflexión en el eje real del punto (x, y) que representa a z , tal como se muestra en la figura anexa.



Con la definición anterior, se tiene que

$$z^* z = (x + iy)(x - iy)$$

es decir

$$z^* z = x^2 + y^2$$

Lo que significa que el producto de un número complejo z por su complejo conjugado z^* resulta siempre en una cantidad real.

División de números complejos

Sean dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ (con $z_2 \neq 0$) se define la división (o cociente) de z_1 y z_2 como

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$$

Para poder realizar la operación anterior, se hace uso del anteriormente definido complejo conjugado; en este caso, se multiplican el numerador y el denominador por el complejo conjugado del denominador, a saber

$$z = \frac{z_1}{z_2} \left(\frac{z_2^*}{z_2^*} \right) = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \left(\frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} \right)$$

es decir

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

de donde

$$z = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

Ejercicio. Dado el número complejo $z_1 = x_1 + iy_1$, encuentre el número complejo z_2 tal que $z_1 z_2 = 1$.

Solución.

$$z_2 = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} - i \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}$$

En este ejemplo, el número complejo z_2 representa el inverso multiplicativo de z_1 , es decir

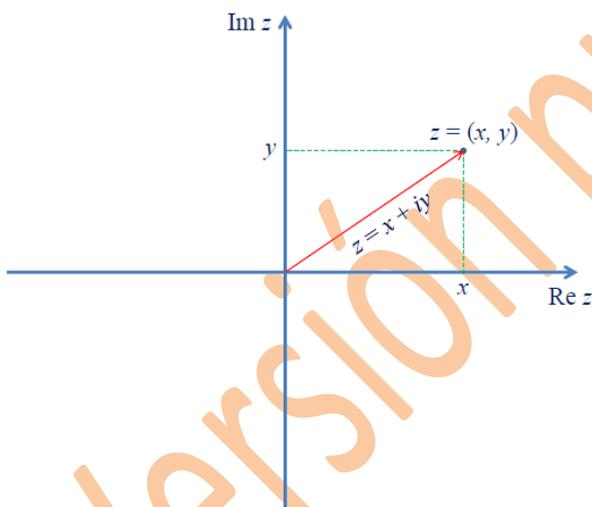
$$z_2 = (z_1)^{-1}$$

c).- Vectores y módulos en el plano complejo.

Dada la estructura de los números complejos surge de manera natural la inquietud por una representación geométrica de los mismos, para lo cual retomamos ideas de graficación empleadas anteriormente que nos permiten definir el plano complejo o z -plano.

El plano complejo o z -plano se forma por la intersección de los ejes real e imaginario, tal como lo hacen los ejes x e y de un plano cartesiano.

Con lo anterior, podemos interpretar geoméricamente al número complejo z como el vector que va del origen al punto (x, y) .



El vector z se puede escribir como la suma de las componentes real e imaginaria, a saber

$$z = x + iy$$

que corresponde a la representación rectangular de un número complejo.

La interpretación vectorial de un número complejo es especialmente útil para extender el concepto de valor absoluto de números reales al plano complejo.

Definición. El *módulo* o *valor absoluto* de un número complejo $z = x + iy$ se define como el número real no negativo $\sqrt{x^2 + y^2}$ y se denota por $|z|$, es decir

$$|z| \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$$

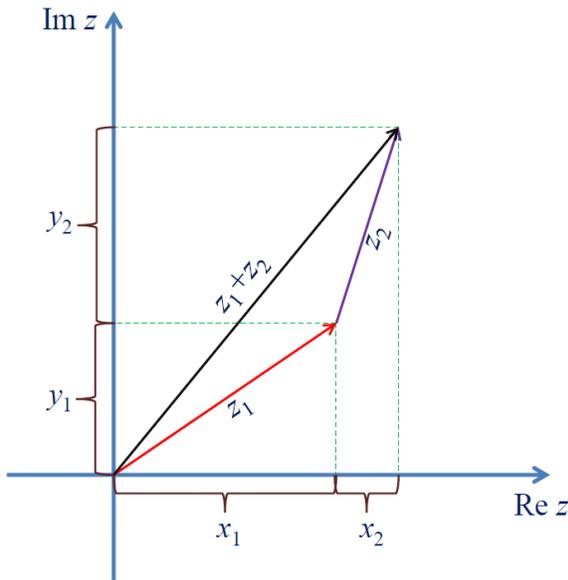
Geoméricamente, el número $|z|$ es la distancia entre el punto (x, y) y el origen, o la longitud del radio vector que representa a z . Se reduce al conocido valor absoluto que se tiene en el conjunto de los reales, cuando $y = 0$.

Es importante notar que la desigualdad $z_1 < z_2$ carece de sentido, a menos que z_1 y z_2 sean reales; sin embargo, la desigualdad $|z_1| < |z_2|$ significa que el punto z_1 está más cerca al origen que lo que el punto z_2 lo está.

Cuando $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$, la suma

$$z = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

corresponde al punto (x_1+x_2, y_1+y_2) , el cual representa el punto final del vector suma, tal como se muestra en la figura.

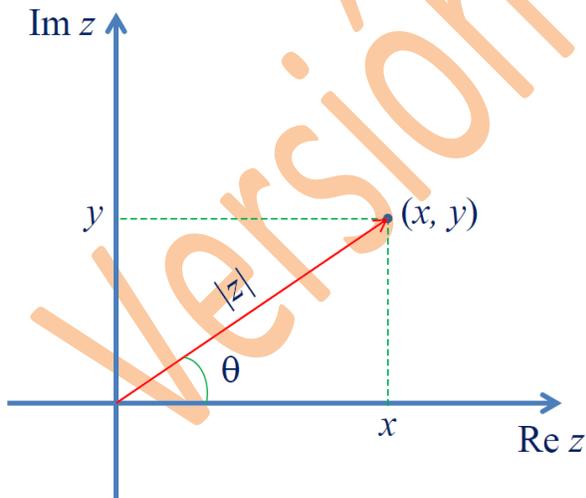


Usando esta interpretación geométrica para un número complejo cualquiera, es evidente la validez de la llamada *desigualdad del triángulo* que se escribe, en este caso, como

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

En este caso, $|z_1 + z_2|$ representa el módulo del número complejo que resulta de la suma de z_1 y z_2 , y cuyos módulos son $|z_1|$ y $|z_2|$, respectivamente.

d).- Representación en forma exponencial. Fórmula de Euler.



Como vimos anteriormente, se puede representar un número complejo (no nulo) en el z -plano como un vector, por lo que suena lógico retomar las representaciones empleadas en el estudio de vectores en dos dimensiones.

En este caso, usando coordenadas polares, podemos escribir

$$x = \text{Re } z = |z| \cos \theta$$

$$y = \text{Im } z = |z| \sin \theta$$

Con lo que podemos representar al número complejo $z = x + iy$ con la expresión

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta) \tag{1.1}$$

donde $|z|$ es el módulo del número complejo z y está dado por

$$|z| = \sqrt{(\text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2}, \tag{1.2}$$

mientras que el ángulo θ , medido en radianes, está dado por

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} \right) \quad (1.3)$$

o simplemente,

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

Es importante asentar que cuando $z = 0$, la representación polar no es posible ya que el ángulo θ queda indefinido.

Como el cálculo del ángulo, al involucrar una función tangente, resulta en un número infinito de valores que difieren por múltiplos enteros de 2π , se hace necesaria la siguiente definición.

Definición. Cada valor de θ , dado por la ecuación (1.3), se llama *argumento de z* , y el conjunto de todos esos valores se denota por $\arg z$. El *valor principal* de $\arg z$, denotado por $\operatorname{Arg} z$, corresponde al valor del argumento ubicado entre $-\pi$ y π .

Usando esto, podemos escribir

$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2n\pi$$

donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Con lo anterior, **la representación polar para el número complejo $z = x + iy$** , en su forma más general, se escribe como

$$z = |z| \left[\cos(\theta + 2n\pi) + i \sin(\theta + 2n\pi) \right] \quad (1.4)$$

con $|z|$ y θ definidos anteriormente y $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Si ahora se considera el desarrollo en Series de Taylor para la exponencial, conocida como Fórmula de Euler, a saber

$$e^{i\theta} = \operatorname{Cos} \theta + i \operatorname{Sen} \theta$$

podemos escribir al número complejo z , dado por la ecuación (1.1), como

$$z = |z| e^{i\theta} \quad (1.5)$$

o en forma más general como

$$z = |z| e^{i(\theta + 2n\pi)} \quad (1.6)$$

con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, y $|z|$ y θ definidos previamente.

Vale la pena mencionar que al realizar el cálculo del ángulo se debe considerar una corrección en el valor real de θ con base en la siguiente tabla.

Valores de $\text{Re } z$ e $\text{Im } z$	Ubicación de z	Valor real del ángulo
Si $\text{Re } z > 0$ e $\text{Im } z > 0$	Primer cuadrante	$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$
Si $\text{Re } z < 0$	Segundo y tercer cuadrantes	$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$
Si $\text{Re } z > 0$ e $\text{Im } z < 0$	Cuarto cuadrante	$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi$

Ejemplo. Analice $\arg z$ y $\text{Arg } z$ para $z_1 = i$, $z_2 = -1$ y $z_3 = -1 - i$.

Solución.

$$\arg z_1 = \pi/2 + 2n\pi, \arg z_2 = \pi + 2n\pi, \arg z_3 = 5\pi/4 + 2n\pi$$

$$\text{Arg } z_1 = \pi/2, \text{Arg } z_2 = \pi, \text{Arg } z_3 = -3\pi/4.$$

Ejercicio. Muestre que $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

La ecuación (1.5) se conoce como representación exponencial del número complejo z y es muy útil porque permite simplificar los cálculos al hacer uso de las propiedades inherentes a la función exponencial.

En esta representación, el complejo conjugado z^* está dado por

$$z^* = |z| e^{-i\theta} \quad (1.7)$$

La igualdad de dos números complejos z_1 y z_2 en representación polar (o exponencial) ocurre si

$$|z_1| = |z_2|$$

y

$$\theta_1 = \theta_2 + 2n\pi$$

con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

La primera condición está relacionada con la igualdad de los módulos, mientras que la segunda condición toma en cuenta la multiplicidad de los valores angulares.

Antes de pasar a ver la última operación aritmética pendiente: la potenciación, veamos un último aspecto (por el momento) de la representación exponencial, la generación de regiones circulares en el plano complejo.

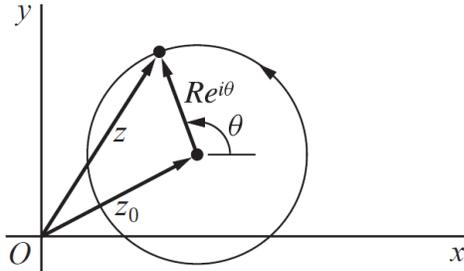
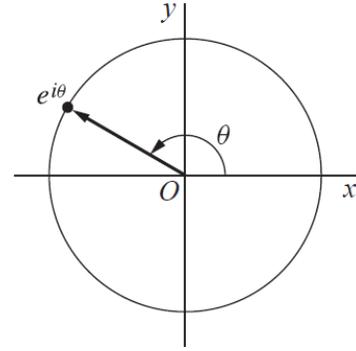
Si uno retoma la representación exponencial (o polar) de un número complejo tenemos

$$z = |z| e^{i\theta}$$

a continuación podemos llamar $|z| = R$ para tener

$$z = R e^{i\theta} \quad (1.8)$$

Si ahora consideramos el ángulo como un parámetro que toma valores entre 0 y 2π , la expresión (1.8) se convierte en una representación paramétrica de una circunferencia de radio R , centrada en el origen. Conforme el parámetro θ se incrementa de $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$, el punto z inicia en el eje real positivo y sigue un recorrido en dirección contrarreloj.



De manera más general, la circunferencia $|z - z_0| = R$, cuyo centro se ubica en z_0 y con un radio R , tiene la representación paramétrica

$$z = z_0 + R e^{i\theta} \quad (1.9)$$

Con $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

e).- Potencias y raíces de números complejos.

Considerando simple trigonometría, podemos ver que la exponencial compleja $e^{i\theta}$ tiene la siguiente propiedad para el producto $e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}$.

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} &= (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

es decir

$$e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Con esto, podemos obtener rápidamente el producto $z_1 z_2$ como

$$z_1 z_2 = |z_1| e^{i\theta_1} |z_2| e^{i\theta_2} = |z_1| |z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \quad (1.10)$$

y el cociente z_1/z_2 como

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| e^{i\theta_1}}{|z_2| e^{i\theta_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (1.11)$$

Un caso particular de este último resultado es el relacionado con el inverso multiplicativo z^{-1} de un número complejo no nulo $z = |z| e^{i\theta}$; en tal caso se tiene

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{|1| e^{i0}}{|z| e^{i\theta}} = \frac{1}{|z|} e^{i(0-\theta)} = \frac{1}{|z|} e^{-i\theta}$$

Retomando la ecuación (1.5) podemos escribir una expresión para la potencia n -ésima de z , z^n , de la siguiente forma

$$z^n = (|z| e^{i\theta})^n$$

es decir

$$z^n = |z|^n e^{in\theta} \quad (1.12)$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Desarrollando la exponencial compleja en senos y cosenos, podemos escribir la expresión (1.12) como

$$z^n = |z|^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) \quad (1.13)$$

Las ecuaciones (1.12) y (1.13) son equivalentes y nos dan la forma más sencilla de calcular la potencia n -ésima de un número complejo z , con la única condición de que este debe estar escrito previamente en forma exponencial.

Ejemplos. Usando el desarrollo del binomio y, por otro lado, la representación exponencial calcule lo expresado y compruebe que se obtiene el mismo resultado.

1. $(2 + 3i)^4$
2. $(5 - 6i)^2$

Antes de continuar con el cálculo de la raíz n -ésima de un número complejo veamos la utilidad de la representación exponencial para encontrar relaciones para los argumentos de productos y cocientes.

Si retomamos la ecuación (1.10)

$$z_1 z_2 = |z_1| e^{i\theta_1} |z_2| e^{i\theta_2} = |z_1| |z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

vemos inmediatamente que

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad (1.14)$$

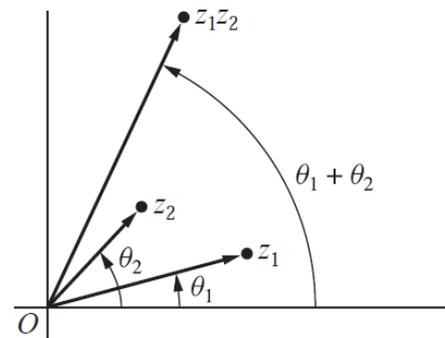
Lo anterior permite ilustrar el producto de dos números complejos tal como se muestra en la figura siguiente.

De manera similar, podemos retomar la ecuación (1.11)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| e^{i\theta_1}}{|z_2| e^{i\theta_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

de donde vemos que

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \quad (1.15)$$



Ambas ecuaciones son muy útiles en el producto o cociente de dos números complejos, ya que pueden utilizarse para encontrar uno de los argumentos, conocidos los otros dos.

A continuación vamos a revisar la operación pendiente: el cálculo de la raíz de un número complejo.

Para ello vale la pena resolver primero la ecuación

$$z^n = 1 \quad (1.16)$$

es decir, encontrar la raíz n -ésima de la unidad.

La ecuación anterior se puede escribir como

$$\left(|z| e^{i\theta} \right)^n = e^{i(0+2\pi k)} \quad \text{con } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

es decir

$$|z|^n e^{in\theta} = 1 e^{i2\pi k}$$

Separando la ecuación anterior en sus partes real e imaginaria podemos escribir las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} |z|^n &= 1 \\ n\theta &= 2\pi k \quad \text{con } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

de donde

$$|z| = 1 \quad (1.17)$$

y

$$\theta = \frac{2\pi k}{n} \quad (1.18)$$

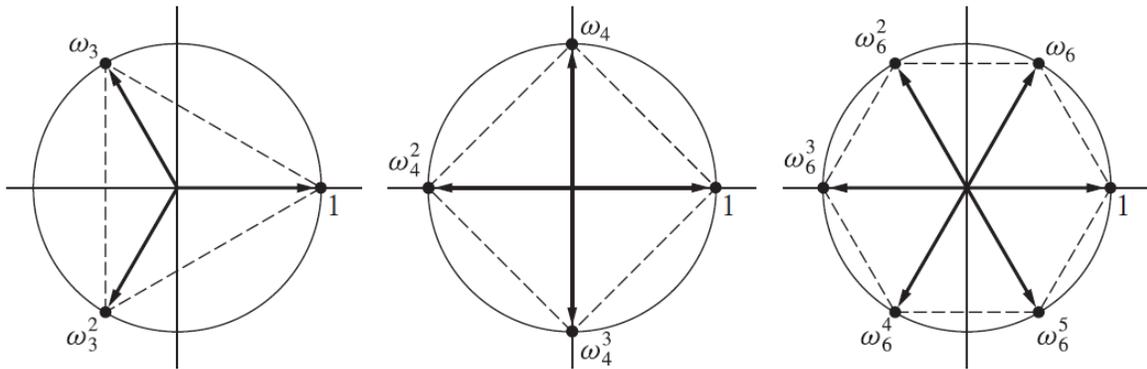
Con lo que la solución para la ecuación (1.16) se puede escribir como

$$z = e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad (1.19)$$

Para tener soluciones distintas, y recordando que el Argumento de un número complejo toma valores entre $-\pi$ y π , se debe considerar que

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (1.20)$$

Gráficamente podemos representar las raíces n -ésimas de la unidad como un polígono circunscrito en un círculo de radio 1 con n aristas.



Extendiendo la idea anterior, pero aplicada a la ecuación

$$z^n = z_0 \quad (1.21)$$

se encuentra que la raíz n -ésima de dicha ecuación está conformada por el conjunto de números complejos c_k dados por

$$c_k = |z_0|^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right)} \quad (1.22)$$

donde

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (1.23)$$

El valor obtenido cuando $k = 0$ se le llama **raíz principal** del número complejo z_0 .

Ejercicios.

1. Calcule
 - a) $(3+4i)^{1/2}$
 - b) $(4-4i)^{1/5}$
2. Resuelva la ecuación $z^6 + 1 = i\sqrt{3}$

f).- Regiones en el plano complejo (o z -plano).

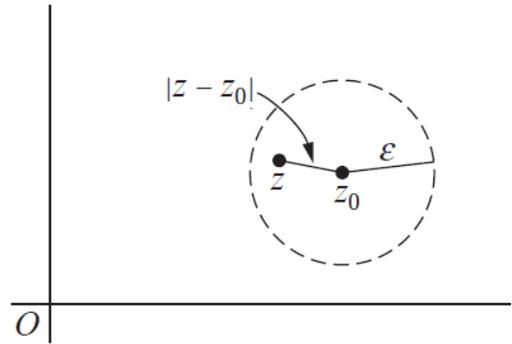
Antes de terminar con esta introducción a los números complejos vamos a establecer una serie de conceptos y definiciones que nos serán de gran utilidad en el estudio de las funciones de variable compleja que realizaremos más adelante.

Una de estas definiciones es la vecindad o entorno ε de un número complejo z .

Definición. La *vecindad o entorno* ε del número complejo z_0 se define como el conjunto de puntos z tales que

$$|z - z_0| < \varepsilon$$

Gráficamente, el entorno está formado por el conjunto de puntos que forman parte del círculo de radio ε centrado en z_0 dejando fuera a los puntos de la circunferencia, tal como se muestra en la figura.

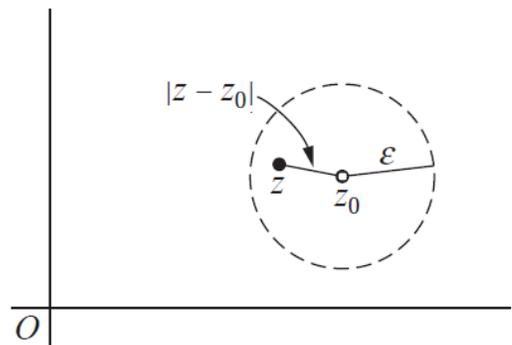


En ocasiones se tiene que trabajar con entornos en los que se excluye a z_0 , en tal caso se habla de un entorno punteado o perforado.

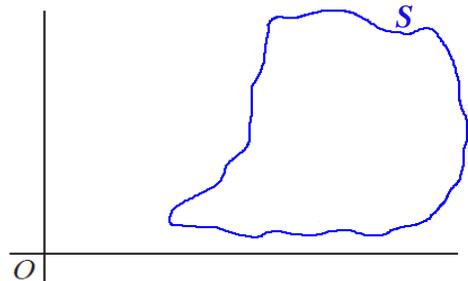
Definición. Se define como *entorno punteado o perforado* del número complejo z_0 al conjunto de números complejos z tales que

$$0 < |z - z_0| < \varepsilon$$

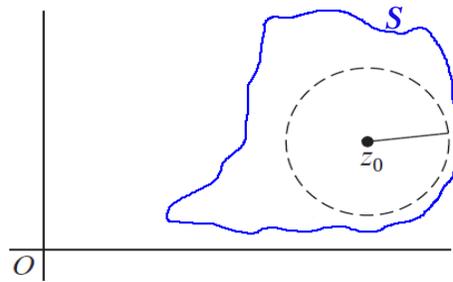
Gráficamente, el entorno perforado es similar al anterior, solo que ahora se ha eliminado el punto z_0 , tal como lo muestra el esquema.



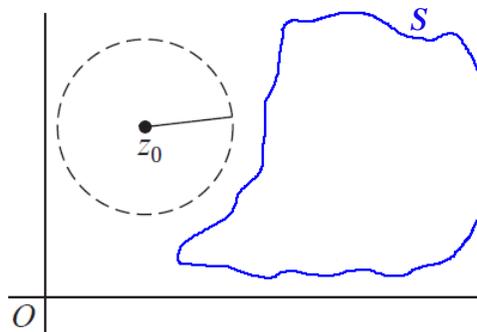
Continuando con los conceptos que usaremos más adelante, consideremos el siguiente conjunto de números complejos S para definir tres tipos de puntos: interior, exterior y frontera.



Definición. Se dice que un número complejo z_0 es un **punto interior** del conjunto S si todos los elementos de su entorno son elementos de S .

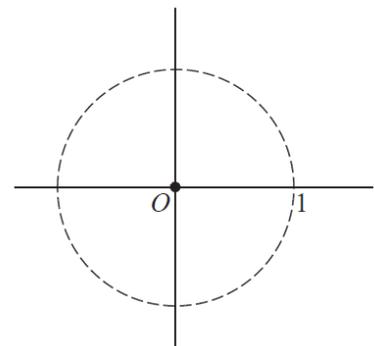


Definición. Se dice que un número complejo z_0 es un **punto exterior** al conjunto S si todos los elementos de su entorno no pertenecen a S .



Definición. Los puntos que no entran en ninguna de las dos definiciones anteriores se llaman **puntos frontera**, y al conjunto de todos los puntos frontera se le llama simplemente la frontera de S .

Por ejemplo, si consideramos el círculo unitario $|z| < 1$ mostrado en el esquema, la frontera de S son los puntos z que satisfacen la expresión $|z| = 1$, los puntos exteriores satisfacen la expresión $|z| > 1$, mientras que los puntos interiores satisfacen la relación $|z| < 1$.



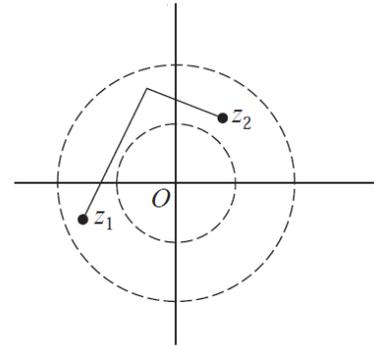
Definición. Un conjunto S es un **conjunto abierto** si no contiene a su frontera, es decir, a todos sus puntos frontera.

El ejemplo anterior es un conjunto abierto.

Definición. Un conjunto S es un **conjunto cerrado** si contiene a todos sus puntos frontera.

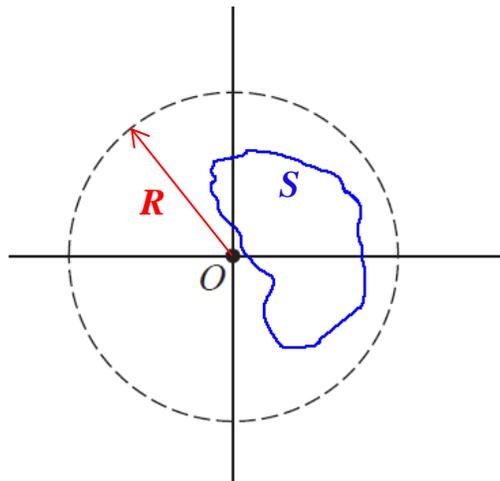
Si consideramos un ejemplo similar al anterior, pero definido por $|z| \leq 1$ se tendrá un conjunto cerrado.

Definición. Un **conjunto** abierto es **conexo** si para cualquier par de puntos z_1 y z_2 pertenecientes a dicho conjunto estos se pueden unir por una línea poligonal que esté completamente contenida en el conjunto. Si no satisface esta condición, entonces se dice que es un **conjunto no conexo**.



Definición. Un conjunto con estas características: abierto y conexo, se llama **dominio** y si incluye a todos los puntos frontera se llama **región**.

Definición. Un **conjunto** S es **acotado** si todos los puntos de S están dentro de un círculo de radio finito R , es decir que todos los puntos z de S satisfagan la relación $|z| < R$, en caso contrario será un **conjunto no acotado**.



Ejercicios sugeridos.

Secciones 1a y 1b:

1. Verifique que

$$(a) \quad (\sqrt{2} - i) - i(1 - \sqrt{2}i) = -2i;$$

$$(b) \quad (2, -3)(-2, 1) = (-1, 8);$$

$$(c) \quad (3, 1)(3, -1) \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{10} \right) = (2, 1).$$

2. Muestre que $(1 + z)^2 = 1 + 2z + z^2$.

3. Verifique que cada uno de los dos números $z = 1 \pm i$ satisfacen la ecuación $z^2 - 2z + 2 = 0$.

4. Verifique

(a) la ley asociativa para la suma de números complejos, la cual establece que $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;

(b) la ley distributiva para números complejos, que se enuncia como $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$.

5. Resuelva la ecuación $z^2 + z + 1 = 0$ para $z = (x, y)$ escribiéndola como

$$(x, y)(x, y) + (x, y) + (1, 0) = (0, 0)$$

y luego resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas para x e y que resulta.

$$\text{RESPUESTA. } z = \left(-\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

6. Reduzca cada una de las siguientes cantidades a un número real:

(a) $\frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i}$;

(b) $\frac{5i}{(1-i)(2-i)(3-i)}$;

(c) $(1-i)^4$

RESPUESTA. (a) $-2/5$; (b) $-1/2$; (c) -4 .

7. Localiza vectorialmente los números $z_1 + z_2$ y $z_1 - z_2$ cuando

(a) $z_1 = 2i, z_2 = \frac{2}{3} - i$;

(b) $z_1 = (-\sqrt{3}, 1), z_2 = (\sqrt{3}, 0)$;

(c) $z_1 = (-3, 1), z_2 = (1, 4)$;

(d) $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_1 - iy_1$.

8. Considerando los números complejos $z_1 = 3 + 4i$ y $z_2 = 2 - i$, represéntelos en un Diagrama de Argand junto al número w tal que

(a) $w = z_1 + z_2$;

(b) $w = z_1 - z_2$;

(c) $w = z_1 z_2$;

(d) $w = \frac{z_1}{z_2}$;

(e) $w = z_1 z_1$;

Sección 1c:

9. Verifique que $\sqrt{2}|z| \geq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$.

10. En cada caso, bosqueje el conjunto de puntos determinados por la condición dada:

- (a) $|z - 1 + i| = 1$;
- (b) $|z + i| \leq 3$;
- (c) $|3z - 5 + i| > 6$;
- (d) $|2z - 4i| \geq 7$.

11. Use las propiedades de conjugados y módulos para mostrar que

- (a) $\overline{\bar{z} + 3i} = z - 3i$;
- (b) $i\bar{z} = -i\bar{z}$;
- (c) $\overline{(2 + i)^2} = 3 - 4i$;
- (d) $|(2\bar{z} + 5)(\sqrt{2} - i)| = \sqrt{3}|2z + 5|$.

12. Bosqueje el conjunto de puntos determinados por la condición

- (a) $\operatorname{Re}(\bar{z} - i) = 2$;
- (b) $|2\bar{z} + i| = 4$.

13. Pruebe que

- (a) z es real si y sólo si $\bar{z} = z$;
- (b) z es ya sea real o imaginario puro si y sólo si $\bar{z}^2 = z^2$.

14. Usando las expresiones

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ e } \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

muestre que la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ se puede escribir como $z^2 + \bar{z}^2 = 2$.

Sección 1d:

15. Encuentre el argumento principal $\operatorname{Arg} z$ cuando

- (a) $z = \frac{i}{-2 - 2i}$;
- (b) $z = (\sqrt{3} - i)^6$.

RESPUESTA. (a) $-3\pi/4$; (b) π .

16. Use la fórmula de Moivre para derivar las siguientes identidades trigonométricas:

- (a) $\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta$;
- (b) $\sin 3\theta = 3 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin^3 \theta$.

17. Considerando que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, use el desarrollo de $e^{i\frac{\pi}{12}}$ para evaluar $\cot \frac{\pi}{12}$.

RESPUESTA. $2 + \sqrt{3}$.

18. Sean z un número complejo no nulo y n un entero negativo ($n = -1, -2, \dots$). Considere escribir $z = re^{i\theta}$ y $m = -n = 1, 2, \dots$. Usando las expresiones

$$z^m = r^m e^{im\theta} \quad \text{y} \quad z^{-1} = \left(\frac{1}{r}\right) e^{-i\theta}$$

verifique que $(z^m)^{-1} = (z^{-1})^m$ y entonces la definición $z^n = (z^{-1})^m$ puede escribirse de manera alterna como $z^n = (z^m)^{-1}$.

19. Pruebe que dos números complejos no nulos z_1 y z_2 tienen los mismo módulos si y sólo si hay dos números complejos c_1 y c_2 tales que $z_1 = c_1 c_2$ y $z_2 = c_1 \bar{c}_2$.

SUGERENCIA: Note que

$$\exp\left(i\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \exp\left(i\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) = \exp(i\theta_1)$$

y

$$\exp\left(i\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \overline{\exp\left(i\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right)} = \exp(i\theta_2)$$

20. Evalúe las siguientes expresiones:

- (a) $\operatorname{Re} e^{2iz}$
- (b) $|e^{\sqrt{i}}|$
- (c) e^{i^3}
- (d) i^i

RESPUESTA. (a) $e^{-2y} \cos 2x$; (b) $e^{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$; (c) $\cos 1 - i \sin 1$; (d) $e^{-(2n+\frac{1}{2})\pi}$.

Sección 1e:

21. En cada caso, encuentre todas las raíces en notación rectangular, muéstrelas como los vértices de ciertos cuadrados e indique cuál de ellas es la raíz principal:

- (a) $(-16)^{1/4}$;
- (b) $(-8 - 8\sqrt{3}i)^{1/4}$.

RESPUESTAS: (a) $\pm\sqrt{2}(1 + i)$, $\pm\sqrt{2}(1 - i)$; (b) $\pm(\sqrt{3} - i)$, $\pm(1 + \sqrt{3}i)$.

22. En cada caso, encuentre todas las raíces en notación rectangular, muéstrelas como los vértices de ciertos polígonos regulares e identifique la raíz principal:

- (a) $(-1)^{1/3}$;
- (b) $8^{1/6}$.

RESPUESTAS: (b) $\pm\sqrt{2}$, $\pm\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}}$, $\pm\frac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}}$.

23. (a) Sea a cualquier número real fijo y muestre que las dos raíces cuadradas de $a + i$ son

$$\pm\sqrt{A} \exp\left(i\frac{\alpha}{2}\right)$$

donde $A = \sqrt{a^2 + 1}$ y $\alpha = \text{Arg}(a + i)$.

(b) Con la ayuda de las identidades trigonométricas

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2} \text{ y } \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

muestre que las raíces cuadradas obtenidas en la parte (a) se pueden escribir como

$$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{A+a} + i\sqrt{A-a})$$

24. Encuentre los cuatro ceros (raíces) del polinomio $z^4 + 4$, siendo uno de ellos

$$z_0 = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = 1 + i$$

Luego use estos ceros para factorizar $z^4 + 4$ en factores cuadráticos con coeficientes reales.

RESPUESTA: $(z^2 + 2z + 2)(z^2 - 2z + 2)$.

25. Encuentre cada una de las raíces indicadas, localícelas gráficamente e identifique a la raíz principal.

(a) $(2\sqrt{3} - 2i)^{1/2}$;

(b) $(-4 + 4i)^{1/5}$;

(c) $(2 + 2\sqrt{3}i)^{1/3}$;

(d) $(-16i)^{1/4}$;

(e) $(64)^{1/6}$;

(f) $(i)^{2/3}$.

26. Encuentre todas las raíces indicadas, localícelas en el plano complejo e identifique a la raíz principal.

(a) Raíz cúbica de 8;

(b) Raíz cuadrada de $4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$;

(c) Raíz quinta de $-16 + 16\sqrt{3}i$;

(d) Raíz sexta de $-27i$.

27. Encuentre las raíces cuadradas de (a) $5 - 12i$, (b) $8 + 4\sqrt{5}i$.

RESPUESTA: (a) $3 - 2i, -3 + 2i$; (b) $\sqrt{10} + \sqrt{2}i, -\sqrt{10} - \sqrt{2}i$.

Sección 1f:

28. Bosqueje los siguientes conjuntos y determine cuáles son dominios:

(a) $|z - 2 + i| \leq 1$;

(b) $|2z + 3| > 4$;

- (c) $\operatorname{Im} z > 1$;
- (d) $\operatorname{Im} z = 1$;
- (e) $0 \leq \arg z \leq \pi/4$ ($z \neq 0$);
- (f) $|z - 4| \geq |z|$.

RESPUESTA: (b), (c) son dominios.

Versión preliminar

Versión preliminar

2.- Funciones de variable compleja.

- a) Introducción. Definición de función de variable compleja.
- b) Mapeos o transformaciones.
- c) Límites y continuidad de una función.
- d) Límites y punto al infinito. La esfera de Riemann.

a).- Introducción. Definición de función de variable compleja.

En el estudio de números reales, una función f asigna a un elemento de su dominio un elemento de su rango acorde a una expresión de la forma

$$x \rightarrow y = f(x)$$

Por ejemplo, la función $y = f(x) = 2x + 3$ realiza las siguientes asociaciones $x \rightarrow y$:

$$0 \rightarrow 3$$

$$2 \rightarrow 7$$

$$-1 \rightarrow 1$$

mientras que su inversa $x = f^{-1}(y) = (y - 3)/2$ realiza las asociaciones $y \rightarrow x$.

Para el caso de los números complejos, podemos construir una herramienta similar de asociación entre dos números complejos z y w .

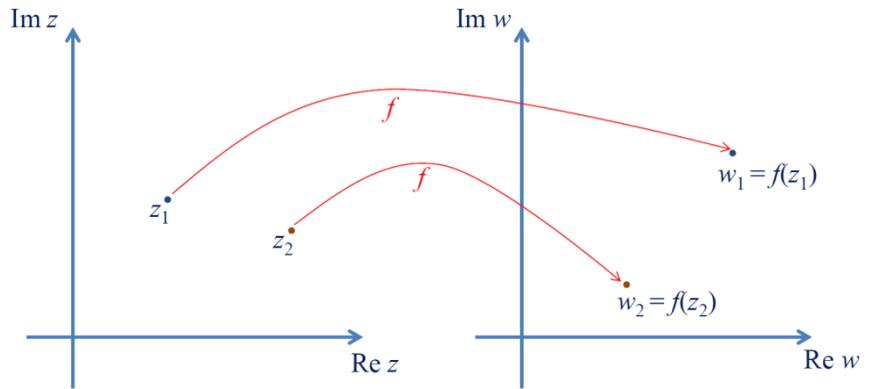
Definición. Sea S un conjunto de números complejos. Una función f de variable compleja definida en S es una regla que asigna a cada número complejo $z = x + iy$ de S , algún número complejo $w = u + iv$.

El número complejo w se llama valor de f en z y se denota por $f(z)$, es decir

$$w = f(z), \tag{2.1}$$

y el conjunto S donde está definida la función $f(z)$ se llama **dominio de f** .

Para representar gráficamente esta asignación o mapeo, se requieren 2 planos complejos: el plano z y el plano w , tal como se muestra en la figura anexa.



Dado que z y w son números complejos, relacionados por la función f , es posible escribir

$$w = f(z)$$

$$u + iv = f(x + iy)$$

donde hemos considerado que

$$w = u + iv$$

y

$$z = x + iy.$$

Lo anterior permite expresar a la función de variable compleja $f(z)$ como la suma

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (2.2)$$

cuando usamos la representación rectangular; mientras que en la representación exponencial podemos escribir

$$f(z) = f(r, \theta) = u(r, \theta) + iv(r, \theta) \quad (2.3)$$

donde se ha considerado que

$$z = re^{i\theta}.$$

Ejemplo. Encuentre las partes real e imaginaria de la función $f(z) = 2z^2 - 8z$ y expréselas en forma rectangular [$u(x, y)$ y $v(x, y)$] y forma exponencial [$u(r, \theta)$ y $v(r, \theta)$].

Ejercicios. Encuentre las partes real e imaginaria de las funciones indicadas y expréselas en representación rectangular ($u(x, y)$ y $v(x, y)$) y representación exponencial ($u(r, \theta)$ y $v(r, \theta)$).

1. $f(z) = zz^*$
2. $f(z) = 1/z$
3. $f(z) = (2z - 8)/(z^2 + 1)$

Si al realizar esta separación, en cualquiera de sus representaciones, resulta que la función v es siempre cero, entonces decimos que la función $f(z)$ es una **función real de variable compleja**. Un ejemplo de tales funciones es la primera de las listadas en el ejercicio previo, $f(z) = zz^*$.

b).- Mapeos o transformaciones.

Como vimos anteriormente, una función compleja de variable compleja $f(z)$ asigna a cada punto $z = (x, y)$ un punto $w = (u, v)$; este tipo de asignación unívoca recibe el nombre de mapeo o transformación.

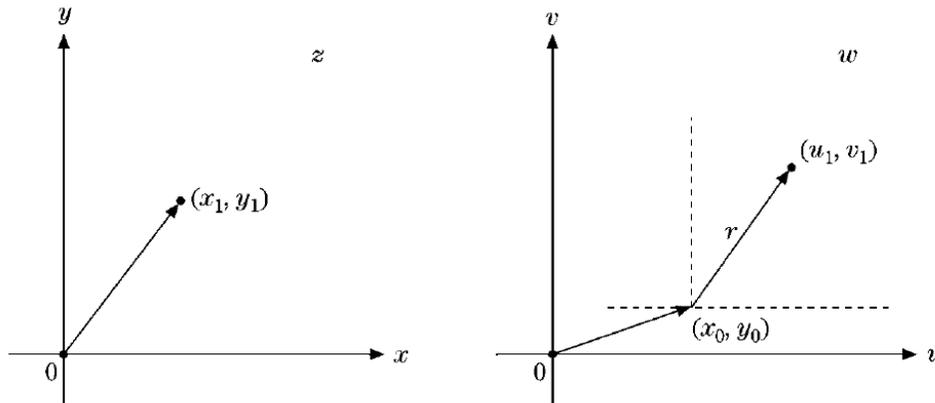
En lo que sigue veremos algunos casos particulares de mapeos que, al aplicarse sobre un conjunto de puntos z_k en el plano complejo (ya sean líneas o áreas), nos permite hablar de traslación, rotación, inversión y reflexión.

Traslación

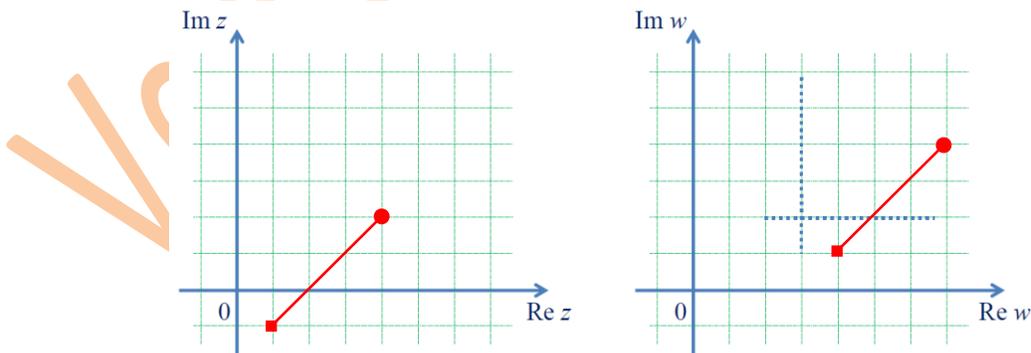
La función

$$w = f(z) = z + z_0 \quad (2.4)$$

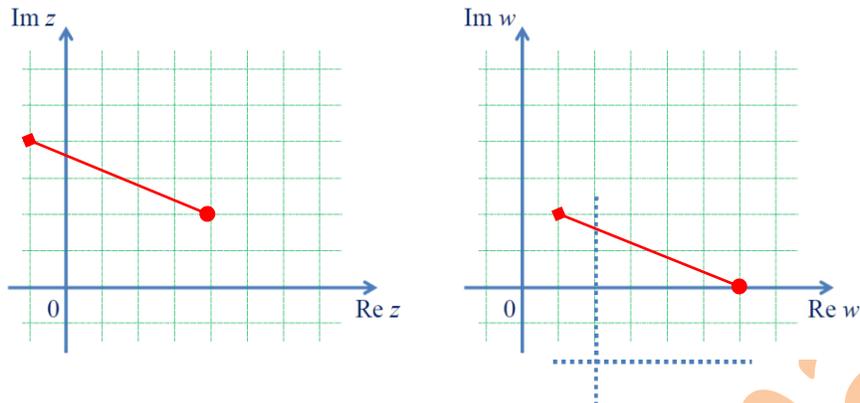
corresponde a una transformación o mapeo que representa una traslación pura del eje de coordenadas, es decir, que traslada al conjunto de puntos z como si el origen se ubicase en z_0 , tal como se muestra en la figura.



Por ejemplo, $f(z) = z + 3 + 2i$ traslada al segmento de recta que une los puntos $z_1 = 1 - i$ y $z_2 = 4 + 2i$ tal como se muestra.



Mientras que $g(z) = z + 2 - 2i$ traslada al segmento de recta que une los puntos $z_1 = -1 + 4i$ y $z_2 = 4 + 2i$ tal como se muestra.



Rotación

Para analizar la rotación es conveniente retomar la representación exponencial del número complejo z , a saber

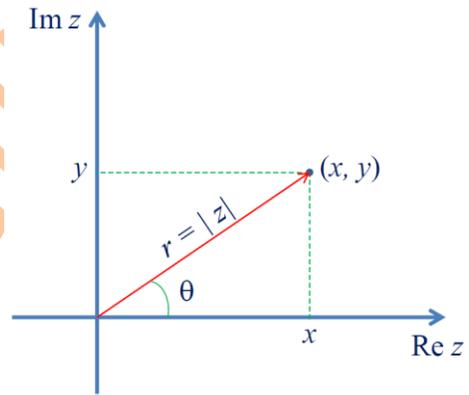
$$z = re^{i\theta}$$

Tal como se puede inferir de la figura, rotar al número z un ángulo θ_0 es equivalente a sumar θ_0 al argumento de z .

Con lo anterior, podemos afirmar que la función

$$w = f(z) = ze^{i\theta_0} \quad (2.5)$$

corresponde a una transformación o mapeo que representa una rotación pura del eje de coordenadas, es decir, que rota los ejes real e imaginario un ángulo θ_0 .



Si a continuación consideramos el producto

$$w = zz_0$$

podemos usar la siguiente representación polar de dichos números

$$w = \rho e^{i\phi}, \quad z = re^{i\theta} \text{ y } z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$$

para tener

$$\rho e^{i\phi} = (re^{i\theta})(r_0 e^{i\theta_0})$$

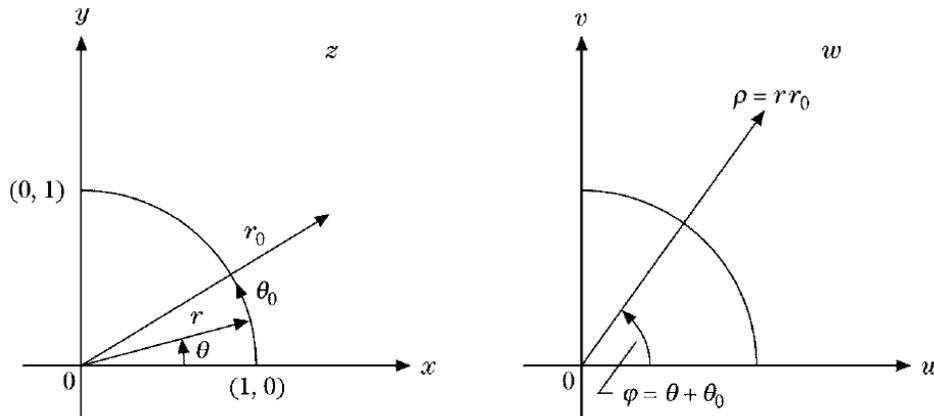
de donde vemos que

$$\rho = rr_0$$

y

$$\phi = \theta + \theta_0$$

Aquí vemos que han ocurrido dos cosas: por una parte, el módulo de z se ha modificado por un factor r_0 ; y por otra parte, el ángulo se ha incrementado una constante θ_0 , tal como se muestra en la figura.

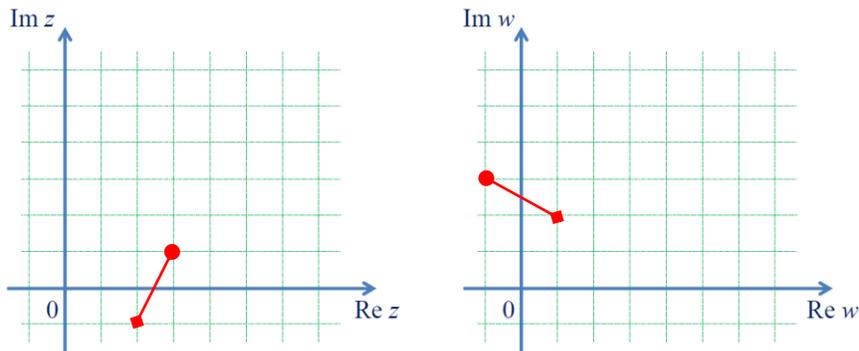


Con lo anterior, podemos afirmar que la función

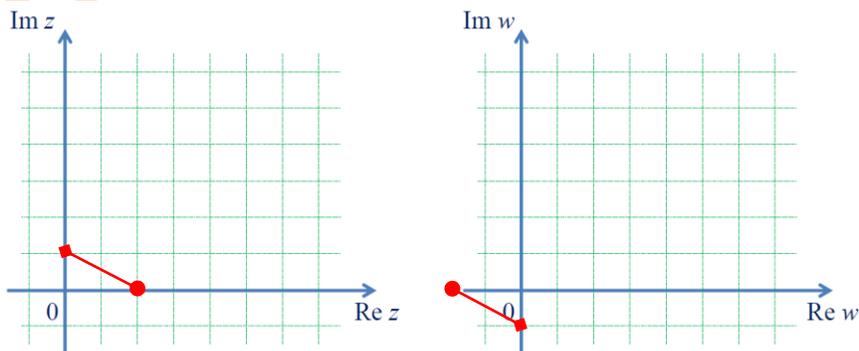
$$w = f(z) = zz_0 \tag{2.6}$$

corresponde a una transformación o mapeo que representa, al mismo tiempo, una rotación por un ángulo θ_0 y una modificación del módulo por un factor r_0 ; en este caso, la transformación dada por la ecuación (2.5) es un caso particular en el que $r_0 = 1$.

Por ejemplo, $f(z) = iz = e^{i\pi/2}z$ rota $\pi/2$ al segmento de recta que une los puntos $z_1 = 2 - i$ y $z_2 = 3 + i$, tal como se muestra.



Otro caso interesante es $f(z) = -z = (-1)z = e^{i\pi}z$. En este caso, se tiene una rotación de π alrededor del origen, tal como se muestra para el segmento que va de $z_1 = 2$ a $z_2 = i$.



Reflexión

Un caso particular de mapeo corresponde a la reflexión del número complejo z , con respecto al eje real, el cual está dado por la función

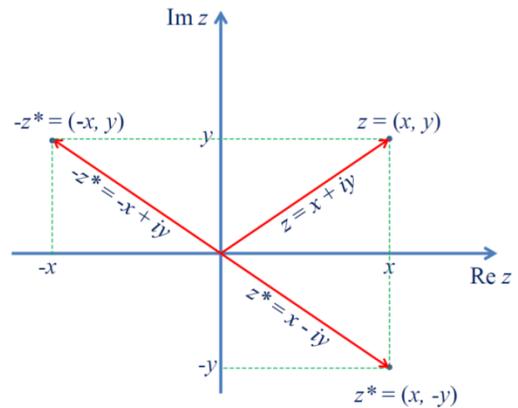
$$f(z) = z^* \quad (2.7)$$

es decir, la función que asigna a un número z su complejo conjugado representa una reflexión en el eje real; mientras que la función

$$f(z) = -z^* \quad (2.8)$$

la cual asigna a un número z el inverso aditivo de su complejo conjugado, representa una reflexión en el eje imaginario.

Lo mencionado anteriormente puede visualizarse en la figura adjunta.



Ejercicio. Represente el mapeo correspondiente a la función $f(z) = z^* + 4i$ para el segmento que va del origen al punto $z = 3 - 5i$.

Inversión

Antes de concluir con esta parte del curso, vamos a considerar la función $f(z)$ dada por

$$w = f(z) = 1/z \quad (2.9)$$

De nueva cuenta, retomamos la representación polar de los números complejos w y z

$$w = \rho e^{i\phi} \text{ y } z = r e^{i\theta}$$

para escribir la expresión (2.9) como

$$\rho e^{i\phi} = \frac{1}{r e^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$

de donde vemos que

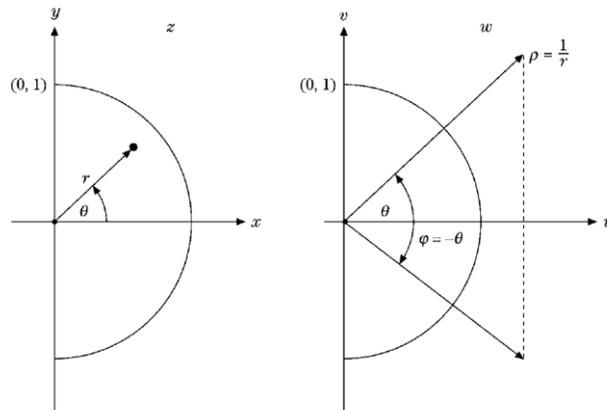
$$\rho = 1/r$$

y

$$\phi = -\theta$$

La primera de las dos últimas expresiones muestra claramente la inversión, el interior de un círculo se mapea en el exterior y el exterior en el interior; mientras que la segunda de ellas muestra que el ángulo se invierte, tal como ocurre con el complejo conjugado.

Gráficamente podemos considerar un semicírculo unitario para mostrar las propiedades de este mapeo, tal como se presenta en la figura.



Ejemplo. Encuentre la imagen o mapeo del segmento de recta que une los puntos $z_1 = 1 + 2i$ y $z_2 = 3$, bajo la transformación

- (a) $f(z) = 3z + 2$; y
- (b) $f(z) = z^2$.

Solución.

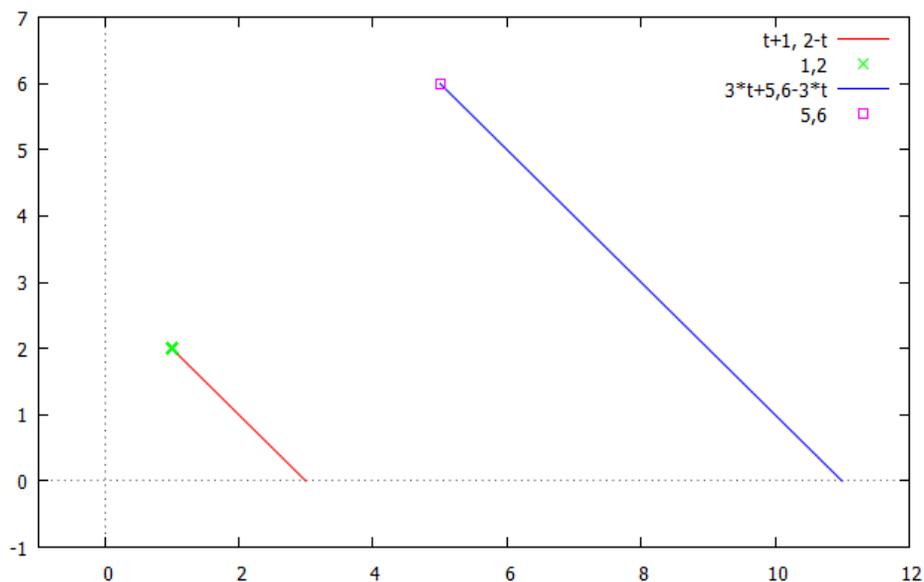
Una posible parametrización del segmento considerado es

$$z(t) = (t + 1) + i(2 - t), \text{ con } 0 \leq t \leq 2$$

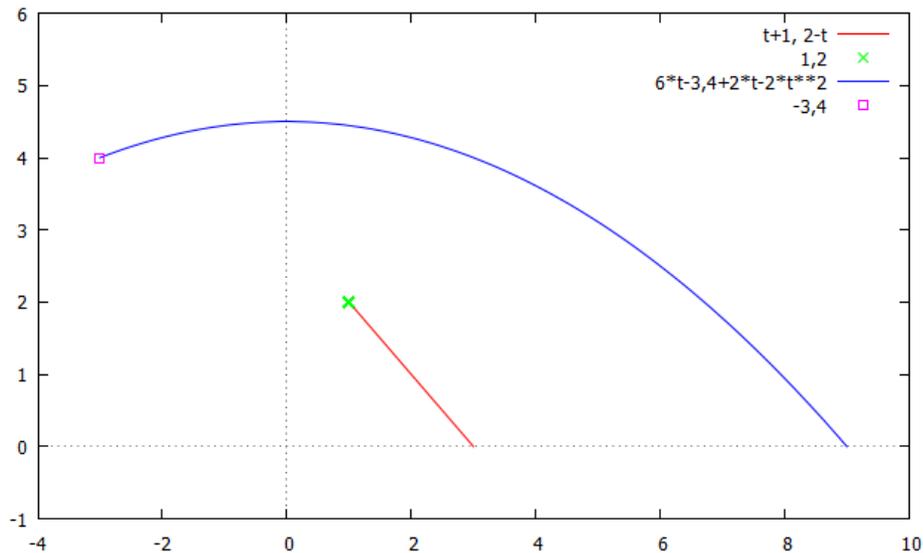
así que procedemos a evaluar, para cada inciso, la correspondiente función $f(z)$.

- (a) $f[z(t)] = 3[(t + 1) + i(2 - t)] + 2 = (3t + 5) + i(6 - 3t)$
- (b) $f[z(t)] = [(t + 1) + i(2 - t)]^2 = (6t - 3) + i(4 + 2t - 2t^2)$

En la figura siguiente se muestran, en un mismo Diagrama de Argand, las gráficas correspondientes al segmento de recta en el plano z y su mapeo en el plano w , para la función $f(z) = 3z + 2$



Mientras que en la figura siguiente se muestran las gráficas correspondientes al segmento de recta en el plano z y su mapeo en el plano w , para la función $f(z) = z^2$.



Ejercicios.

- Para el segmento de recta que va del punto $z_1 = x_1 + iy_1$ al punto $z_2 = x_2 + iy_2$, encuentre el mapeo de dicho segmento bajo las siguientes transformaciones:
 - $f(z) = e^z$; y
 - $f(z) = 1 / (z + 1)$.
- Usando los resultados del problema anterior, bosqueje la región del plano w en la que se mapea el rectángulo con vértices en $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$ y $(0,1)$ del plano z .

Solución.

- Para este problema, la expresión que parametriza al segmento de recta es

$$z(t) = ((x_2 - x_1)t + x_1) + i((y_2 - y_1)t + y_1), \text{ con } 0 \leq t \leq 1$$

por lo que las expresiones para el mapeo en el plano w son

$$w = f(z) = e^{x(t)} (\cos[y(t)] + i \sin[y(t)])$$

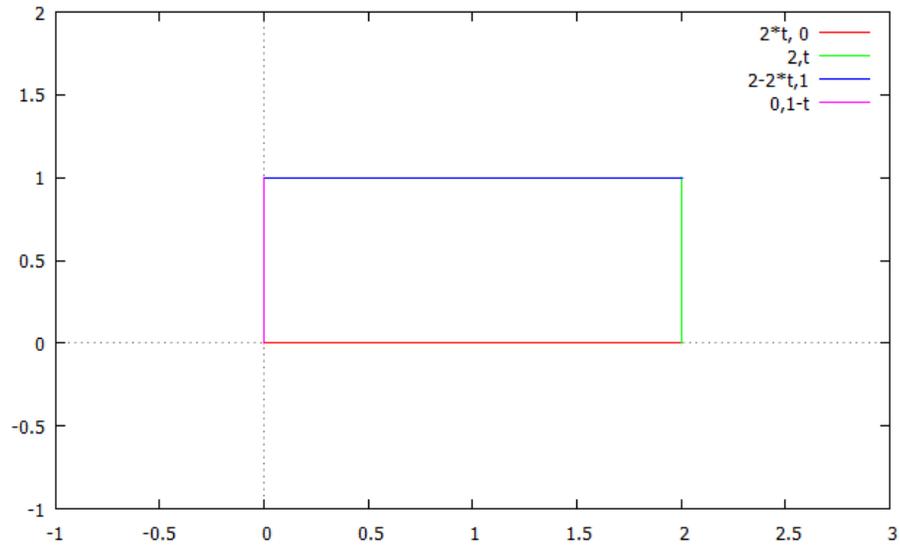
y

$$w = f(z) = \left(\frac{x(t)+1}{(x(t)+1)^2 + (y(t))^2} \right) - i \left(\frac{y(t)}{(x(t)+1)^2 + (y(t))^2} \right)$$

- En este caso, los segmentos son

- De $(0,0)$ a $(2,0)$: $x(t) = 2t$, $y(t) = 0$.
- De $(2,0)$ a $(2,1)$: $x(t) = 2$, $y(t) = t$.
- De $(2,1)$ a $(0,1)$: $x(t) = 2 - 2t$, $y(t) = 1$.
- De $(0,1)$ a $(0,0)$: $x(t) = 0$, $y(t) = 1 - t$.

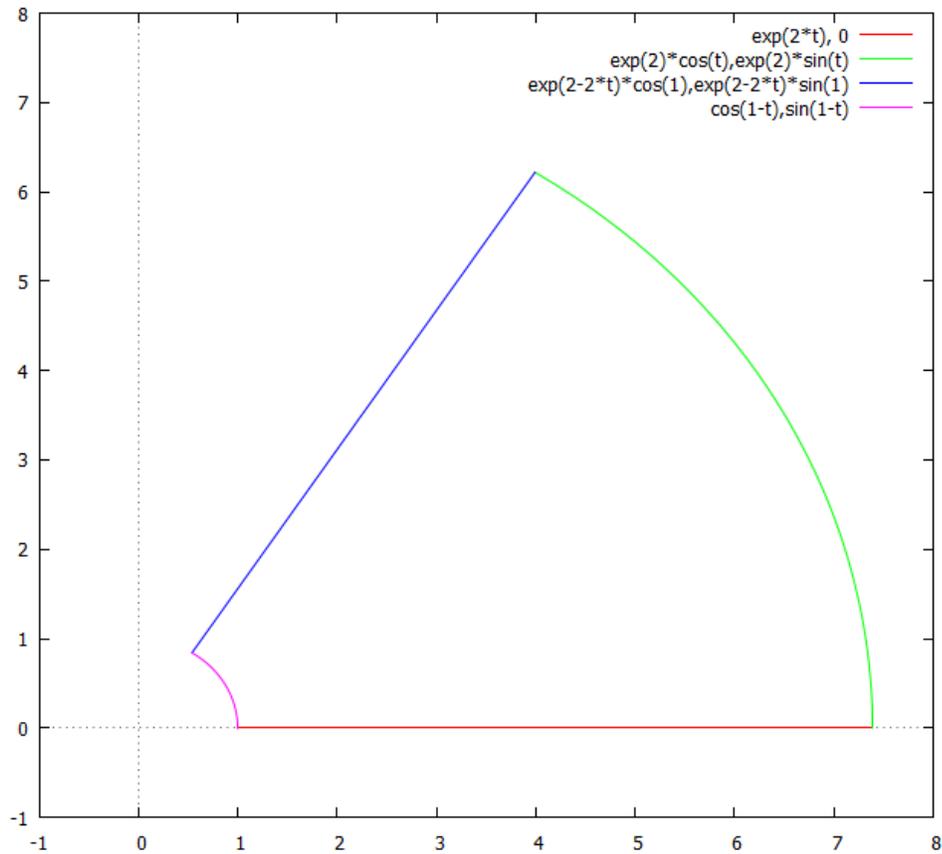
Los cuales se muestran a continuación.



Así que para $f(z) = e^z$, estos segmentos nos llevan al mapeo

- $w = e^{2t}[\cos 0 + i \operatorname{sen} 0] = (e^{2t}, 0)$
- $w = e^2[\cos t + i \operatorname{sen} t] = (e^2 \cos t, e^2 \operatorname{sen} t)$
- $w = e^{-2t}[\cos 1 + i \operatorname{sen} 1] = (e^{-2t} \cos 1, e^{-2t} \operatorname{sen} 1)$
- $w = e^0[\cos(1-t) + i \operatorname{sen}(1-t)] = (\cos(1-t), \operatorname{sen}(1-t))$

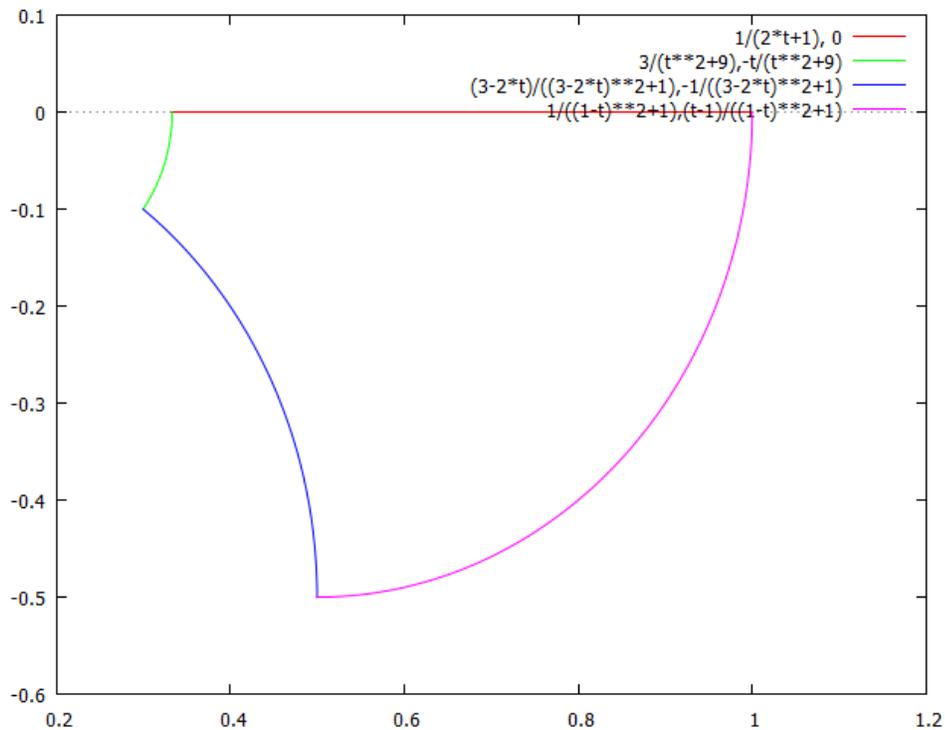
El mapeo anterior se muestra en la figura siguiente.



Mientras que para $f(z) = 1 / (z + 1)$, los segmentos considerados previamente, nos llevan a

- $w = \left(\frac{1}{(2t+1)}, 0 \right)$
- $w = \left(\frac{3}{(t^2+9)}, \frac{-t}{(t^2+9)} \right)$
- $w = \left(\frac{3-2t}{(3-2t)^2+1}, \frac{-1}{(3-2t)^2+1} \right)$
- $w = \left(\frac{1}{1+(1-t)^2}, \frac{t-1}{1+(1-t)^2} \right)$

Este mapeo se muestra en la figura siguiente.



c).- Límite y continuidad de una función.

Para introducir los conceptos de límite y continuidad de una función vamos a considerar que la función $f(z)$ está definida en un dominio D y que z_0 es un punto de D .

A continuación, vamos a ver que el límite y la continuidad de la función $f(z)$ se definen de la misma manera que en el caso de variable real.

Definición. Sea $f(z)$ una función definida en todos los puntos de cierta vecindad de z_0 , excepto, posiblemente en el mismo z_0 . Se dice que w_0 es el límite de $w = f(z)$, si para cualquier número positivo ε , existe un número positivo δ tal que

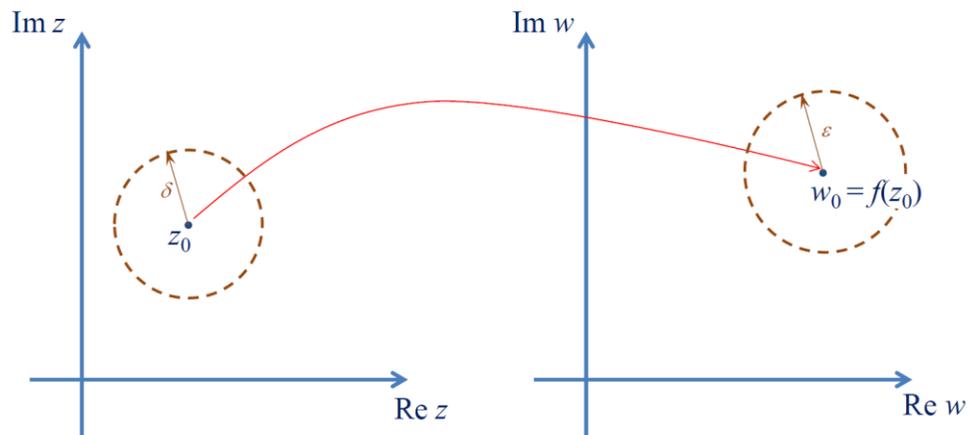
$$|f(z) - w_0| < \varepsilon, \text{ siempre que } |z - z_0| < \delta.$$

Se denota el límite de $f(z)$ con la expresión

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \quad (2.10)$$

cuando w_0 corresponde al límite de la función $f(z)$ cuando z se aproxima a z_0 ; y significa que la región alrededor de w_0 puede hacerse arbitrariamente pequeña conforme z se aproxima a z_0 sin importar la forma en que lo hace.

La definición anterior puede visualizarse en el siguiente esquema.



Ejemplo. Demuestre que si $f(z) = z / z^*$, entonces $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ no existe.

Solución. En este caso, basta mostrar que $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$ cuando nos acercamos al origen recorriendo el eje real, mientras que $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = -1$ cuando lo hacemos recorriendo el eje imaginario.

Lo anterior muestra que hay dos valores para el límite, pero debido a que el límite debe ser único podemos concluir con la aseveración de que el límite planteado NO existe.

A continuación se enuncian una serie de teoremas sobre límites que pueden ser fácilmente demostrado (quedando esto para los estudiantes interesados en tales demostraciones).

Separabilidad de las partes real e imaginaria

Suponga que $f(z) = u(z) + i v(z)$ y que $z = x + i y$, entonces

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(z) = u_0$$

y

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(z) = v_0$$

con lo que

$$w_0 = u_0 + iv_0$$

Teoremas útiles sobre límites

Supongamos que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$$

y

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$$

entonces

- i. $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \pm g(z)] = A \pm B$ (Suma de límites)
- ii. $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)g(z)] = AB$ (Producto de límites)
- iii. $\lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right] = \frac{A}{B}$, siempre que $B \neq 0$ (Cociente de límites)

Continuidad de una función

La condición de continuidad para una función de variable compleja $w = f(z)$, en analogía con el caso de funciones reales, se enuncia de la siguiente manera.

Definición. La función $f(z)$ es *continua* en el punto z_0 si se cumple que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

lo que implica que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe, y que $f(z_0)$ también existe.

Función polinomial $P_n(z)$

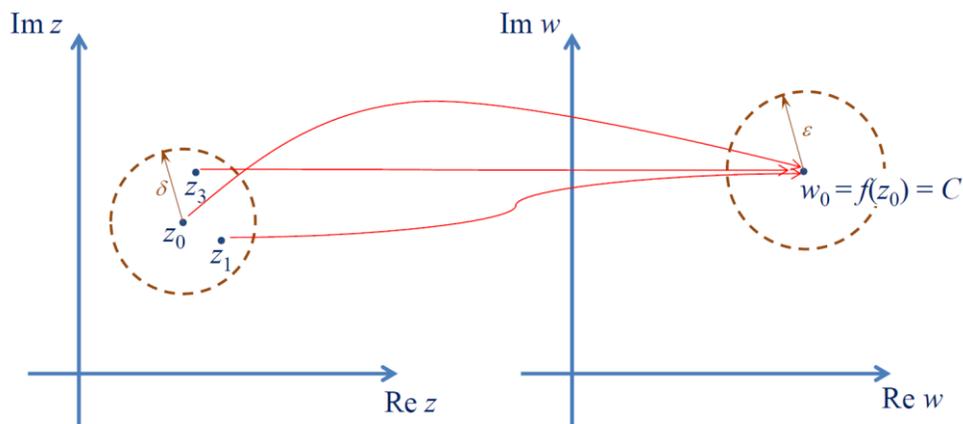
Las ideas anteriormente desarrolladas nos permiten concluir que una función polinomial $P_n(z)$ es continua para todo z , donde $P_n(z)$ está definido como

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z + a_0$$

donde n es un entero positivo.

Para justificar lo anterior notemos que

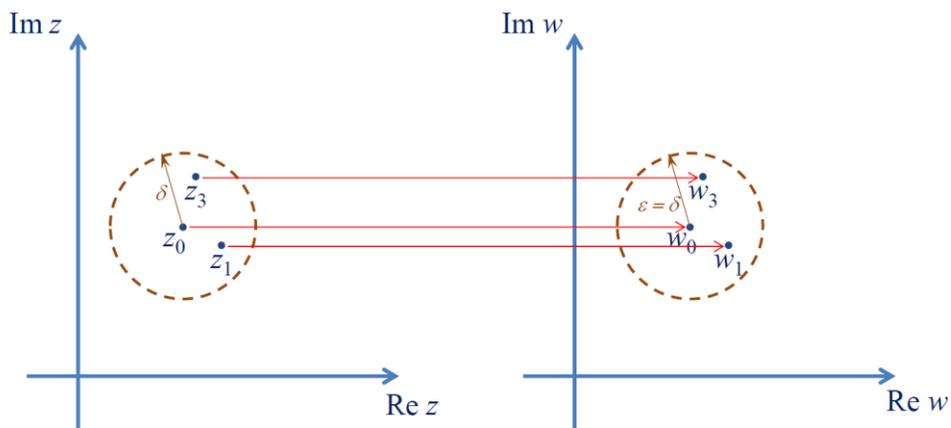
- i. Para toda función constante $f(z) = C$, el mapeo que se tiene es el siguiente



De aquí vemos que es evidente que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} C = C$$

- ii. Para la función identidad $f(z) = z$, el mapeo que se tiene es el siguiente



En este caso, la definición de límite se cumple cuando $\delta = \epsilon$, con lo que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} z = z_0$$

- iii. Para los términos z^n con $n > 1$, basta aplicar los dos resultados anteriores, junto con el límite de un producto, de manera recursiva, para mostrar que los términos $a_n z^n$ son continuos.

Con todo esto, podemos escribir que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} P_n(z) = P_n(z_0)$$

Límite absoluto

Otro resultado de aplicar la definición de límite establece que si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

entonces

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |w_0|$$

d).- Límites y el punto al infinito.

Plano complejo extendido

Hasta el momento el plano complejo, como lo hemos visto, no tiene claramente definido el infinito.

Sin embargo, en muchas situaciones es necesario considerar un punto al infinito; cuando esto ocurre, y el plano complejo incluye al infinito, hablamos del *plano complejo extendido*.

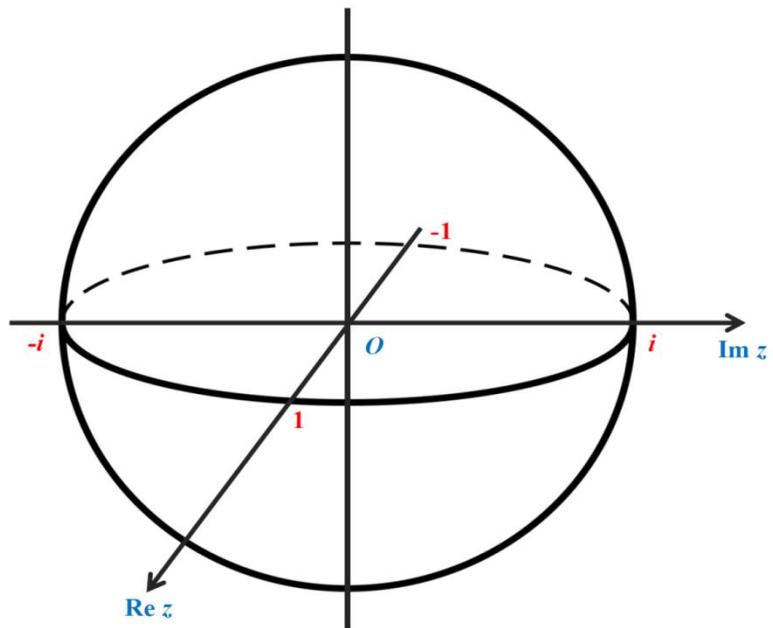
En el caso de variables reales, el infinito consta de dos puntos ubicados en los extremos negativo y positivo del eje real, en ambos casos el valor absoluto es el mismo: infinito. Para el caso de los números complejos, si queremos extender la idea nos encontramos con un problema, ya que existe un número infinito de números complejos z tales que su módulo (el análogo al valor absoluto) es infinito, para evitar esta situación trataremos con el llamado punto al infinito.

Para visualizar este punto al infinito se utiliza la siguiente idea.

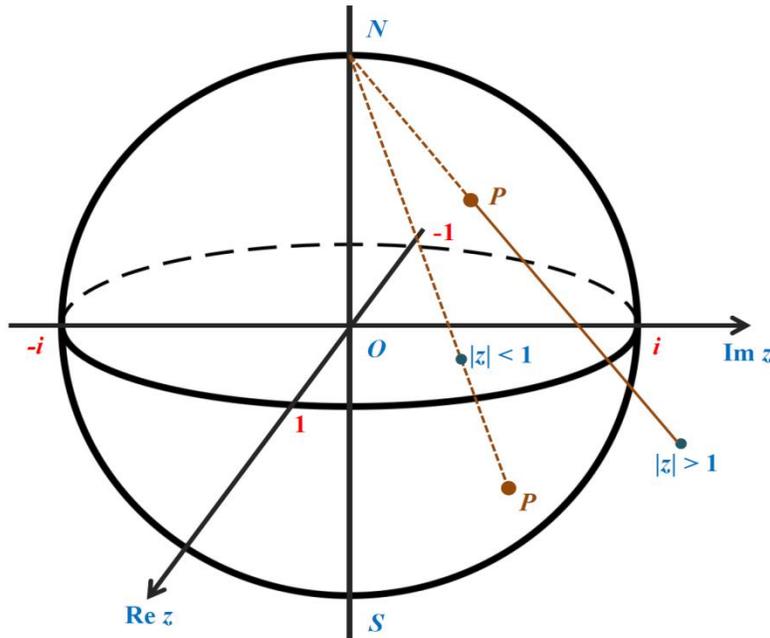
Consideremos que el plano complejo pasa por el ecuador de una esfera unitaria centrada en el origen O , tal como se muestra.

A cada punto z del plano le corresponde un punto P en la superficie de la esfera.

El punto P se determina por la intersección de la recta que va del polo norte N al punto z sobre el plano.



Para puntos z tales que $|z| > 1$ el punto P se ubica sobre el hemisferio Norte, para puntos tales que $|z| = 1$, el punto P está sobre el ecuador, mientras que para puntos z tales que $|z| < 1$ el punto P está sobre el hemisferio Sur; tal como se muestra en la siguiente figura.



Al punto P ubicado en el polo Norte le corresponde el **punto al infinito** representado por ∞ .

A la esfera unitaria utilizada para desarrollar la idea del punto al infinito se le conoce como **esfera de Riemann** y a la correspondencia entre puntos P de la esfera y puntos z del plano se le llama **proyección estereográfica**.

Con lo anterior, todos los puntos P de la esfera corresponden con puntos z en el plano complejo extendido, es importante notar que esta correspondencia entre puntos es uno a uno.

Límites y punto al infinito

Con el esquema anterior, podemos ver que conforme aumenta $|z|$, el punto P sobre la esfera se acerca a N , lo que nos permite decir que para ε positivo y pequeño, los puntos en el plano complejo exteriores al círculo $|z| = 1/\varepsilon$ corresponden a puntos sobre la esfera próximos al punto N , con lo que podemos afirmar que el conjunto $|z| > 1/\varepsilon$ es un entorno de infinito (∞).

Usando la idea anterior, podemos interpretar la expresión

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

En este caso, se tiene que para cada número positivo ε existe un número positivo δ tal que

$$|f(z)| > 1/\varepsilon$$

siempre que

$$0 < |z - z_0| < \delta,$$

es decir, si z está en el entorno de z_0 , entonces $f(z)$ está en el entorno $|z| > 1/\varepsilon$ para infinito.

Finalmente, con las ideas desarrolladas anteriormente, resulta válido establecer que si z_0 y w_0 son puntos en los planos complejos z y w , respectivamente, entonces

i. $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, si y sólo si $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$

ii. $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_0$, si y sólo si $\lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0$

iii. $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$, si y sólo si $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} = 0$

Ejercicios sugeridos.

Sección 2a:

1.- Escribe la función $f(z) = z^3 + z + 1$ en la forma $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$.

RESPUESTA: $f(x, y) = (x^3 - 3xy^2 + x + 1) + i(3x^2y - y^3 + y)$.

2.- Suponga que $f(z) = f(x, y) = x^2 - y^2 - 2y + i(2x - 2xy)$, donde $z = x + iy$. Use las expresiones

$$x = \frac{z+z^*}{2} \quad \text{y} \quad y = \frac{z-z^*}{2i}$$

para escribir $f(z)$ en términos de z , y simplifique el resultado.

RESPUESTA. $f(z) = z^{*2} + 2iz$.

3.- Escriba la función $f(z) = z + \frac{1}{z}$ con ($z \neq 0$) en la forma $f(z) = f(r, \theta) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$.

RESPUESTA. $f(z) = f(r, \theta) = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta + i \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \theta$.

4.- Separe cada una de las siguientes funciones $f(z)$ en sus componentes real e imaginaria, es decir, encuentre $u(x, y)$ y $v(x, y)$ tales que $f(z) = u + iv$.

(a) $f(z) = 2z^2 - 3iz$;

(b) $f(z) = z + 1/z$;

(c) $f(z) = \frac{1-z}{1+z}$;

(d) $f(z) = z^{1/2}$;

(e) $f(z) = z + \bar{z}^2 + 5i$.

Sección 2b:

- 5.- Bosqueje la región en la que se mapea el sector $r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/4$ considerando las transformaciones (a) $w = z^2$; (b) $w = z^3$; (c) $w = z^4$.
- 6.- Muestre que las líneas $ay = x$ con $a \neq 0$ se mapea en las espirales $\rho = \exp a\varphi$ bajo la transformación $f(z) = \exp z$, donde $w = \rho \exp i\varphi$.
- 7.- Encuentre la imagen de la tira semiinfinita $x \geq 0, 0 \leq y \leq \pi$ bajo la transformación $w = \exp z$, e identifique los segmentos correspondientes de las fronteras.
- 8.- La transformación $f(z) = \frac{1}{z}$, mapea el interior del círculo unitario $|z| = 1$ en su exterior, y viceversa. Bajo esta transformación, ¿en qué se mapea la línea $\arg z = \text{constante}$?

Sección 2c:

- 9.- Considerando que a, b y c denotan constantes complejas, use la definición de límite para mostrar que

(a) $\lim_{z \rightarrow z_0} (az + b) = az_0 + b$;

(b) $\lim_{z \rightarrow z_0} (z^2 + c) = z_0^2 + c$;

- 10.- Considerando que n es un entero positivo, y $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios tales que $Q(z_0) \neq 0$. Use los teoremas sobre límites que apliquen, haciendo mención explícita de ellos, para encontrar

(a) $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{z^n}$, con $z_0 \neq 0$;

(b) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{iz^3 - 1}{z + i}$;

(c) $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{P(z)}{Q(z)}$.

RESPUESTA. (a) $\frac{1}{z_0^n}$; (b) 0; (c) $\frac{P(z_0)}{Q(z_0)}$.

- 11.- Evalúe los siguientes límites usando los teoremas que apliquen. En cada caso, enuncie precisamente que teorema(s) usó.

(a) $\lim_{z \rightarrow 2i} (iz^4 + 3z^2 - 10i)$

(b) $\lim_{z \rightarrow e^{\pi i/4}} \frac{z^2}{z^4 + z + 1}$

(c) $\lim_{z \rightarrow i/2} \frac{(2z-3)(4z+i)}{(iz-1)^2}$

(d) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2+1}{z^6+1}$

(e) $\lim_{z \rightarrow 1+i} \left(\frac{z-1-i}{z^2-2z+2} \right)^2$

- 12.- Demuestre que $\lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{z^2-z+1-i}{z^2-2z+2} = 1 - \frac{1}{2}i$.

Sección 2d:

13.- Use los teoremas sobre límites al infinito para mostrar que

(a) $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{4z^2}{(z-1)^2} = 4;$

(b) $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(z-1)^3} = \infty;$

(c) $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2+1}{z-1} = \infty.$

14.- Con la ayuda de los teoremas sobre límites al infinito, muestre que cuando

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

con $ad - bc \neq 0$, se cumple que

(a) $\lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = \infty$, si $c = 0$;

(b) $\lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = \frac{a}{c}$ y $\lim_{z \rightarrow -d/c} T(z) = \infty$, si $c \neq 0$.

15.- Demuestre que $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^3 - 3z + 2}{z^4 + z^2 - 3z + 5} = 0$.

Versión preliminar

3.- Derivada e integral de funciones de variable compleja.

- a) Derivadas, funciones analíticas e interpretación geométrica.
- b) Reglas de diferenciación.
- c) Ecuaciones de Cauchy-Riemann.
- d) Funciones armónicas.
- e) Integración compleja.
- f) Integrales de funciones de variable compleja.

a).- Derivadas, funciones analíticas e interpretación geométrica.

Definición. Sea f una función cuyo dominio de definición contenga un entorno o vecindad $|z - z_0| < \varepsilon$ de un punto z_0 . La derivada de f en z_0 es el límite

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (3.1)$$

y se dice que f es **diferenciable** en z_0 cuando $f'(z_0)$ existe.

Si la derivada $f'(z)$ existe en todos los puntos z de una región R , se dice que $f(z)$ es analítica en R ; como sinónimos suelen usarse también los términos regular y holomorfa.

Sea z_0 existe un punto P en el plano z y sea w_0 su imagen P' en el plano w mediante la transformación $w = f(z)$. Como se supone que la función $f(z)$ es unívoca, entonces el punto z_0 es mapeado a un sólo punto w_0 .

Si se incrementa z_0 en Δz , se obtiene el punto Q , el cual tiene como imagen en el plano w al punto Q' .

De acuerdo con la figura que se muestra, se ve que el segmento $P'Q'$ representa al número complejo Δw , tal que

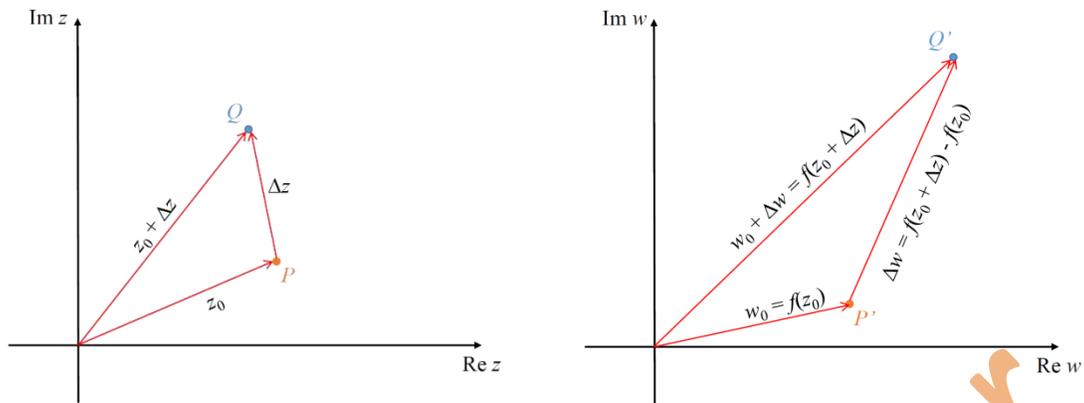
$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$

por lo que la derivada en z_0 para la función f , dada por la definición (3.1), si es que existe, se escribe como

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad (3.2)$$

ó

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$



En la ecuación (3.2) es evidente que, sin pérdida de generalidad, podemos eliminar el subíndice 0, y escribir

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (3.3)$$

ó

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{dw}{dz}$$

donde Δw denota el cambio en el valor $w = f(z)$ correspondiente a un cambio Δz en el punto en el que se evalúa f .

Ejemplos:

1. Considere una función f dada por $f(z) = 2z^3 + z - i$. Use la definición para mostrar que la derivada de la función f está dada por $f'(z) = 6z^2 + 1$.
2. Para la función $g(z) = 3z^2 - 2iz + 8$, (a) muestre que $g'(z) = 6z - 2i$; y (b) calcule $g'(5 - 2i)$.
3. Demuestre la **Regla de L'Hopital**, la cual establece que "si $f(z)$ y $g(z)$ son analíticas en z_0 y además $f(z_0) = g(z_0) = 0$, pero con $g'(z_0) \neq 0$, se cumple que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}."$$

b).- Reglas de diferenciación.

Suponga que $f(z)$, $g(z)$ y $h(z)$ son funciones analíticas de z , entonces son válidas las siguientes reglas de diferenciación.

1. $\frac{d}{dz}[f(z) \pm g(z)] = \frac{df(z)}{dz} \pm \frac{dg(z)}{dz} = f'(z) \pm g'(z)$.
2. $\frac{d}{dz}[cf(z)] = c \frac{df(z)}{dz} = cf'(z)$, donde c es una constante.

$$3. \quad \frac{d}{dz} [f(z)g(z)] = \frac{df(z)}{dz} g(z) + f(z) \frac{dg(z)}{dz} = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

$$4. \quad \frac{d}{dz} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right] = \frac{\frac{df(z)}{dz} g(z) - f(z) \frac{dg(z)}{dz}}{[g(z)]^2} = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}, \text{ siempre que } g(z) \neq 0.$$

5. Si $w = f(\xi)$ donde $\xi = g(z)$, entonces

$$\frac{dw}{dz} = \frac{df}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dz} = f'(\xi) \frac{d\xi}{dz} = f'[g(z)] g'(z)$$

Regla de la cadena para funciones de variable compleja

6. Si $w = f(z)$, tiene una función inversa unívoca f^{-1} , tal que $z = f^{-1}(w)$, entonces

$$f'(z) = \frac{dw}{dz} \quad \text{y} \quad [f^{-1}(w)]' = \frac{dz}{dw}$$

se relacionan mediante

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dw}}$$

7. Si $z = f(t)$ y $w = g(t)$, donde t es un parámetro, entonces

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\frac{dw}{dt}}{\frac{dz}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

Las funciones elementales se derivan de manera similar a como se realizan las derivadas en el cálculo elemental (de variables reales); así que expresiones como

- $\frac{dc}{dz} = 0$, si c es una constante
- $\frac{d}{dz} z^n = nz^{n-1}$
- $\frac{d}{dz} e^z = e^z$
- $\frac{d}{dz} a^z = a^z \ln a$
- $\frac{d}{dz} \sin z = \cos z$
- $\frac{d}{dz} \cos z = -\sin z$
- $\frac{d}{dz} \tan z = \sec^2 z$

son válidas en el cálculo de variable compleja.

Ejercicios:

- Usando la definición de derivada calcule $f'(z)$ para
 - $f(z) = z^3 - 2z^2 + 6iz$.
 - $f(z) = 5/z^2$.
 - $f(z) = (3z - 4i) / (z + i)$.
- Usando las reglas de diferenciación enunciadas anteriormente, verifique sus resultados.
- Encuentre la derivada $f'(z)$ y evalúela en el punto z_0 dado, considerando que
 - $f(z) = z^2 + 5iz + 3 - i$; $z_0 = 6 - i$.
 - $f(z) = (z^2 + 2iz) / (z - i)$; $z_0 = 4 + 2i$.
 - $f(z) = \text{sen}(z^2 + 3iz)$; $z_0 = i\pi$.

c).- Ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Las llamadas ecuaciones de Cauchy-Riemann son dos ecuaciones que deben satisfacerse en z_0 para que la derivada de una función f exista en z_0 .

Que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplan es una *condición necesaria pero no suficiente* para la existencia de $f'(z)$.

Partiendo de que la función $f(z)$ se puede separar en sus componentes real e imaginaria, tal que

$$f(z) = f(x,y) = u(x,y) + i v(x,y) \quad (3.4)$$

y considerando que

$$z_0 = x_0 + i y_0 \quad \text{con} \quad \Delta z = \Delta x + i \Delta y$$

podemos escribir

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$

es decir

$$\Delta w = [u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)] + i [v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)]. \quad (3.5)$$

Por otro lado, la derivada $f'(z_0)$

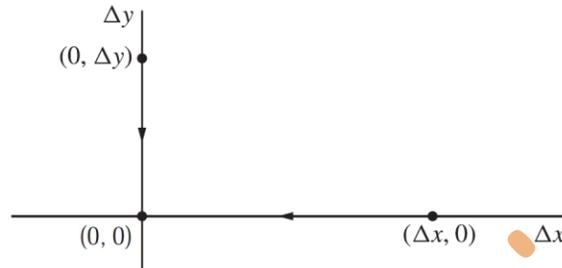
$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

se puede escribir como

$$f'(z_0) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \text{Re} \left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right) + i \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \text{Im} \left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right) \quad (3.6)$$

El límite $\Delta z = (\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)$ en la expresión anterior debe poder evaluarse en cualquier forma de aproximación a $(0,0)$; en lo que sigue consideraremos dos formas de hacerlo: (i) horizontalmente; y (ii) verticalmente.

Cuando $\Delta z \rightarrow (0,0)$ en dirección horizontal, consideraremos que $\Delta y = 0$; mientras que en la dirección vertical tomaremos $\Delta x = 0$, tal como se muestra a continuación.



En el recorrido horizontal ($\Delta y = 0$), usando la expresión (3.5), el cociente $\Delta w/\Delta z$ resulta

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{[u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)] + i[v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)]}{\Delta x}$$

así que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \operatorname{Re} \left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{[u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)]}{\Delta x} \right)$$

es decir

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \operatorname{Re} \left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0) \quad (3.7)$$

y

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \operatorname{Im} \left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{[v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)]}{\Delta x} \right)$$

es decir

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \operatorname{Im} \left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = v_x(x_0, y_0) \quad (3.8)$$

Usando las expresiones (3.7) y (3.8) la expresión para la derivada $f'(z_0)$, dada por (3.6), se puede escribir como

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0) \quad (3.9)$$

Si ahora consideramos la trayectoria vertical ($\Delta x = 0$) tenemos que el cociente $\Delta w/\Delta z$ es

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta w}{i\Delta y} = \frac{[u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)] + i[v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)]}{i\Delta y}$$

ó

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{[v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)] - i[u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)]}{\Delta y}$$

con lo que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \operatorname{Re} \left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{[v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)]}{\Delta y} \right)$$

es decir

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \operatorname{Re} \left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \quad (3.10)$$

y

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \operatorname{Im} \left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{-[u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)]}{\Delta y} \right)$$

es decir

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \operatorname{Im} \left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -u_y(x_0, y_0) \quad (3.11)$$

Usando las expresiones (3.10) y (3.11), ahora la expresión para la derivada dada por (3.6), se escribe como

$$f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0) \quad (3.12)$$

Las expresiones (3.9) y (3.12) no sólo nos proporcionan una forma de escribir la derivada de f en z_0 en términos de las derivadas parciales de las funciones componentes u y v , sino que también nos dan dos condiciones necesarias para la existencia de $f'(z_0)$.

Igualando las ecuaciones (3.9) y (3.12) tenemos que

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$$

lo que lleva (igualando partes real e imaginaria de ambos lados) a las dos ecuaciones siguientes.

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \quad (3.13)$$

$$v_x(x_0, y_0) = -u_y(x_0, y_0) \quad (3.14)$$

Este par de ecuaciones (3.13) y (3.14) son las **Ecuaciones de Cauchy-Riemann**, llamadas así en honor del francés Augustin Louis Cauchy y del alemán Georg Friederich Bernhard Riemann.

El resultado anterior se puede resumir en el siguiente teorema.

Teorema. Suponga que la función $f(z)$ se puede escribir como

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (3.4)$$

y que $f'(z)$ existe en un punto $z_0 = x_0 + i y_0$. Entonces las derivadas parciales de primer orden de u y v deben existir en (x_0, y_0) y además satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \quad (3.13)$$

$$v_x(x_0, y_0) = -u_y(x_0, y_0) \quad (3.14)$$

además $f'(z_0)$ se puede escribir como

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0). \quad (3.9)$$

Como se ha mencionado anteriormente, el que se cumplan las ecuaciones de Cauchy-Riemann no garantiza la existencia de $f'(z_0)$, para lograrlo se requiere extender estos resultados para incluir ciertos requisitos de continuidad.

Lo anterior se resume en el siguiente teorema.

Teorema. Sea la función $f(z)$, dada por

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (3.4)$$

definida en algún entorno o vecindad ε de un punto $z_0 = x_0 + i y_0$. Supongamos que las derivadas parciales de primer orden de las funciones u y v con respecto a x e y existen en todos los puntos de esa vecindad ε y además son continuas en (x_0, y_0) , entonces si esas derivadas parciales satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \quad (3.13)$$

$$v_x(x_0, y_0) = -u_y(x_0, y_0) \quad (3.14)$$

la derivada $f'(z_0)$ existe, y se puede escribir como

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0). \quad (3.9)$$

Ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann se pueden reescribir en coordenadas polares de la siguiente manera. Partiendo de que un número complejo z se puede representar como

$$z = x + i y \quad \text{ó} \quad z = |z|e^{i\theta}, \text{ con } |z| \neq 0,$$

tenemos que

$$x = |z| \cos \theta = r \cos \theta$$

$$y = |z| \sin \theta = r \sin \theta$$

lo que permite separar a la función $w = f(z)$ en sus componentes real u e imaginaria v para escribir $f(z)$ como

$$f(z) = f(r, \theta) = u(r, \theta) + i v(r, \theta).$$

Si suponemos que las derivadas parciales de primer orden de u y de v con respecto a x e y existen en una vecindad no nula de z_0 y que son continuas en dicho punto, entonces las derivadas parciales con respecto a r y θ tienen esas propiedades; así que

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

es decir

$$u_r = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta \quad (3.15)$$

y

$$u_\theta = r(-u_x \sin \theta + u_y \cos \theta) \quad (3.16)$$

Similarmente, para la componente imaginaria v , se tiene

$$v_r = v_x \cos \theta + v_y \sin \theta \quad (3.17)$$

y

$$v_\theta = r(-v_x \sin \theta + v_y \cos \theta) \quad (3.18)$$

Si a continuación retomamos las ecuaciones (3.13) y (3.14)

$$u_x = v_y \quad (3.13)$$

$$v_x = -u_y \quad (3.14)$$

podemos escribir a (3.17) y (3.18) como

$$v_r = -u_y \cos \theta + u_x \sin \theta \quad (3.19)$$

y

$$v_\theta = r(u_y \sin \theta + u_x \cos \theta) \quad (3.20)$$

Usando las ecuaciones (3.19) y (3.15) en las ecuaciones (3.16) y (3.20), tenemos

$$u_\theta = -r(-u_y \cos \theta + u_x \sin \theta) = -r(v_r) \quad (3.16)$$

y

$$v_\theta = r(u_y \sin \theta + u_x \cos \theta) = r(u_r) \quad (3.20)$$

Con lo anterior, las ecuaciones de Cauchy-Riemann (3.13) y (3.14) en coordenadas polares se reescriben como

$$v_r(r_0, \theta_0) = -\frac{1}{r_0} u_\theta(r_0, \theta_0) \quad (3.21)$$

y

$$u_r(r_0, \theta_0) = \frac{1}{r_0} v_\theta(r_0, \theta_0) \quad (3.22)$$

Resumiendo lo anterior, podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema. Sea la función $f(z)$, dada por

$$f(z) = f(r, \theta) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$$

definida en algún entorno o vecindad ε (alrededor) de un punto no nulo $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$. Supongamos que las primeras derivadas parciales de las funciones u y v con respecto a r y θ existen en todos los puntos de ese entorno ε y además son continuas en (r_0, θ_0) , entonces si esas derivadas parciales satisfacen la forma polar de las ecuaciones de Cauchy-Riemann en (r_0, θ_0) dadas por

$$v_r(r_0, \theta_0) = -\frac{1}{r_0} u_\theta(r_0, \theta_0) \quad (3.21)$$

y

$$u_r(r_0, \theta_0) = \frac{1}{r_0} v_\theta(r_0, \theta_0) \quad (3.22)$$

la derivada $f'(z_0)$ existe.

Ejemplos.

1. Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, pruebe que la derivada $f'(z)$ no existe en ningún punto del plano- z para $f(z) = z - z^*$.
2. Verifique que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen para la función $f(z)$ definida por
 - a. $f(z) = \exp(z^2)$
 - b. $f(z) = \cos(2z)$
 - c. $f(z) = z^2 + 5iz + 3 - i$
 - d. $f(z) = z \exp(-z)$
3. Muestre que la función $g(x, y) = x^2 + iy^3$ es no analítica en cualquier punto.

d).- Funciones armónicas.

Definición. Una función real H de dos variables x e y se dice armónica en un dominio dado del plano xy si sobre ese dominio tiene derivadas parciales continuas de primer y segundo orden que satisfacen la ecuación

$$H_{xx}(x, y) + H_{yy}(x, y) = 0 \quad (3.23)$$

conocida como *Ecuación de Laplace*.

Para el cálculo de variable compleja podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema. Si una función $f(z) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ es analítica en un dominio D , sus funciones componentes u y v son armónicas en D .

Demostración. Supuesta $f(z)$ analítica en D , se deben cumplir las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) \quad (3.13)$$

y

$$u_y(x, y) = -v_x(x, y) \quad (3.14)$$

Derivando las ecuaciones anteriores respecto a x , tenemos

$$u_{xx}(x, y) = v_{yx}(x, y) \quad (3.24)$$

y

$$u_{yx}(x, y) = -v_{xx}(x, y) \quad (3.25)$$

Similarmente, si derivamos respecto a y tendremos

$$u_{xy}(x, y) = v_{yy}(x, y) \quad (3.26)$$

y

$$u_{yy}(x, y) = -v_{xy}(x, y) \quad (3.27)$$

Ahora, usando las ecuaciones (3.24) y (3.27), se ve que podemos escribir

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0 \quad (3.28)$$

y usando (3.25) y (3.26) vemos que también podemos escribir

$$v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) = 0 \quad (3.29)$$

Con estos resultados [ecuaciones (3.28) y (3.29)] vemos que u y v son armónicas en D , con lo que se demuestra el teorema.

Definición. Si dos funciones dadas u y v son armónicas en un dominio D y sus derivadas parciales de primer orden satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el dominio D se dice que v es **armónica conjugada** de u .

Ejemplos.

1. Pruebe que la función $u(x,y)$ dada, es armónica.
2. Encuentre una función $v(x,y)$ tal que $f(z) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ sea analítica, es decir, encuentre la función armónica conjugada de $u(x,y)$.
3. Expresar f en términos de z , es decir, $f(z)$.

En los tres casos, considere que

- a) $u(x,y) = 2x(1 - y)$
- b) $u(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y$

e).- Integración compleja.

Antes de introducir las integrales de una función compleja de variable compleja $f(z)$, consideraremos primero derivadas e integrales de funciones complejas $w(t)$ de una variable real, es decir

$$w(t) = u(t) + iv(t) \quad (3.30)$$

donde las funciones u y v son funciones reales de t .

Con lo anterior, la derivada

$$w'(t) = \frac{d[w(t)]}{dt}$$

de la función $w(t)$ en un punto t satisface que

$$w'(t) = u'(t) + iv'(t) \quad (3.31)$$

suponiendo que $u'(t)$ y $v'(t)$ existen.

Es evidente que muchas de las reglas aprendidas en el cálculo de variable real aplican para la función $w(t)$, toda vez que $u(t)$ y $v(t)$ son funciones reales, lo que las hace verificables al aplicar las correspondientes reglas para las funciones reales.

Sin embargo, hay que hacer notar que no toda regla de derivación del cálculo es válida para funciones del tipo de $w(t)$.

En particular, el teorema del valor medio para la derivada ya no es aplicable, es decir, no es necesariamente cierto que exista un número c en el intervalo $a < t < b$ tal que

$$w'(c)(b - a) = w(b) - w(a) \quad (3.32)$$

Por ejemplo, $w(t) = \exp(it)$ en el intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$ no cumple (3.32) ya que

$$w'(t) = i \exp(it) = -\sin t + i \cos t$$

nunca es cero, mientras que

$$w(2\pi) = 1 \quad \text{y} \quad w(0) = 1$$

por lo que no se cumple la relación (3.32) ya que

$$w(2\pi) - w(0) = 0.$$

Definición. Con lo anterior en mente, podemos definir la **integral definida** de $w(t)$ en el intervalo $a \leq t \leq b$ como

$$\int_a^b w(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt \quad (3.33)$$

cuando las integrales de $u(t)$ y $v(t)$ existan.

De igual manera, podemos establecer que

$$\int_a^b w(t)dt = \int_a^c w(t)dt + \int_c^b w(t)dt \quad (3.34)$$

con lo que podemos integrar una función $w(t)$ continua a trozos o por segmentos, sin importar que sea discontinua en c , ya que sólo necesitamos que posea límites laterales que garanticen la existencia de las integrales por separado.

Definición. Si $u(t)$ y/o $v(t)$ son continuas a trozos en un intervalo $[a,b]$, entonces diremos que $w(t)$ es continua a trozos en dicho intervalo.

El teorema fundamental del cálculo sobre primitivas puede extenderse a las integrales del tipo (3.33), para lo cual supongamos que las funciones

$$w(t) = u(t) + i v(t)$$

y

$$W(t) = U(t) + i V(t)$$

son continuas en el intervalo $a \leq t \leq b$.

Si $W'(t) = w(t)$, para $a \leq t \leq b$, entonces

$$U'(t) = u(t)$$

y

$$V'(t) = v(t).$$

Por lo tanto

$$\int_a^b w(t)dt = U(t)\Big|_a^b + iV(t)\Big|_a^b$$

$$\int_a^b w(t)dt = [U(b) + iV(b)] - [U(a) + iV(a)]$$

es decir

$$\int_a^b w(t)dt = W(t)\Big|_a^b = W(b) - W(a) \quad (3.35)$$

Finalmente estableceremos una propiedad básica de los valores absolutos de las integrales; para ello, tomemos $a < b$ y supondremos que el valor de la integral definida en la ecuación (3.33) es un número complejo no nulo z_0 .

Si r_0 es el módulo y θ_0 es un argumento de z_0 , tenemos que

$$\int_a^b w(t)dt = z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \quad (3.36)$$

de donde

$$r_0 = \int_a^b e^{-i\theta_0} w(t)dt \quad (3.37)$$

Como r_0 es un número real, la integral (3.37) debe ser real, es decir

$$r_0 = \int_a^b e^{-i\theta_0} w(t) dt = \operatorname{Re} \int_a^b e^{-i\theta_0} w(t) dt$$

con lo que la expresión para r_0 [ecuación (3.37)] toma la forma

$$r_0 = \int_a^b \operatorname{Re} \left[e^{-i\theta_0} w(t) \right] dt \quad (3.38)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[e^{-i\theta_0} w(t) \right] &\leq \left| e^{-i\theta_0} w(t) \right| \\ \operatorname{Re} \left[e^{-i\theta_0} w(t) \right] &\leq \left| e^{-i\theta_0} \right| |w(t)| \end{aligned}$$

es decir

$$\operatorname{Re} \left[e^{-i\theta_0} w(t) \right] \leq |w(t)| \quad (3.39)$$

Usando las ecuaciones (3.38) y (3.39) es posible escribir

$$r_0 \leq \int_a^b |w(t)| dt \quad (3.40)$$

pero como

$$r_0 = |r_0| = \left| \int_a^b e^{-i\theta_0} w(t) dt \right|$$

finalmente podemos escribir la siguiente relación

$$\left| \int_a^b w(t) dt \right| \leq \int_a^b |w(t)| dt \quad (3.41)$$

Ejemplos. Calcule las siguientes integrales:

a) $\int_1^4 \left(\frac{1}{2t} + i \right)^2 dt$

b) $\int_0^{\pi/6} e^{i3t} dt$

c) $\int_0^{\infty} e^{-zt} dt$

f).- Integrales de funciones de variable compleja.

La integración de una función compleja de variable compleja se define sobre curvas en el plano complejo en vez de sobre intervalos de la recta real, como vimos en las secciones previas. Estas curvas se conocen como *contornos*, así que a continuación veremos con un poco más de detalle estas trayectorias. Para entender, y estar en condiciones de aplicar, estas clases de curvas (adecuadas para el estudio de las integrales de una función de variable compleja) se hace necesario que veamos algunas definiciones.

Curva. Una curva C es un conjunto de puntos $z = x + iy$ en el plano complejo tales que

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \leq t \leq b$$

donde $x(t)$ e $y(t)$ son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$. Los puntos de C se pueden describir mediante la ecuación

$$z(t) = x(t) + iy(t) \quad a \leq t \leq b$$

y se dice que $z(t)$ es continua, ya que $x(t)$ y $y(t)$ son continuas.

Curva suave. Una curva C se llama *curva suave*, si $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ existe y es continua en el intervalo $a \leq t \leq b$ y si $z'(t)$ nunca se hace cero en el intervalo.

Contorno. Un contorno o curva suave a tramos, es una curva que consta de un número finito de curvas suaves unidas por sus extremos.

Contorno cerrado simple. Sea C un contorno. Se dice que C es un contorno cerrado simple si solamente los valores inicial y final de $z(t)$ son iguales, es decir, $z(b) = z(a)$.

Integrales de línea.

Sea $f(z)$ una función de variable compleja. Sea C un contorno representado por la ecuación

$$z(t) = x(t) + iy(t) \quad a \leq t \leq b$$

que se extiende del punto $\alpha = z(a)$ al punto $\beta = z(b)$.

Supongamos que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es continua a trozos en C , es decir, las partes real e imaginaria,

$$u(x(t), y(t)) \quad \text{y} \quad v(x(t), y(t))$$

de $f(z(t))$ son funciones de t continuas por tramos.

Bajo estas condiciones, se define la integral de línea de f a lo largo de C como:

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \quad (3.42)$$

donde $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

Asociado al contorno C de la ecuación (3.42), está el contorno $-C$, el cual se describe por la ecuación $z = z(-t)$ donde $-b \leq t \leq -a$. Por tanto,

$$\int_{-C} f(z) dz = \int_{-a}^b f(z(-t)) z'(-t) dt$$

donde $z'(-t)$ denota la derivada de $z(t)$ con respecto a t evaluada en $-t$.

La integral de línea definida en la ecuación (3.42) tiene algunas propiedades que nos serán útiles al calcular integrales de funciones de variable compleja.

Sean $f(z)$ y $g(z)$ funciones de variable compleja continuas a trozos sobre un contorno C descrito por la ecuación $z = z(t)$ ($a \leq t \leq b$). A partir de la ecuación (3.42) se deducen fácilmente las siguientes propiedades de las integrales de línea.

i. $\int_C a f(z) dz = a \int_C f(z) dz$, para toda constante compleja a .

ii. $\int_C [f(z) + g(z)] dz = \int_C f(z) dz + \int_C g(z) dz$.

iii. Si C consta de una curva C_1 desde α_1 hasta β_1 y de la curva C_2 desde α_2 hasta β_2 , donde $\beta_1 = \alpha_2$, se cumple que

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz$$

iv. $\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_a^b |f(z(t)) z'(t)| dt$

Ejemplo.

Calcular $\int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz$ donde $|z|=1$ es la circunferencia centrada en el origen y de radio 1, recorrida en sentido positivo.

Teorema de Cauchy-Goursat

El siguiente resultado se conoce como Teorema de Cauchy-Goursat.

Teorema de Cauchy-Goursat. Sea C un contorno cerrado simple. Sea f una función analítica sobre y en el interior de C . Entonces

$$\int_C f(z) dz = 0 \tag{3.43}$$

El Teorema de Cauchy-Goursat es uno de los más importantes en la teoría de variable compleja. Una de las razones es que puede ahorrarnos una gran cantidad de trabajo al realizar cierto tipo de integraciones.

Por ejemplo, integrales como

$$\int_C \sin z dz, \int_C \cosh z dz \text{ y } \int_C e^z dz$$

deben anularse si C es un contorno cerrado simple cualquiera. En todos estos casos, el integrando es una función entera.

Obsérvese que la dirección de integración en la ecuación (3.43) no afecta el resultado pues $\int_{-C} f(z) dz = -\int_C f(z) dz$.

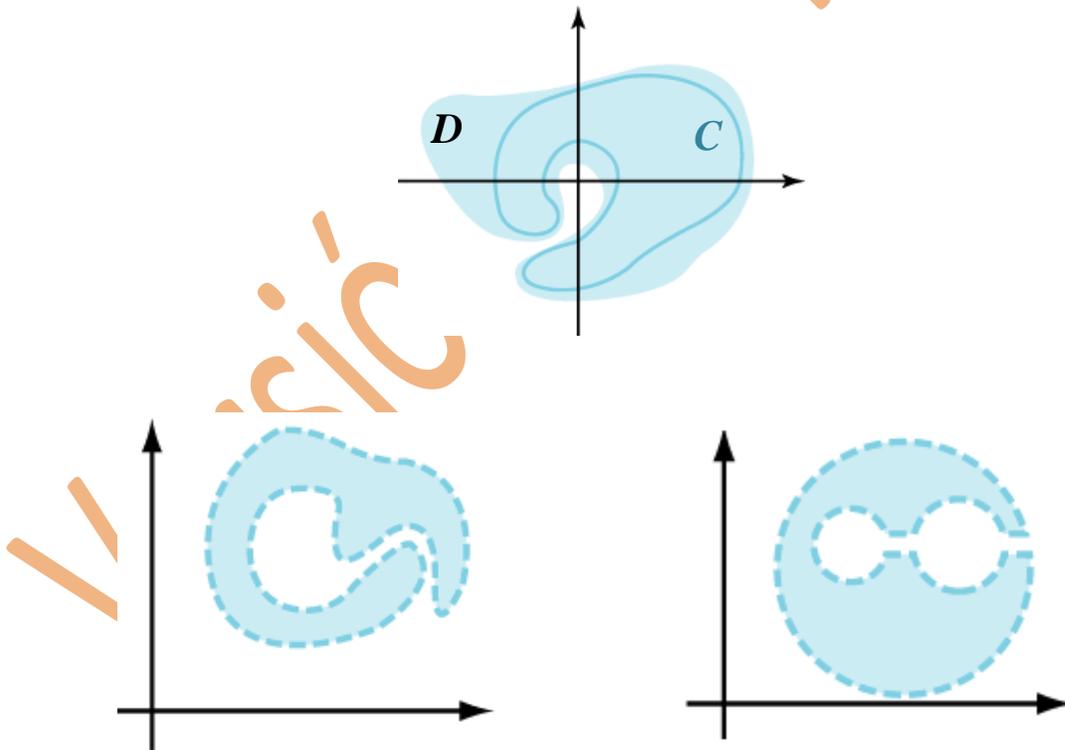
Ejemplo.

Verifique que

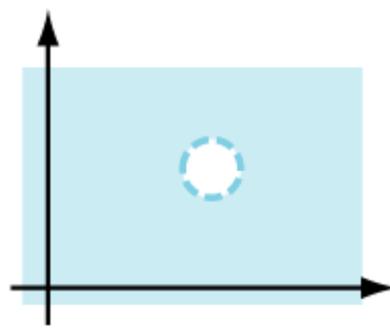
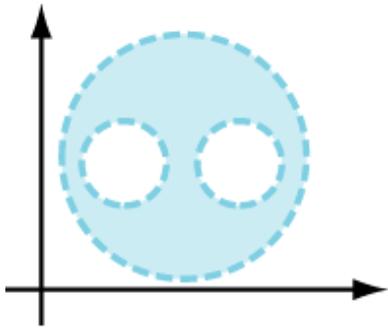
$$\int_C z^n dz = 0$$

donde n es un entero positivo y C es la circunferencia $|z| = r$, con $r > 0$.

Dominio simplemente conexo. Un dominio D se dice simplemente conexo si todo contorno cerrado simple C dentro del mismo encierra sólo puntos de D .



Dominio múltiplemente conexo. Un dominio D se dice múltiplemente conexo si no es simplemente conexo.



El **Teorema de Cauchy-Goursat** se puede extender **para dominios simplemente conexos**.

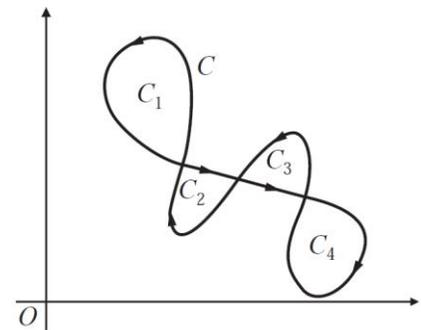
Si una función f es analítica en un dominio simplemente conexo D , entonces para todo contorno cerrado simple C , dentro de D , se cumple

$$\int_C f(z) dz = 0$$

Incluso si C es un contorno simple cerrado que interseca consigo mismo un número finito de veces, de tal forma que consiste de un número finito de contornos simples cerrados C_k , el teorema de Cauchy-Goursat sigue siendo válido.

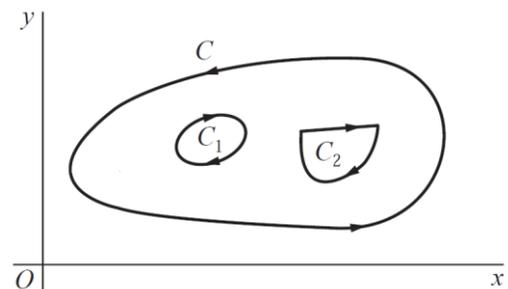
Por ejemplo, para el contorno mostrado en la figura se tiene que

$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^4 \int_{C_k} f(z) dz = 0$$



De igual forma, el **Teorema de Cauchy-Goursat** se puede extender **para dominios múltiplemente conexos**.

Se denota a C como un contorno cerrado simple y a C_j ($j = 1, 2, \dots, n$) como un número finito de contornos cerrados simples interiores a C tales que los conjuntos interiores a cada C_j no tienen puntos en común, tal como se muestra en la figura.



R es la región cerrada que consta de todos los puntos dentro y sobre C excepto los puntos interiores a cada C_j (R es un dominio múltiplemente conexo).

Se denota por B la frontera completa orientada de R que consta de C y todos los C_j , descrita en una dirección tal que los puntos de R se encuentran a la izquierda de B . En este caso, si una función f es analítica en R , entonces

$$\int_B f(z)dz = 0$$

Ejemplo. Demostrar que

$$\int_B \frac{dz}{z^2(z^2-1)} = 0$$

donde B consta de la circunferencia $|z| = 2$ descrita en la dirección positiva, y de las circunferencias $|z+1| = 1/2$, $|z| = 1/2$ y $|z-1| = 1/2$, descritas en la dirección negativa.

Integral indefinida

El Teorema de Cauchy-Goursat es una herramienta valiosa cuando se trata de integrar una función analítica alrededor de un contorno cerrado. En caso de que el contorno no sea cerrado, existen métodos que se pueden deducir a partir de dicho teorema y que facilitan el cálculo de la integral considerada.

El siguiente teorema se conoce como *principio de independencia de la trayectoria*.

Principio de independencia de la trayectoria. Sea $f(z)$ una función analítica en todo punto de un dominio simplemente conexo D y sean z_1 y z_2 dos puntos de D . Entonces, si usamos contornos contenidos en D , el valor de

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$$

no dependerá del contorno utilizado para ir de z_1 a z_2 .

Demostración. Sea D un dominio simplemente conexo y C_1 y C_2 dos contornos en D sin intersección que van de z_1 a z_2 . Se tiene que los contornos C_1 y $-C_2$ forman un contorno cerrado simple, que denominaremos C . Luego, por el Teorema de Cauchy-Goursat si

$$\int_C f(z)dz = 0$$

pero

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{-C_2} f(z)dz$$

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz$$

Por lo tanto,

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

lo cual indica que la integral desde z_1 hasta z_2 es así independiente del contorno seguido, en tanto ese contorno se encuentre dentro de D .

Del principio de la independencia de la trayectoria podemos definir la *primitiva de una función de variable compleja*.

Definición. Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio simplemente conexo D . Sea z_0 un punto de D . La función $F(z)$ definida en D por

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(s)ds + c \quad (3.44)$$

donde c es una constante compleja, se denomina **integral indefinida o primitiva** de f .

En realidad $f(z)$ posee un número infinito de primitivas. Dichas primitivas difieren en valores constantes y son analíticas en D , y satisfacen

$$F'(z) = f(z).$$

Usamos la integral indefinida $\int f(z)dz$ para indicar todas las posibles primitivas de $f(z)$. El valor de la constante correspondiente a una primitiva específica $\int_{z_0}^z f(s)ds$ queda determinado por el límite de integración inferior como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo.

Encuentre las primitivas de $f(z) = z \sin(z)$ y emplee el resultado obtenido para calcular $\int_{\pi}^z s \sin s ds$.

Según la definición (3.44), una integral definida se puede evaluar como el cambio en el valor de la integral indefinida, tal como se hace en el cálculo elemental, es decir

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)dz = F(\beta) - F(\alpha) = F(z) \Big|_{\alpha}^{\beta}$$

Ejemplo.

Calcular la integral definida

$$\int_{\pi}^1 z \sin z dz$$

A continuación veremos que si una función es analítica en un punto, sus derivadas de todos los órdenes existen en ese punto y son también analíticas ahí.

Previo a este resultado veremos un resultado interesante que se obtiene a través del Teorema de Cauchy-Goursat. Este resultado se conoce como *fórmula integral de Cauchy*.

Si consideramos una función analítica sobre y en el interior de un contorno cerrado simple, basta con conocer los valores que ella toma sobre ese contorno, para determinar los valores que toma en el interior del mismo.

Fórmula integral de Cauchy.

Definición. Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio simplemente conexo D . Sea C un contorno cerrado simple perteneciente a D . Sea z_0 un punto interior de C . Entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

La expresión anterior se denomina *fórmula integral de Cauchy*.

El siguiente ejemplo aclara el uso de esta fórmula en la evaluación de integrales.

Ejemplo.

Hallar el valor de la integral $\int_C \frac{dz}{z^2 + 4}$, donde C es la circunferencia $|z - i| = 2$.

Solución. Para resolver esta integral veamos si podemos aplicar alguno de los teoremas vistos anteriormente, para ello analicemos la posible analiticidad del integrando en el contorno C .

El integrando presenta dos puntos en los que se indefine ($z = \pm 2i$), uno de los cuales ($z = 2i$) se ubica dentro del contorno C , por lo que no es posible aplicar el Teorema de Cauchy-Goursat; para investigar la factibilidad de aplicar la fórmula integral de Cauchy, procedemos de la siguiente forma.

Factorizando el denominador, podemos escribir

$$\int_C \frac{dz}{z^2 + 4} = \int_C \frac{dz}{(z + 2i)(z - 2i)} = \int_C \frac{1}{z - 2i} dz = \int_C \frac{1}{z + 2i} dz$$

En la primera posibilidad, la función $f(z) = \frac{1}{z - 2i}$ presenta la singularidad ($z = 2i$) que cae dentro del

contorno C , por lo que no permite aplicar la fórmula integral de Cauchy; por otro lado, $f(z) = \frac{1}{z + 2i}$

no presenta singularidad dentro (ni sobre) el contorno C , por lo que es factible aplicar la fórmula, así que tomamos

$$\int_C \frac{dz}{(z^2 + 4)} = \int_C \frac{1}{(z+2i)(z-2i)} dz$$

de donde identificamos que $z_0 = 2i$, por lo que

$$\begin{aligned} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)} dz &= 2\pi i f(z_0) = 2\pi i f(2i) \\ &= 2\pi i \frac{1}{(z_0 + 2i)} = \frac{2\pi i}{(2i + 2i)} \end{aligned}$$

Por lo que

$$\int_C \frac{dz}{(z^2 + 4)} = \frac{\pi}{2}$$

Veamos que si una función es analítica en un punto, sus derivadas de todos los órdenes existen en ese punto y son también analíticas.

Extensión de la fórmula integral de Cauchy. Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio simplemente conexo D . Sea C un contorno cerrado simple perteneciente a D . Sea z_0 un punto interior de C . Entonces f es infinitamente diferenciable en cada punto de D y la derivada n -ésima de f en z_0 es:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad (3.45)$$

Además, $f^{(n)}(z)$ es analítica en D para cada n .

El siguiente ejemplo aclara el uso de la ecuación (3.45) en la evaluación de integrales.

Ejemplo.

Hallar el valor de la integral $\int_C \frac{dz}{(z^2 + 4)^2}$, donde C es la circunferencia $|z - i| = 2$.

Solución. Para resolver esta integral, al igual que en el ejemplo anterior, veamos si podemos aplicar alguno de los teoremas vistos anteriormente, para ello analicemos la posible analiticidad del integrando en el contorno C .

El integrando presenta singularidades en los puntos $z = \pm 2i$, en particular, $z = 2i$ se ubica dentro del contorno C , por lo que no es posible aplicar el Teorema de Cauchy-Goursat; para investigar la factibilidad de aplicar la extensión de la fórmula integral de Cauchy, procedemos de la siguiente forma.

Factorizando el denominador, podemos escribir

$$\int_C \frac{dz}{(z^2+4)^2} = \int_C \frac{dz}{(z+2i)^2(z-2i)^2} = \int_C \frac{1}{(z+2i)^2} dz$$

En este caso advertimos que $f(z) = \frac{1}{(z+2i)^2}$ no presenta singularidad dentro (ni sobre) el contorno C ,

por lo que es factible aplicar la extensión de la fórmula integral de Cauchy con $z_0 = 2i$ y $n = 1$, por lo que

$$\begin{aligned} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz &= \frac{2\pi i f'(z_0)}{1!} = \frac{2\pi i f'(2i)}{1!} \\ &= 2\pi i \left(\frac{-2}{(z_0+2i)^3} \right) = \frac{-4\pi i}{(2i+2i)^3} \end{aligned}$$

Por lo que

$$\int_C \frac{dz}{(z^2+4)^2} = \frac{\pi}{16}$$

Ejercicios sugeridos.

Repaso:

1.- Muestre que

a) $e^{(2\pm 3\pi i)} = -e^2$

b) $e^{\left(\frac{2+\pi i}{4}\right)} = \sqrt{\frac{e}{2}}(1+i)$

c) $e^{(z+\pi i)} = -e^z$

2.- Muestre que $|e^{z^2}| \leq e^{|z|^2}$.

3.- Encuentre todos los valores de z tales que

a) $e^z = -2$

b) $e^z = 1 + i\sqrt{3}$

c) $e^{(2z-1)} = 1$

RESPUESTA. a) $z = \ln 2 + (2n+1)\pi i$; b) $z = \ln 2 + \left(2n + \frac{1}{3}\right)\pi i$; c) $z = \frac{1}{2} + n\pi i$.

4.- (a) Muestre que si e^z es real, entonces $\text{Im } z = n\pi$ (con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). (b) Si e^z es un imaginario puro, ¿qué restricción se requiere para z ?

Secciones 3a y 3b:

5.- Derive la expresión $\frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}$, cuando n es un entero positivo, usando

- a) inducción matemática y la expresión para la derivada del producto de dos funciones; y
- b) la definición de derivada y la fórmula binomial.

6.- Usando diferentes trayectorias para evaluar el límite cuando $\Delta z \rightarrow (0,0)$, muestre que $f'(z)$ no existe en ningún punto z cuando

- a) $f(z) = \bar{z}$
- b) $f(z) = \operatorname{Re} z$
- c) $f(z) = \operatorname{Im} z$

Sección 3c:

7.- Use el teorema de Cauchy-Riemann para mostrar que $f'(z)$ no existe en ningún punto si

- a) $f(z) = \bar{z}$
- b) $f(z) = f(x, y) = 2x + ixy^2$
- c) $f(z) = f(x, y) = e^x e^{-iy}$

8.- Usando el Teorema de Cauchy-Riemann extendido, determine dónde existe $f'(z)$ y encuentre su valor cuando

- a) $f(z) = \frac{1}{z}$
- b) $f(z) = f(x, y) = x^2 + iy^2$
- c) $f(z) = z \operatorname{Im} z$

RESPUESTA. a) $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$, para $z \neq 0$; b) $f'(x + iy) = 2x$; c) $f'(0) = 0$.

9.- Use las ecuaciones de Cauchy-Riemann para mostrar que las siguientes funciones son diferenciables en el dominio (de definición) indicado, y también encuentre $f'(z)$:

- a) $f(z) = \frac{1}{z^4}$, para $z \neq 0$.
- b) $f(z) = f(r, \theta) = \sqrt{r} e^{i\theta/2}$, para $r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi$.

RESPUESTA. b) $f'(z) = \frac{1}{2f(z)}$.

Sección 3d:

10.- Muestre que $u(x, y)$ es una función armónica en algún dominio y encuentre una armónica conjugada $v(x, y)$ cuando

- a) $u(x, y) = 2x(1 - y)$

b) $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$

c) $u(x, y) = \sinh x \sin y$

d) $u(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$

RESPUESTA. a) $v(x, y) = x^2 - y^2 + 2y$; b) $v(x, y) = 2y - 3x^2y + y^3$; c) $v(x, y) = -\cosh x \cos y$;
d) $v(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

11.- Considere la función $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ analítica en un dominio D que excluye al origen. Use las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares y asumiendo la continuidad de las derivadas parciales, muestre que la función $u(r, \theta)$ satisface la ecuación diferencial parcial

$$r^2 u_{rr}(r, \theta) + r u_r(r, \theta) + u_{\theta\theta}(r, \theta) = 0$$

Que corresponde a la *forma polar de la Ecuación de Laplace*. Muestre que esto también es válido para la función $v(r, \theta)$.

12.- Determine cuáles de las siguientes funciones u son armónicas. Para cada función armónica, encuentre la función armónica conjugada v y exprese $u + iv$ como una función analítica de z .

a) $u(x, y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$

b) $u(x, y) = 2xy + 3xy^2 - 2y^3$

c) $u(x, y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y$

d) $u(x, y) = e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2)$

RESPUESTA. a) $v(x, y) = 4xy - x^3 + 3xy^2 + C, f(z) = 2z^2 - iz^3 + iC$; b) En este caso, $u(x, y)$ no es armónica; c) $v(x, y) = ye^x \cos y + xe^x \sin y + C, f(z) = ze^z + iC$; d) $v(x, y) = -e^{2xy} \cos(x^2 - y^2) + C, f(z) = -ie^{ix^2} + iC$.

Sección 3e:

13.- Evalúe las siguientes integrales:

a) $\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - i\right)^2 dt$

b) $\int_0^{\pi/6} e^{i2t} dt$

c) $\int_0^{\infty} e^{-zt} dt$, con $\text{Re } z > 0$.

RESPUESTA. a) $-\frac{1}{2} - i \ln 4$; b) $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}$; c) $\frac{1}{z}$.

14.- Muestre que si m y n son enteros, entonces

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-in\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & \text{cuando } m \neq n \\ 2\pi & \text{cuando } m = n \end{cases}$$

Sección 3f:

Para las funciones f y los contornos C dados, en los siguientes ejercicios use la representación paramétrica de C para evaluar la integral

$$\int_C f(z) dz$$

15.- $f(z) = (z + 2)/z$ y C es

- a) el semicírculo $z = 2e^{i\theta}$, con $0 \leq \theta \leq \pi$;
- b) el semicírculo $z = 2e^{i\theta}$, con $\pi \leq \theta \leq 2\pi$;
- c) el círculo $z = 2e^{i\theta}$, con $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

RESPUESTA. a) $-4 + 2\pi i$; b) $4 + 2\pi i$; c) $4\pi i$.

16.- $f(z) = z - 1$ y C es el contorno que va de $z = 0$ a $z = 2$ formado por

- a) el semicírculo $z = 1 + e^{i\theta}$, con $\pi \leq \theta \leq 2\pi$;
- b) el segmento $0 \leq x \leq 2$ del eje real.

RESPUESTA. a) 0; b) 0.

17.- Evalúe $\int_C (z^2 + 3z) dz$ a lo largo de

- a) el arco $|z| = 2$ que va de $(2,0)$ a $(0,2)$;
- b) la línea recta que va de $(2,0)$ a $(0,2)$;
- c) las líneas rectas que van de $(2,0)$ a $(2,2)$ y luego de $(2,2)$ a $(0,2)$.

RESPUESTA. $-\frac{44}{3} - \frac{8}{3}i$, en todos los casos.

18.- Con la ayuda del resultado obtenido en el ejercicio 14, evalúe la integral

$$\int_C z^m z^{*n} dz$$

donde m y n son enteros y C es el círculo unitario $|z| = 1$, recorrida en sentido contrarreloj.

19.- Sea C el círculo $|z - z_0| = R$ recorrido en sentido contrarreloj. Use la representación paramétrica para C dada por $z = z_0 + Re^{i\theta}$, (con $-\pi \leq \theta \leq \pi$) para derivar las siguientes fórmulas de integración

- a) $\int_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$;
- b) $\int_C (z - z_0)^{n-1} dz = 0$, con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

20.- Encuentre la antiderivada para evaluar cada una de las siguientes integrales, donde la trayectoria es cualquier contorno entre los límites de integración indicados:

- a) $\int_i^{i/2} e^{\pi z} dz$

$$b) \int_0^{\pi+2i} \cos\left(\frac{z}{2}\right) dz$$

$$c) \int_1^3 (z-2)^3 dz.$$

RESPUESTA. a) $\frac{1+i}{\pi}$; b) $e + \frac{1}{e}$; c) 0.

21.- Sea C la frontera orientada positivamente del cuadrado cuyos lados coinciden con las líneas $x = \pm 2$ y $y = \pm 2$. Evalúe cada una de las siguientes integrales:

$$a) \int_C \frac{e^{-z} dz}{z - (\pi i/2)};$$

$$b) \int_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)} dz;$$

$$c) \int_C \frac{z dz}{2z+1};$$

$$d) \int_C \frac{\cosh z}{z^4} dz;$$

$$e) \int_C \frac{\tan(z/2)}{(z-x_0)^2} dz, \text{ con } -2 < x_0 < 2.$$

RESPUESTA. a) 2π ; b) $\frac{\pi i}{4}$; c) $-\frac{\pi i}{2}$; d) 0; e) $i\pi \sec^2\left(\frac{x_0}{2}\right)$.

22.- Sea C el círculo $|z| = 3$, descrito en sentido positivo, Muestre que si

$$g(w) = \int_C \frac{2z^2 - z - 2}{z - w} dz$$

con $|w| \neq 3$, entonces $g(2) = 8\pi i$. ¿Cuál es el valor de $g(w)$ cuando $|w| > 3$?

23.- Sea C un contorno simple cerrado cualquiera, descrito en sentido positivo en el plano z . Considerando que

$$g(w) = \int_C \frac{z^3 + 2z}{(z-w)^3} dz$$

muestre que $g(w) = 6\pi i w$ cuando w está dentro de C y que $g(w) = 0$ cuando w está fuera de C .

24.- Muestre que si f es analítica dentro y sobre un contorno cerrado C , y z_0 no está dentro de C , entonces

$$\int_C \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

25.- Evalúe $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{z^2 dz}{z^2+4}$ donde C es el cuadrado con vértices en ± 2 , $\pm 2 + 4i$ recorrido en dirección contrarreloj.

RESPUESTA. i

4.- Series. Criterios de convergencia. Series de Taylor y Laurent

- a) Introducción. Series de funciones reales.
- b) Convergencia de secuencias y series.
- c) Series de Taylor.
- d) Series de Laurent.
- e) Propiedades adicionales de las series.
 - i. Continuidad de una serie de potencias.
 - ii. Integración y derivación de series de potencias.
 - iii. Multiplicación y división de series de potencias

a).- Introducción. Series de funciones reales.

Las series de potencia son, a menudo, una suma infinita de términos. Un ejemplo de una serie de potencias es

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

De forma más general, se dice que una serie de potencias centrada en a es una serie de potencias en $(x - a)$ de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n = c_0 + c_1 (x - a) + c_2 (x - a)^2 + \dots$$

En estas series de potencias, los coeficientes c_n son constantes que más adelante veremos cómo se determinan.

Un problema importante que puede representar una serie infinita de potencias es que esta puede divergir, esto es, podría resultar infinita conforme se le añaden cada vez más términos; este tipo de series no son funcionales y en lo que sigue, buscaremos que las series que usemos sean convergentes.

Se dice que **una serie converge** para un valor particular de x si su límite es finito, es decir

$$-\infty < \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n < \infty$$

de lo contrario, se dice que la serie no converge.

Se dice que **una serie converge absolutamente** si la sumatoria de los valores absolutos de sus términos converge, es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| < \infty$$

Si una serie converge absolutamente, también converge.

La pregunta ahora es: ¿cómo sabemos si una serie converge o no?

La respuesta es sencilla, podemos usar el “criterio del cociente” (ratio test), pero antes generalicemos y amplíemos las ideas anteriores.

Si ahora consideramos la expresión general para una serie de potencias, a saber

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

entonces, la serie converge si existe el siguiente límite de las sumas parciales:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N c_n (x-a)^n$$

Se llama **intervalo de convergencia** al conjunto de números reales x o intervalo para los que la serie converge.

Se llama **radio de convergencia** al número positivo (o cero) ρ , tal que la serie converge absolutamente si

$$|x-a| < \rho,$$

y diverge si

$$|x-a| > \rho.$$

La región en la que

$$|x-a| < \rho$$

(donde la serie converge) se llama **intervalo de convergencia**. Dentro de su intervalo de convergencia, una serie de potencias converge absolutamente

Si $\rho = 0$ la serie converge solo para $x = a$, si la serie converge para todo x , entonces escribimos $\rho = \infty$.

Prueba de convergencia (criterio del cociente o “ratio test”)

Considerando la serie

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

y suponiendo que $c_n \neq 0$ para todo n , podemos escribir el siguiente cociente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1} (x-a)^{n+1}}{c_n (x-a)^n} \right| = |x-a| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = L$$

Si $L < 1$, la serie converge absolutamente; si $L > 1$, la serie diverge; y si $L = 1$, el criterio no es concluyente.

Un ejemplo sencillo. ¿En qué intervalo, si es que existe, la siguiente serie converge absolutamente?

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-3)^n$$

El primer paso es construir el cociente de los términos $n + 1$ y n , es decir

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n(x-a)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}(x-3)^{n+1}}{(-1)^n(x-3)^n} \right|$$

es decir

$$L = |(-1)(x-3)| = |x-3| < 1$$

Lo cual se cumple si x se ubica en el intervalo $2 < x < 4$, fuera de este intervalo, la serie diverge.

Otro ejemplo. ¿En qué intervalo, si es que existe, la siguiente serie converge absolutamente?

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k!} x^k$$

En este caso, el cociente de los términos $n + 1$ y n es

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{5^{k+1}}{(k+1)!} x^{k+1}}{\frac{5^k}{k!} x^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{5}{k+1} x \right| = 0 < 1$$

Lo cual se cumple para toda x , por lo tanto, la serie converge absolutamente para todos los reales.

Un ejercicio. ¿En qué intervalo, si es que existe, la siguiente serie converge absolutamente?

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x+1)^k}{k^2}$$

Ajustando los índices en una serie.

Una herramienta útil cuando trabajamos con series es el llamado cambio de índices en una serie.

Un ejemplo. Supongamos que se tiene la siguiente serie que inicia en $n = 3$:

$$y = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n^2}$$

Para que inicie en $n = 0$ bastará hacer el siguiente cambio: n se sustituye por $k + 3$

$$y = \sum_{k+3=3}^{\infty} \frac{(2x+1)^{k+3}}{(k+3)^2}$$

y luego se regresa a n :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+1)^{n+3}}{(n+3)^2}$$

Otro ejemplo. Supongamos que se tiene la siguiente serie:

$$y = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{5^k}{k!} x^k$$

Para que inicie en $n = 0$ bastará hacer el siguiente cambio: k se sustituye por $n + 2$

$$y = \sum_{n+2=2}^{\infty} \frac{5^{n+2}}{(n+2)!} x^{n+2}$$

y luego se regresa a k :

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^{k+2}}{(k+2)!} x^{k+2}$$

Derivando series de potencias

Una serie de potencias define una función $y(x)$ dada por

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

cuyo dominio es el intervalo de convergencia de la serie, en el cual es continua, derivable e integrable, lo que permite escribir la primera derivada como

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

la segunda derivada como

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

y así sucesivamente.

Series de Taylor de variable real

Uno puede expresar cualquier función continua $f(x)$ como una serie: *la serie de Taylor*.

Definición. La expansión o desarrollo de Taylor de una función $f(x)$ alrededor del punto x_0 se expresa como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Si una función $f(x)$ posee una expansión en series de Taylor en el punto $x = x_0$ con un radio de convergencia diferente de cero, se dice que es analítica en $x = x_0$.

El caso particular de la Serie de Taylor en el que se toma $x_0 = 0$ recibe el nombre de *Serie (o Expansión) de Maclaurin*.

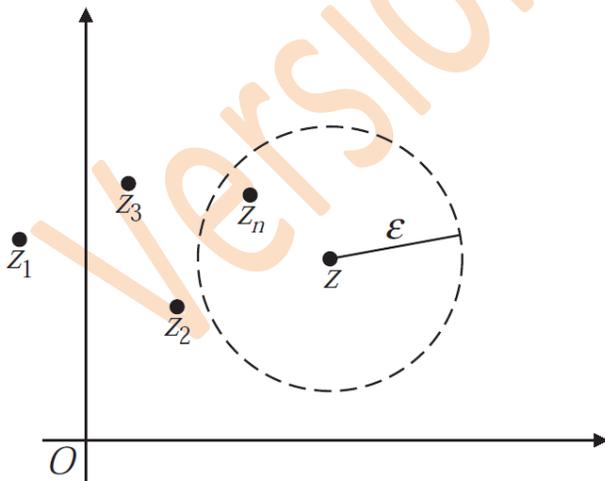
b).- Convergencia de secuencias y series.

A continuación, hagamos una extensión de las ideas anteriores (y algunas nuevas) a funciones de variable compleja, $f(z)$. Para ello veamos algunas definiciones.

Definición. La sucesión infinita de números complejos $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ tiene un límite o converge a un número complejo z , si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número entero positivo N tal que

$$|z_n - z| < \varepsilon$$

siempre que $n > N$.



Geoméricamente, lo anterior significa que, para valores suficientemente grandes de n , los puntos z_n se ubican en una vecindad ε alrededor de z .

Debido a que podemos escoger ε tan pequeño como queramos, se sigue que los puntos z_n se ubican arbitrariamente cercanos a z conforme su subíndice se incrementa; lo que permite escribir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$$

Esto significa que cuando el límite de la sucesión $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ existe y es z , entonces se dice que $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a z . Si la sucesión no tiene límite

entonces se dice que dicha sucesión diverge.

Teorema para la convergencia de una sucesión.

Sean $z_n = x_n + iy_n$ (para $n = 0, 1, 2, \dots$), para x_n y y_n números reales, y $z = x + iy$ para x y y números reales. Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$$

si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$$

Ejemplo. Determine si la sucesión $z_n = \frac{1}{n} + i \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$ converge y halle el límite si es el caso.

Ejercicio. Analice la convergencia de la sucesión

$$z_n = 2 - i \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Si la sucesión es convergente, halle el límite de la sucesión.

Suma de una serie

Definición. Una serie infinita

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z_0 + z_1 + z_2 + z_3 + \dots$$

de números complejos converge a un número complejo S , llamado **suma de la serie**, si la sucesión

$$S_N = \sum_{n=0}^N z_n$$

($N = 0, 1, 2, \dots$) de sumas parciales converge a S ; entonces se escribe

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = S$$

Cuando la serie no converge, decimos que dicha serie diverge.

Teorema para la convergencia de una serie.

Sean $z_n = x_n + iy_n$ (para $n = 0, 1, 2, \dots$), para x_n y y_n números reales, y $S = X + iY$ para X y Y números reales. Entonces,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = S$$

si y sólo si

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = X \quad \vee \quad \sum_{n=0}^{\infty} y_n = Y$$

De hecho, este teorema nos dice que podemos escribir

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + iy_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + i \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

Si una serie de números complejos converge, entonces el n -ésimo término ($z_n = x_n + iy_n$) converge a cero cuando n tiende a infinito, lo que obliga a que las partes real e imaginaria, lo hagan por separado, es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 + i0 = 0$$

De lo anterior se sigue que los términos de una serie convergente están acotados, es decir, cuando la serie converge existe una constante positiva M tal que $|z_n| \leq M$ para cualquier entero positivo n .

Otra propiedad importante de las series de números complejos es la que establece que una serie es **absolutamente convergente** si la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \quad (z_n = x_n + iy_n)$$

de números reales $\sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ converge.

La convergencia absoluta de una serie de números complejos garantiza la convergencia de la serie.

La pregunta ahora es: ¿cómo sabemos si una serie converge absolutamente o no?

La respuesta es sencilla, al igual que para series reales, podemos usar el “criterio del cociente” (ratio test), que en este caso se reescribe de la siguiente forma.

Considerando la serie

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$$

podemos escribir el siguiente límite

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right|$$

Entonces

- Si $\Gamma(z) < 1$, la serie converge absolutamente;
- si $\Gamma(z) > 1$, la serie diverge; y
- si $\Gamma(z) = 1$ o no existe, el criterio del cociente no es concluyente en cuanto a la convergencia absoluta de la serie.

Ejemplos: Use el criterio del cociente para analizar la convergencia absoluta de las siguientes series:

a).-
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(z + \frac{1}{2} \right)^n$$

b).-
$$\sum_{n=0}^{\infty} n! e^{n^2 z}$$

c).-
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2+i)^n}{(z+i)^n (n+i)^2}$$

d).-
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{z} \right)^n$$

Remanente de una serie

Definición. Al establecer que la suma de una serie es un número dado S , a menudo es conveniente definir el remanente ρ_N después de N términos, usando la suma parcial S_N , de tal forma que

$$\rho_N = S - S_N$$

Con esto, vemos que $|S_N - S| = |\rho_N - 0|$, lo que nos permite establecer que una serie converge a un número S si y solo si la secuencia de remanentes ρ_N tiende a cero.

c).- Series de Taylor.

A continuación definimos una serie de potencias como una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots + a_n (z - z_0)^n + \dots$$

donde z_0 y los coeficientes a_n son constantes complejas y z puede ser cualquier punto de una región dada que contiene a z_0 .

En estas series que involucran la variable z , denotaremos las sumas, sumas parciales y remanentes, definidas anteriormente, como $S(z)$, $S_N(z)$ y $\rho_N(z)$, respectivamente.

Teorema de convergencia de una serie de potencias

Sea la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

definimos $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} (|a_n|)^{1/n}$, entonces,

- si $\alpha = \infty$, la serie es convergente en el único punto $z = z_0$;
- si $0 < \alpha < \infty$, la serie es absolutamente convergente en el círculo $|z - z_0| < (1/\alpha)$ y es divergente en el exterior de este círculo; y
- si $\alpha = 0$, la serie es absolutamente convergente en todo el plano complejo.

Lo anterior permite establecer que cuando $0 < \alpha < \infty$ existe un círculo con centro en el punto $z = z_0$, en el interior del cual la serie es absolutamente convergente y en el exterior del cual la serie es divergente.

Este círculo se llama **círculo de convergencia de la serie de potencias** y su radio $R (= 1/\alpha)$ recibe el nombre de radio de convergencia de la misma.

En los casos límites, cuando $\alpha = \infty$ el círculo de convergencia se reduce al punto $z = z_0$, mientras que cuando $\alpha = 0$ el círculo de convergencia se extiende a todo el plano, de modo que puede considerarse que R es igual a ∞ .

El resultado anterior se conoce como **teorema de Cauchy-Hadamard**, y fue publicado por primera vez en 1821 por Augustin Louis Cauchy, pero pasó relativamente desapercibido hasta que Jacques Hadamard lo redescubrió, al publicarlo por primera vez en 1888.

Un resultado muy útil al aplicar el teorema anterior es el siguiente límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}$$

Ejemplo: Halle el círculo y radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$.

Criterio del cociente para la convergencia de una serie de potencias

En muchos casos resulta conveniente determinar el radio de convergencia de una serie de potencias mediante el criterio de cociente, para ello se considera la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

y suponiendo que $a_n \neq 0$ para todo n , podemos escribir el siguiente cociente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} (z - z_0)^{n+1}}{a_n (z - z_0)^n} \right| = |z - z_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

de donde el círculo de convergencia resulta

$$|z - z_0| < R$$

con

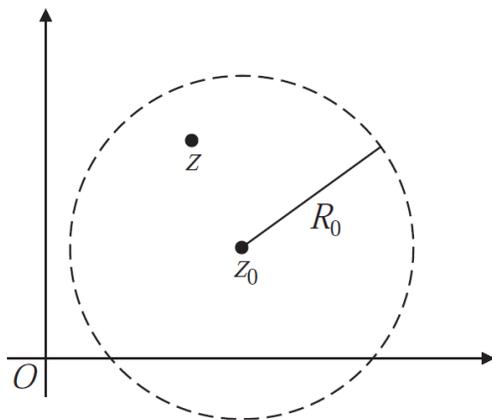
$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}$$

Ejemplo: Usando el criterio del cociente, halle el círculo y el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$.

Dada una función analítica ¿es siempre posible encontrar una serie de potencias cuya suma sea dicha función en algún dominio? Dicho de otro modo ¿es posible representar cualquier función analítica por medio de una serie de potencias? La respuesta es afirmativa, como veremos en el siguiente teorema.

Teorema de Taylor

Sea $f(z)$ una función analítica en todo punto del disco C_0 , con centro en z_0 y radio R_0 . Entonces, en cada punto z del disco C_0 , $f(z)$ se expresa como



$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad (4.1)$$

es decir, la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

converge a $f(z)$ cuando $|z - z_0| < R_0$.

La serie (4.1) se denomina **desarrollo en serie de Taylor**, o simplemente, desarrollo de Taylor de $f(z)$ alrededor del punto z_0 .

Serie de Maclaurin

Si $z_0 = 0$, el desarrollo de Taylor (4.1) adquiere la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

y se denomina **desarrollo de Maclaurin** de $f(z)$.

Ejemplo. Dada la función $f(z) = e^z$, halle

- el desarrollo de Maclaurin de $f(z)$
- el desarrollo de Taylor de $f(z)$ alrededor de $z = -i$.

Ejercicio. Encuentre la serie de Maclaurin para las funciones $f(z)$ dadas:

- $f(z) = \text{sen } z$
- $f(z) = \text{cos } z$

El siguiente teorema nos garantiza que el desarrollo de Taylor alrededor de z_0 de una función $f(z)$, es la única serie de potencias que converge a $f(z)$ en un disco centrado en z_0 .

Teorema de unicidad del desarrollo de Taylor

El desarrollo en serie de Taylor alrededor de z_0 de una función $f(z)$ es la única serie de potencias de $(z - z_0)$ que converge a $f(z)$ en todo punto de un disco centrado en z_0 .

El siguiente teorema nos permite calcular el radio de convergencia del mayor círculo para el cual la serie de Taylor de una función $f(z)$ converge a $f(z)$.

Teorema de convergencia del desarrollo de Taylor para una función con singularidades

Consideremos el desarrollo en serie de Taylor de una función $f(z)$ alrededor de z_0 dado por la expresión (4.1). El mayor círculo dentro del cual esta serie converge a $f(z)$ en cada punto es $|z - z_0| = r$, donde r es la distancia entre z_0 y el punto singular de $f(z)$ más cercano.

Es importante notar que este teorema no afirma que la serie de Taylor no converja fuera del círculo $|z - z_0| = r$, sólo afirma que éste es el mayor círculo de todos los puntos para los cuales la serie converge a $f(z)$.

Ejemplo. Sin determinar el desarrollo de Taylor, calcule el radio del círculo máximo en donde el desarrollo indicado es válido:

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+1)^n$$

d).- Series de Laurent.

Si una función f no es analítica en z_0 , no podemos aplicar el teorema de Taylor en ese punto. No obstante, muchas veces es posible hallar una representación de $f(z)$ en forma de una serie que contiene tanto potencias positivas como potencias negativas de $z - z_0$.

Definición. El desarrollo en serie de Laurent o, simplemente, **desarrollo de Laurent** de una función $f(z)$ alrededor del punto z_0 es de la forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (4.2)$$

donde la serie converge a $f(z)$ en cierto dominio o región.

La pregunta aquí es: ¿Qué clase de funciones pueden representarse por medio de series de Laurent y en qué región del plano complejo será válida dicha representación?

Normalmente los desarrollos de Laurent se obtienen a partir de los desarrollos de Taylor, para lograr lo anterior, es necesario enunciar el teorema de Laurent.

Teorema de Laurent

Sea $f(z)$ una función analítica en el anillo $R_1 < |z - z_0| < R_2$, centrado en z_0 . Sea C cualquier contorno cerrado simple, orientado positivamente, que rodea a z_0 y está contenido por completo en ese dominio anular.

Entonces, en todo punto de ese dominio anular, $f(z)$ admite la representación

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad (4.3)$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.4)$$

y

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{-n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4.5)$$

El desarrollo (4.3) se escribe, con frecuencia, de manera compacta como

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (4.6)$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (4.7)$$

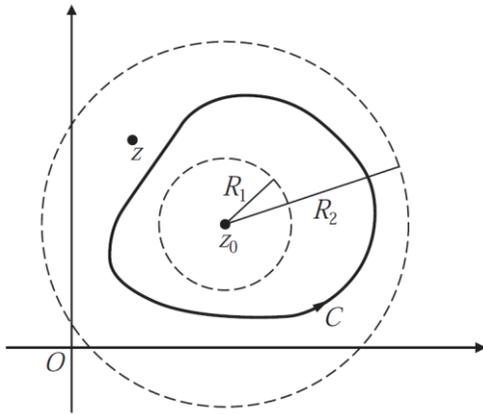
Esta última representación es similar a la dada en (4.2); sin embargo, en cualquiera de las dos formas (4.3) o (4.6), el desarrollo en serie de potencias, así definido, se llama **serie de Laurent**.

Consideraciones acerca del Teorema de Laurent

- Si $f(z)$ es analítica en todos los puntos de la región $|z - z_0| \leq R_2$, entonces el desarrollo de Laurent de $f(z)$ se convierte en el desarrollo de Taylor de $f(z)$ alrededor de z_0 , ya que el integrando de los coeficientes b_n , dados por (4.5), se hace cero; mientras que los coeficientes a_n , dados por (4.4), se reducen a la fórmula integral de Cauchy extendida, a saber

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

- Si $f(z)$ es analítica en la región $|z - z_0| \leq R_2$ excepto en el punto z_0 , entonces el desarrollo de Laurent es válido en toda la región $|z - z_0| \leq R_2$.
- Si $f(z)$ es analítica en todo punto z del plano complejo que no pertenezca a cierto círculo, entonces es posible encontrar un desarrollo de Laurent de $f(z)$ que sea válido en una región anular cuyo radio exterior R_2 es infinito.



Es importante mencionar que, en general, los coeficientes de una serie de Laurent se calculan por métodos más económicos que las propias representaciones integrales, siendo el camino más usado, partir de los desarrollos de Taylor (o de Maclaurin).

Ejemplo. Encuentre la Serie de Laurent para

$$f(z) = e^{1/z}$$

alrededor del origen.

Solución. Para encontrar el desarrollo de Laurent de esta función $f(z)$, alrededor de $z_0 = 0$, vamos a considerar el desarrollo de Maclaurin de e^s , a saber

$$e^s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} s^n$$

después, se hace $s = 1/z$ en la ecuación anterior para obtener

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} \quad z \neq 0$$

que es, efectivamente, el desarrollo de Laurent de $e^{1/z}$ alrededor de $z = 0$ y es válido en todo el plano complejo excepto en $z = 0$.

Hay funciones que por sí mismas ya corresponden a una Serie de Laurent. Por ejemplo, si analizamos la función

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2} \tag{4.8}$$

vemos que ya tiene la forma de una serie de Laurent, con $z_0 = i$.

En efecto, usando la representación (4.6)

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

al comparar con la forma de $f(z)$, vemos que $c_{-2} = 1$ y todos los demás coeficientes c_n son cero.

Si a continuación retomamos la expresión (4.7) para los coeficientes c_n de la serie de Laurent para la función $f(z)$ definida en la ecuación (4.8), podemos escribir

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{(z-i)^{n+3}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

donde C es, por ejemplo, cualquier circunferencia $|z - i| = R$ orientada positivamente en torno al punto $z_0 = i$. Con lo anterior, podemos escribir

$$\int_c \frac{dz}{(z-i)^{n+3}} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -2 \\ 2\pi i & \text{si } n = -2 \end{cases}$$

Ejercicios.

1. Encuentre la serie de Laurent alrededor de la singularidad indicada para cada una de las siguientes funciones:

a) $f(z) = \frac{1}{z-1}$; $z=0$

b) $f(z) = \left(z + \frac{1}{z}\right)^7$; $z=0$

c) $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-2)^3}$; $z=2$

d) $f(z) = \frac{\cos \frac{1}{z}}{z^3}$; $z=0$

e) $f(z) = \frac{z - \sin z}{z^3}$; $z=0$

f) $f(z) = (z-3) \sin \frac{1}{z+4}$; $z=-4$

g) $f(z) = \frac{1}{z^2(z-2)^3}$; $z=2$

h) $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$; $z=-2$

2. Expanda las siguientes funciones en una serie de Laurent para las potencias indicadas y encuentre el dominio de validez.

a) $f(z) = \frac{1}{(z-1)}$; $(z+3)$

b) $f(z) = \frac{1}{(z+2)}$; $(z-i)$

c) $f(z) = \frac{z}{(z-i)}$; $(z-1)$

Para resolver estos problemas pueden resultar útiles las siguientes series de Maclaurin:

$$\frac{1}{1 \pm w} = 1 \mp w + w^2 \mp w^3 + w^4 \mp w^5 + \dots$$

(Válidas para $|w| < 1$)

$$\frac{1}{(1 \pm w)^2} = 1 \mp 2w + 3w^2 \mp 4w^3 + 5w^4 \mp 6w^5 + \dots$$

e).- Propiedades adicionales de las series.

Para terminar nuestro estudio de las series de potencias para funciones complejas, vamos a revisar algunos teoremas y resultados que nos pueden ser útiles al trabajar con series de potencias, ya sean desarrollos de Taylor o de Laurent para una función $f(z)$.

i. Continuidad de una serie de potencias.

El siguiente teorema es una consecuencia importante de la convergencia uniforme de una serie de potencias.

Una serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

representa una **función continua** $S(z)$ en el interior de su disco de convergencia, es decir, en todo z tal que $|z - z_0| < R$, donde R es el radio de convergencia.

Este teorema está en línea con el teorema (demostrado anteriormente) que establece que una función polinomial de z es analítica y continua en su dominio de definición.

ii. Integración y derivación de series de potencias.

Como se estableció en el teorema anterior, una serie de potencias de la forma

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (4.9)$$

representa (es decir, tiene como suma) una función continua en el interior de su disco de convergencia, incluso se puede demostrar que la suma $S(z)$ es analítica en dicho disco.

Lo anterior permite enunciar los siguientes dos teoremas.

Teorema de integración. Sean C un camino interior al disco de convergencia de la serie de potencias (4.9) y $g(z)$ una función continua en C . Entonces, la serie formada multiplicando cada término de la serie de potencias por $g(z)$ se puede integrar término a término sobre C , esto es,

$$\int_C g(z)S(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_C g(z)(z - z_0)^n dz \quad (4.10)$$

Teorema de diferenciación. La serie de potencias (4.9) se puede derivar término a término. En otras palabras, en todo punto z interior al disco de convergencia de la serie se tiene que la derivada $S'(z)$ está dada por

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1} \quad (4.11)$$

Los dos teoremas anteriores nos permiten afirmar que si una función $f(z)$ está representada con una serie de potencias en una región R , la serie que se obtiene por diferenciación término a término converge a $f'(z)$ dentro de R .

Este procedimiento puede repetirse un número indefinido de veces.

También es cierto que si se integra término a término la representación en serie de $f(z)$ a lo largo de una trayectoria contenida en R , la serie que resulta de esta operación converge a la integral de $f(z)$ efectuada a lo largo de la misma trayectoria.

iii. Multiplicación y división de series de potencias

Para revisar la multiplicación y división de series de potencias podemos, sin pérdida de generalidad, suponer que cada una de las series de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{y} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

converge dentro de cierta circunferencia $|z| = r_0$.

Las sumas $f(z)$ y $g(z)$ son entonces funciones analíticas en el disco $|z| < r_0$, y el producto de esas sumas tiene un desarrollo en serie de Maclaurin, que es válido en ese disco, dado por

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{4.12}$$

donde

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \tag{4.13}$$

La serie (4.12) es igual a la serie que se obtiene al multiplicar las dos series de $f(z)$ y $g(z)$ entre sí término a término y agrupando los términos que resulten con potencias iguales de z ; a dicha serie se le llama **producto de Cauchy** de las dos series dadas.

Por otra parte, para analizar el cociente de dos series de potencias, supongamos que la serie $g(z) \neq 0$ en cierta vecindad del origen.

El cociente $h(z) = f(z)/g(z)$ es analítico en esa vecindad y por eso admite un desarrollo de Maclaurin dado por

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \tag{4.14}$$

donde $d_0 = h(0)$, $d_1 = h'(0)$, $d_2 = h''(0)/2!$, etc.

Algunos de estos primeros coeficientes se pueden encontrar en términos de los coeficientes a_n y b_n de las series de $f(z)$ y $g(z)$, al diferenciar sucesivamente el cociente $f(z)/g(z)$. Los resultados son los mismos que los que se encuentran al efectuar la división de la serie de $f(z)$ entre la serie de $g(z)$.

También podemos encontrar estos primeros términos mediante el siguiente procedimiento.

Se tiene que

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$$

de donde

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

de esta forma,

$$\begin{aligned} d_0 b_0 &= a_0 \\ d_0 b_1 + d_1 b_0 &= a_1 \\ d_0 b_2 + d_1 b_1 + d_2 b_0 &= a_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

De la primera ecuación de este sistema de ecuaciones, tenemos

$$d_0 = \frac{a_0}{b_0},$$

e introduciendo este resultado en la segunda ecuación obtenemos

$$d_1 = \frac{a_1}{b_0} - \frac{a_0 b_1}{b_0^2}.$$

Estos resultados nos permiten despejar d_2 de la tercera ecuación:

$$d_2 = \frac{a_2}{b_0} - \frac{a_1 b_1 + a_0 b_2}{b_0^2} + \frac{a_0 b_1^2}{b_0^3}.$$

El procedimiento anterior puede repetirse para obtener cualquiera de los coeficientes d_n , donde n es tan grande como deseemos.

Este es un ejemplo de procedimiento recurrente o iterativo, en el que se usan los valores de d_1, d_2, \dots, d_{n-1} ya calculados, para encontrar la siguiente incógnita d_n .

Ejercicios sugeridos.

Sección 4a:

1.- Determine, en caso de existir, el intervalo de convergencia para las siguientes series, determinando el valor central (a) y el radio de convergencia (ρ):

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{10^n} (x-4)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n6^n} (2x-1)^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^{2n-1}} (x-1)^{2n}$

2.- Encuentre la Serie de Maclaurin para las siguientes funciones reales $f(x)$:

a) $f(x) = x^2 e^x$

b) $f(x) = x e^{-2x}$

c) $f(x) = x \sin 3x$

3.- Encuentre la Serie de Taylor, centrada en el valor a dado, para las siguientes funciones reales $f(x)$:

a) $f(x) = \sin x$; con $a = \pi/4$.

b) $f(x) = \cos x$; con $a = \pi/3$.

c) $f(x) = 1/x$; con $a = 2$.

4.- Considerando los ejercicios 2 y 3 anteriores.

a) Escriba los primeros 4 términos de las series encontradas y llámele $f_{aprox}(x)$, en cada caso;

b) Evalúe $f_{aprox}(x)$ en $x = c$ para tener $f_{aprox}(c)$. Considere $c = 0.1$ para los ejercicios 2, y $c = 1.1a$ para los ejercicios 3.

c) Encuentre el error relativo que se tiene al considerar la serie parcial $f_{aprox}(x)$ al evaluarla cerca del valor central, para ello calcule el cociente $f_{aprox}(c)/f(c)$.

El error relativo nos da una idea de qué tan buena es una aproximación o, en el caso del trabajo en un laboratorio, de la calidad de una medición.

Sección 4b:

5.- Muestre que si

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}_n = \bar{S}$$

6.- Encuentre la región de convergencia de

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \cdot 3^n} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^n$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!}$$

SOLUCIÓN. (a) $|z+i| \leq 1$, (b) $\left| \frac{z+1}{z-1} \right| \leq 3$, (c) $|z| < \infty$.

Sección 4c:

7.- Usando la primera expresión dada en el problema 18, encuentre la expansión en Serie de Maclaurin para la función

$$f(z) = \frac{z}{z^4 + 9} = \frac{z}{9} \cdot \frac{1}{1 + (z^4/9)}.$$

SOLUCIÓN. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+2}} z^{4n+1} \quad (|z| < \sqrt{3})$

8.- Derive la serie de Maclaurin para la función $f(z) = \cos z$, dada por

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (|z| < \infty)$$

a) Usando la definición

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

y la serie de Maclaurin para e^z , dada por $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (|z| < \infty)$.

b) Mostrando que $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$ y $f^{(2n+1)}(0) = 0 \quad (n=0,1,2,\dots)$.

9.- Muestre que cuando $z \neq 0$,

$$a) \frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \dots;$$

$$b) \frac{\sin(z^2)}{z^4} = \frac{1}{z^2} - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^6}{5!} - \frac{z^{10}}{7!} + \dots.$$

10.- Suponga que cada una de las siguientes funciones se expande en una Serie de Taylor alrededor del punto indicado. ¿Cuál sería la región de convergencia de las series obtenidas? No realice la expansión.

a) $\frac{\sin z}{z^2+4}; z_0 = 0$

b) $\frac{z}{e^z+1}; z_0 = 0$

c) $\frac{z+3}{(z-1)(z-4)}; z_0 = 2$

d) $e^{-z^2} \sinh(z+2); z_0 = 0$

e) $\frac{e^z}{z(z-1)}; z_0 = 4i$

f) $z \coth 2z; z_0 = 0$

g) $\sec \pi z; z = 1$

SOLUCIÓN. (a) $|z| < 2$, (b) $|z| < \pi$, (c) $|z-2| < 1$, (d) $|z| < \infty$, (e) $|z-4i| < 4$, (f) $|z| < \pi/2$, (g) $|z-1| < 1/2$

Sección 4d:

11.- Encuentre la serie de Laurent que represente a la función $f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right)$ en el dominio $0 < |z| < \infty$.

SOLUCIÓN. $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{z^{4n}}$.

12.- Derive la representación en Serie de Laurent

$$\frac{e^z}{(z+1)^2} = \frac{1}{e} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{(n+2)!} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2} \right] \quad (0 < |z+1| < \infty)$$

13.- Encuentre una representación en potencias negativas de z , que sea válida cuando $1 < |z| < \infty$, para la función $f(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+(1/z)}$.

SOLUCIÓN. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{z^n}$

14.- Dé dos expansiones en serie de Laurent para la función $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$ y especifique la región de validez de cada una de ellas.

SOLUCIÓN. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \quad (0 < |z| < 1); \quad -\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{z^n} \quad (1 < |z| < \infty)$.

15.- Represente la función $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$

- a) mediante su Serie de Maclaurin, y establezca dónde es válida esta representación;
- b) mediante su Serie de Laurent en el dominio $1 < |z| < \infty$.

SOLUCIÓN. (a) $-1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1);$ (b) $1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \quad (1 < |z| < \infty)$

16.- Escriba dos Series de Laurent en potencias de z que representen a la función $f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)}$ y especifique en qué dominio son válidas.

SOLUCIÓN. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} z^{2n+1} + \frac{1}{z}$ ($0 < |z| < 1$); (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{z^{2n+1}}$ ($1 < |z| < \infty$)

17.- (a) Considerando que a denota a un número real, donde $-1 < a < 1$, derive la representación en Serie de Laurent $\frac{a}{z-a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{z^n}$ ($|a| < |z| < \infty$).

(b) Después de escribir $z = e^{i\theta}$ en la ecuación obtenida en el inciso anterior, iguale las partes real e imaginaria a ambos lados de la ecuación para derivar las siguientes fórmulas de sumas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos n\theta = \frac{a \cos \theta - a^2}{1 - 2a \cos \theta + a^2} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin n\theta = \frac{a \sin \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2}.$$

Sección 4e:

18.- Mediante la derivación de la representación en Serie de Maclaurin

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1)$$

obtenga las expansiones

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n \quad (|z| < 1)$$

y

$$\frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)z^n \quad (|z| < 1)$$

19.- Mediante la sustitución de $1/(1-z)$ por z en la expansión

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n \quad (|z| < 1)$$

derive la representación en Serie de Laurent

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)}{(z-1)^n} \quad (1 < |z-1| < \infty)$$

20.- Encuentre la Serie de Taylor para la función

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2+(z-2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+(z-2)/2}$$

alrededor del punto $z_0 = 2$. Luego, mediante derivación de la serie término a término, muestre que

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left(\frac{z-2}{2} \right)^n \quad (|z-2| < 2).$$

Versión preliminar

5.- Teoremas de Cauchy y del Residuo

- a) Introducción.
- b) Puntos singulares aislados.
- c) Residuo.
- d) Teorema de Cauchy.
- e) Residuos y polos.
- f) Ceros de funciones analíticas.
- g) Aplicación de los residuos.

a).- Introducción.

El teorema de Cauchy-Goursat, visto anteriormente, establece que si una función f es analítica en todos los puntos interiores a un contorno cerrado simple C y sobre él, entonces el valor de la integral de dicha función f es cero alrededor de dicho contorno C , a saber

$$\int_C f(z) dz = 0$$

Sin embargo, si la función falla en ser analítica para un número finito de puntos interiores a C veremos a continuación que existe un número específico llamado **residuo**, para cada uno de los puntos donde f no es analítica, que contribuye al valor de la integral.

Así que en lo que sigue desarrollaremos la llamada *teoría de los residuos*, mediante el enunciado de algunos teoremas que nos serán de vital importancia, entre ellos, el teorema de Cauchy para el residuo.

Finalmente, veremos algunas aplicaciones de esta teoría en algunos problemas donde se requieran calcular integrales, tanto para funciones complejas como para funciones reales.

b).- Puntos singulares aislados.

Para definir qué es un punto singular aislado debemos recordar que un punto z_0 se llama **punto singular de una función f** si la función f es no analítica en z_0 pero sí lo es en la vecindad de z_0 .

Punto Singular Aislado

Un punto z_0 se dice que es un *punto singular aislado* de una función $f(z)$, si este es singular y, además, existe una vecindad de z_0 en todo punto de la cual $f(z)$ es analítica excepto en ese punto.

Es decir, z_0 es un punto singular aislado si $f(z)$ es analítica en una vecindad $0 < |z - z_0| < \varepsilon$.

Ejemplos.

- i. Encontrar los puntos singulares aislados de la función $f(z)$ definida por

$$f(z) = \frac{\sin z}{z - 4i}.$$

Solución. Se tiene que $z = 4i$ es el único punto singular de la función $f(z)$, dado que $f(z)$ es el cociente de las funciones enteras $f_1(z) = \sin z$ y $f_2(z) = z - 4i$, siendo $4i$ el único cero de $f_2(z)$. Así que $z = 4i$ es un punto singular aislado.

- ii. Encontrar los puntos singulares aislados de la función $f(z)$ dada por

$$f(z) = \frac{z+1}{z(z^2+1)}.$$

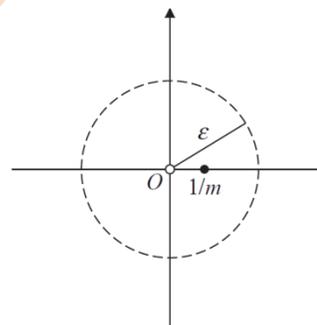
Solución. En este caso tenemos tres puntos singulares aislados, a saber, $z_1 = 0$, $z_2 = i$ y $z_3 = -i$. Dado que $f(z)$ es el cociente de las funciones enteras $f_1(z) = z + 1$ y $f_2(z) = z(z^2 + 1)$, siendo 0 y $\pm i$ los únicos ceros de $f_2(z)$. Así que estos tres puntos son singulares aislados.

- iii. Encontrar los puntos singulares aislados de la función $f(z)$ definida por

$$f(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}.$$

Solución. En este caso, la función $f(z)$ tiene los puntos singulares $z = 0$ y $z = 1/n$ (con $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$), todos ubicados sobre el eje real entre $z = -1$ y $z = 1$. Todos los puntos son singulares aislados excepto $z = 0$. El punto singular $z = 0$ no es aislado porque cualquier vecindad alrededor de $z = 0$ contiene otro punto singular de la función.

Más precisamente, cuando especificamos un radio ε para la vecindad, tal como se muestra en la figura, habrá un entero positivo m tal que $m > 1/\varepsilon$. Esto lleva a que $0 < 1/m < \varepsilon$, lo que implicará que el punto $z = 1/m$ siempre queda dentro de la vecindad $|z| < \varepsilon$.



Tipos de singularidades aisladas

Antes de revisar los diferentes tipos de singularidades aisladas, vamos a definir la *parte principal* de un desarrollo de Laurent.

Definición. Sea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad (5.1)$$

el desarrollo de Laurent para la función $f(z)$ alrededor del punto singular aislado z_0 . La parte del desarrollo de Laurent de $f(z)$ que tiene potencias negativas de $(z - z_0)$ se denomina **parte principal** de f en z_0 .

En otras palabras, el término

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

es la parte principal de f en z_0 .

Un ejemplo.

Determine la parte principal de $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ en cada uno de sus puntos singulares.

Solución. En este caso, los puntos singulares aislados son $z_1 = 0$ y $z_2 = 1$.

i. El desarrollo de Laurent para $f(z)$ alrededor de z_1 es

$$f(z) = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{z}\right)$$

de donde se deduce que la parte principal de $f(z)$ en $z_1 = 0$ es $\left(-\frac{1}{z}\right)$.

ii. Por otra parte, el desarrollo de Laurent para $f(z)$ alrededor de z_2 es

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^n + \frac{1}{z-1}$$

de donde se deduce que la parte principal de $f(z)$ en $z_2 = 1$ es $\left(\frac{1}{z-1}\right)$.

En ambos casos se ha utilizado el desarrollo de Maclaurin

$$\frac{1}{1 \pm w} = 1 \mp w + w^2 \mp w^3 + w^4 \mp w^5 + \dots$$

el cual es válido para $|w| < 1$.

Polo de orden m

Definición. Sea z_0 un punto singular aislado de una función $f(z)$. Se dice que z_0 es un polo de orden m de f si el desarrollo de Laurent para $f(z)$ (ecuación 5.1) toma la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m} \quad (5.2)$$

donde $b_m \neq 0$ y $b_{m+1} = b_{m+2} = \dots = 0$.

En otras palabras, la parte principal de f en z_0 posee el coeficiente $b_m \neq 0$ y los siguientes coeficientes son cero. Los coeficientes anteriores a b_m no necesariamente son nulos, pero pueden serlo. En el caso en que $m = 1$, z_0 se denomina **polo simple**.

La definición anterior nos indica que para determinar si z_0 es un polo de $f(z)$, previamente se debe tener el desarrollo de Laurent de $f(z)$ alrededor de z_0 ; lo anterior no es práctico, pero siempre es válido.

Existen otros procedimientos más adecuados para verificar si un punto es o no un polo. El siguiente teorema nos muestra un procedimiento para verificar si un punto es un polo sin necesidad de construir su serie de Laurent.

Teorema. Si $f(z)$ tiene un polo en z_0 , entonces $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$.

Demostración. Sea $f(z)$ una función con un polo de orden m en z_0 , por lo que el desarrollo de Laurent para $f(z)$ toma la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m}$$

donde $b_m \neq 0$. Multiplicando ambos lados por $(z - z_0)^m$ tenemos

$$(z - z_0)^m f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+m} + b_1 (z - z_0)^{m-1} + b_2 (z - z_0)^{m-2} + \dots + b_m$$

Del resultado anterior tenemos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^m f(z)] = b_m$$

como

$$|(z - z_0)^m| \rightarrow 0, \text{ cuando } z \rightarrow z_0,$$

la ecuación anterior indica que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty,$$

con lo que se demuestra el enunciado del teorema.

El teorema anterior no sólo nos permite identificar si un punto es un polo, sino también el orden del mismo. Basándose en este teorema, las siguientes reglas nos permiten identificar el orden del polo.

- **Regla I.** Sea z_0 un punto singular aislado de $f(z)$. Si existe el

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^m f(z)]$$

y si dicho límite no es cero ni infinito, entonces $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0 .

- **Regla II.** Si el polo de $f(z)$ en z_0 es de orden m , entonces

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^n f(z)] = \begin{cases} 0 & n > m \\ \infty & n < m \end{cases}$$

Un ejemplo.

Establezca el orden de los polos que presenta la función

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z - 3i)}$$

Solución. En este caso vemos que $f(z)$ presenta polos en $z = 0$ y $z = 3i$. Así que analicemos estos polos por separado.

i. Para $z = 0$ se tiene que

$$\lim_{z \rightarrow 0} |f(z)| = \lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{1}{z^3 - 3iz^2} \right| = \frac{1}{0} = \infty,$$

por lo que efectivamente $z = 0$ corresponde a un polo de $f(z)$. Veamos ahora de qué orden es este polo.

Sea m un entero positivo, así que

$$\lim_{z \rightarrow 0} [z^m f(z)] = \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{z^{m-2}}{z-3i} \right] = \begin{cases} 0 & m > 2 \\ i & m = 2 \\ \infty & m < 2 \end{cases}$$

Lo anterior significa que $z = 0$ es un polo de orden 2.

ii. Para $z = 3i$ se tiene que

$$\lim_{z \rightarrow 3i} |f(z)| = \lim_{z \rightarrow 3i} \left| \frac{1}{z^3 - 3iz^2} \right| = \frac{1}{0} = \infty,$$

por lo que efectivamente $z = 3i$ corresponde a un polo de $f(z)$. Veamos ahora de qué orden es este polo.

Sea m un entero positivo, así que

$$\lim_{z \rightarrow 3i} [(z-3i)^m f(z)] = \lim_{z \rightarrow 3i} \left[\frac{(z-3i)^{m-1}}{z^2} \right] = \begin{cases} 0 & m > 1 \\ -\frac{1}{9} & m = 1 \\ \infty & m < 1 \end{cases}$$

Lo anterior significa que $z = 3i$ es un polo de orden 1.

En problemas relevantes de la Física es común encontrarse con situaciones en las que se requiere determinar el orden de los polos de una función de la forma

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Por lo que a continuación estableceremos un teorema que nos permite identificar si un punto es un polo, así como el orden de este, para una función racional $f(z)$.

Teorema. Sea z_0 un punto del plano complejo. Sea $f(z)$ una función tal que

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

donde $p(z)$ y $q(z)$ son analíticas en z_0 y $p(z_0) \neq 0$. Entonces, z_0 es un polo de orden m de f , si y sólo si,

$$q(z_0) = q'(z_0) = \dots = q^{(m-1)}(z_0) = 0$$

y

$$q^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Demostración. Supongamos que $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = q'(z_0) = \dots = q^{(m-1)}(z_0) = 0$ y $q^{(m)}(z_0) \neq 0$.

Si $p(z)$ y $q(z)$ son analíticas en z_0 con $p(z_0) \neq 0$ y $q(z_0) = 0$, entonces z_0 es un punto singular aislado de $f(z)$. Por otra parte, como $q(z)$ es analítica en z_0 y $q(z_0) = q'(z_0) = \dots = q^{(m-1)}(z_0) = 0$ y $q^{(m)}(z_0) \neq 0$, entonces el desarrollo de Taylor de $q(z)$ alrededor de z_0 es

$$q(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

luego

$$\frac{q(z)}{(z - z_0)^m} = a_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-m}$$

por tanto,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{q(z)}{(z - z_0)^m} = a_m \neq 0$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z - z_0)^m f(z) \right] &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z - z_0)^m \frac{p(z)}{q(z)} \right] \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z - z_0)^m f(z) \right] &= \left(\lim_{z \rightarrow z_0} p(z) \right) \left(\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)^m}{q(z)} \right) \\ &= p(z_0) \left(\frac{1}{a_m} \right) \neq 0, \infty. \end{aligned}$$

Lo cual indica que z_0 es un polo de orden m de $f(z)$.

Un ejemplo.

Establecer los puntos singulares aislados de la función $f(z) = \frac{e^z}{\sin z}$, así como el orden de estos.

Solución. En este caso se tiene que

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

con $p(z) = e^z$ y $q(z) = \sin z$; en ambos casos, advertimos que se trata de funciones analíticas.

Analizando los ceros de $q(z)$ encontramos que los puntos singulares aislados de $f(z)$ son

$$z_n = n\pi, \text{ con } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

De esta forma, $p(z_n) \neq 0$, $q(z_n) = 0$ y $q'(z_n) \neq 0$, para todo n . Por tanto, z_n es un polo simple de $f(z)$ para todo n .

Un ejercicio.

Realice el mismo análisis para la función $f(z) = \frac{1}{z^2(z-3i)}$ (revisada anteriormente) y corrobore sus resultados previos.

Punto Singular Esencial

Definición. Sea z_0 un punto singular aislado de una función $f(z)$. Se dice que z_0 es un **punto singular esencial**, si la parte principal de f en z_0 tiene un número infinito de términos diferentes de cero.

De la definición de punto singular esencial, se deduce que z_0 es un punto singular esencial de $f(z)$, si y sólo si,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$

no existe (ni finito ni infinito).

De esta forma, para determinar si un punto singular aislado z_0 es o no un punto singular esencial de $f(z)$, no es necesario construir el desarrollo de Laurent de $f(z)$ alrededor de z_0 .

Un ejemplo.

Demostrar que $z_0 = 0$ es un punto singular esencial de $f(z) = e^{1/z}$.

Solución. De acuerdo al teorema anterior debemos verificar que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} e^{1/z}$$

no existe.

Para ello, podemos ver que si nos acercamos al origen por la recta $y = 0$, $x > 0$, vemos que la función $f(z)$ crece sin límite cuando $x \rightarrow 0$; mientras que si nos acercamos al origen por la recta $y = 0$, $x < 0$, vemos que la función $f(z)$ tiende a cero cuando $x \rightarrow 0$.

Con lo anterior, podemos concluir que se satisface el teorema ya que el límite no existe, por lo que podemos afirmar que $z_0 = 0$ es un punto singular esencial de $f(z) = e^{1/z}$.

Por otro lado, si nos decidimos por utilizar la definición de punto singular esencial, es necesario recordar que el desarrollo de Laurent de $e^{1/z}$ alrededor de $z_0 = 0$ está dado por

$$e^{1/z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$$

para todo z tal que $|z| > 0$.

Observamos que la parte principal posee infinitos coeficientes distintos de cero, por lo tanto, $z_0 = 0$ es un punto singular esencial de la función $f(z) = e^{1/z}$.

Punto Singular Removible

Definición. Sea z_0 un punto singular aislado de una función $f(z)$. Se dice que z_0 es un **punto singular removible**, si todos los coeficientes de la parte principal de f en z_0 son cero.

Si z_0 es un punto singular removible de $f(z)$, el desarrollo de Laurent (5.1) toma la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

de donde se deduce que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0.$$

Por lo tanto, para determinar si un punto singular aislado z_0 es un punto singular removible de $f(z)$, basta con verificar que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$

existe y es finito.

Un ejemplo.

Verificar que $z_0 = 0$ es un punto singular removible de $f(z) = \frac{\sin z}{z}$.

Solución. Para verificar lo solicitado bastará mostrar que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\sin z}{z}$$

existe; así que aplicando la regla de L'Hopital se tiene que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\cos z}{1} = 1$$

por lo tanto, al existir el límite, se demuestra que $z_0 = 0$ es un punto singular removible de la función $f(z) = \frac{\sin z}{z}$.

c).- Residuo.

Definición. Sea $f(z)$ una función analítica sobre un contorno cerrado simple C y en todo punto interior a C , salvo en z_0 . El residuo de $f(z)$ en z_0 , que se denota por $\text{Res}[f(z)]_{z=z_0}$, está definido por

$$\text{Res}[f(z)]_{z=z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$$

Cuando z_0 es un punto singular aislado de una función f , hay un número positivo R_2 tal que f es analítica en todos los puntos z para los cuales $0 < |z - z_0| < R_2$.

Consecuentemente, la función $f(z)$ tiene una representación en serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

donde los coeficientes a_n y b_n tienen cierta representación integral vista anteriormente.

En particular, los coeficientes de la parte principal (b_n) están dados por

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{-n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

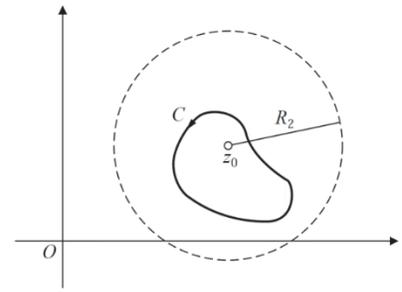
donde C es cualquier contorno simple cerrado orientado positivamente alrededor de z_0 que queda dentro del disco perforado $0 < |z - z_0| < R_2$, tal como se muestra en la figura.

Cuando $n = 1$, la expresión para b_n anterior se reescribe como

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$$

de donde

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i b_1$$



Si se compara esta última expresión con la definición de residuo uno encuentra que el número complejo b_1 , que corresponde al coeficiente de $1/(z - z_0)$ en el desarrollo de Laurent para $f(z)$, es precisamente el residuo de f en el punto singular aislado z_0 , por lo que podemos escribir

$$\text{Res}[f(z)]_{z=z_0} = b_1$$

Con todo lo anterior, podemos concluir que el residuo de la función $f(z)$ en el punto singular aislado z_0 es igual al coeficiente de $(z - z_0)^{-1}$ en la serie de Laurent que representa a $f(z)$ en una región anular dada por $0 < |z - z_0| < R_2$, para cierto número real $R_2 > 0$.

Si usamos la definición de residuo, y este último resultado, encontramos una expresión muy útil para calcular ciertas integrales alrededor de contornos cerrados simples, a saber

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \text{Res}[f(z)]_{z=z_0}$$

siempre y cuando estemos en condiciones de poder evaluar $\text{Res}[f(z)]_{z=z_0}$.

Un ejemplo.

Calcule la integral

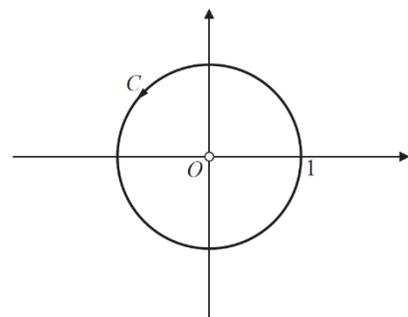
$$\int_C e^{1/z} dz$$

donde C es el círculo unitario centrado en el origen, tal como se muestra en la figura anexa.

Solución. Como el integrando $e^{1/z}$ es analítico en todo el plano complejo excepto en el origen, entonces tiene una representación en series de Laurent la cual es válida para todo z tal que $0 < |z| < \infty$; por lo que, acorde con lo visto anteriormente, el valor de la integral es $2\pi i$ veces el valor del residuo de $f(z)$ en el punto $z = 0$.

Por lo que haremos uso del desarrollo de Laurent para la función $f(z) = e^{1/z}$ alrededor del punto $z = 0$, encontrado previamente, y que está dado por

$$e^{1/z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$$



De este resultado, vemos que el residuo de $f(z)$ en el punto $z = 0$ es

$$\text{Res}[f(z)]_{z=z_0} = \text{Res}\left[e^{1/z}\right]_{z=0} = 1$$

por lo que

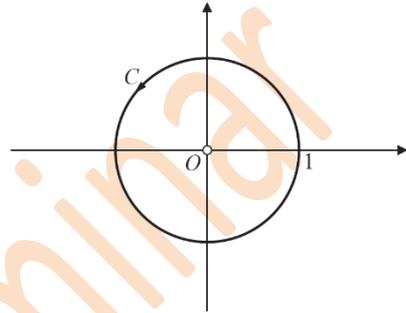
$$\int_C e^{1/z} dz = 2\pi i$$

Otro ejemplo.

Considere la integral

$$\int_C z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$$

donde C es el círculo unitario orientado positivamente centrado en el origen, a saber, $|z| = 1$.



Solución. Para determinar el residuo, retomamos la representación en series de Maclaurin para $\sin z$, a saber

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \quad (\text{Válida para } |z| < \infty)$$

y la usamos para escribir

$$z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) = z - \frac{1}{3!} \frac{1}{z} + \frac{1}{5!} \frac{1}{z^3} - \frac{1}{7!} \frac{1}{z^5} + \dots \quad (\text{Válida para } 0 < |z| < \infty)$$

Como podemos ver, el coeficiente de z^{-1} , y que corresponde al residuo del desarrollo, es $-\frac{1}{3!}$ por lo que

$$\int_C z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i \left(-\frac{1}{3!}\right) = -i \frac{\pi}{3}$$

Un ejemplo adicional.

Muestre que

$$\int_C e^{1/z^2} dz = 0$$

Solución. Considerando que la serie de Laurent para el integrando está dada por

$$e^{1/z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! z^{2n}}$$

Vemos que el coeficiente de z^{-1} es cero, ya que en la serie $n = 1$ corresponde a z^{-2} , con lo que se demuestra lo pedido.

Ejercicios.

Use las ideas anteriores para evaluar la integral de cada una de las siguientes funciones alrededor del contorno C dado por la circunferencia $\left|z - \frac{3}{2}\right| = 2$ orientada positivamente:

a) $f(z) = \frac{z^5}{1-z^3}$

b) $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$

c) $f(z) = \frac{1}{z}$

Soluciones: (a) $-2\pi i/3$; (b) 0 ; (c) $2\pi i$.

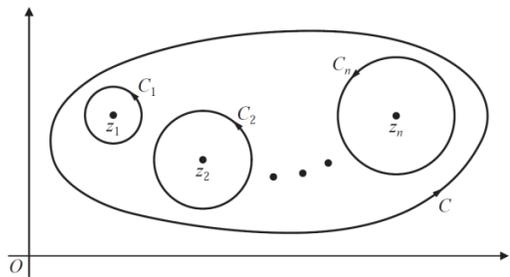
d).- Teorema de Cauchy.

Si una función f es analítica en la región interior a un contorno simple cerrado C , excepto en un número finito de puntos, estos puntos singulares son aislados, tal como lo vimos anteriormente. El siguiente teorema hace uso de este resultado y se conoce como *Teorema de los residuos de Cauchy*.

Teorema. Sea C un contorno cerrado simple orientado positivamente. Si una función f es analítica dentro y sobre C , excepto en un número finito N de puntos singulares z_k ($k = 1, 2, \dots, N$) interiores a C , entonces

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}[f(z)]_{z=z_k}$$

Demostración. Para probar este teorema consideremos circunferencias orientadas positivamente C_k , lo suficientemente pequeñas para que no tengan puntos en común, centradas en las singularidades z_k e interiores al contorno C , tal como se muestra en la figura.



Las circunferencias C_k , junto con el contorno C , forman el contorno de una región cerrada en la que f es analítica y cuyo interior es un dominio múltiplemente conexo. Así que, una vez aisladas las singularidades, podemos aplicar el Teorema de Cauchy-Goursat el cual establece que “si una función f es analítica en todos los puntos interiores a un contorno, entonces el valor de la integral de dicha función f es cero alrededor de dicho contorno”, en este caso podemos escribir

$$\int_C f(z) dz - \sum_{k=1}^N \int_{C_k} f(z) dz = 0$$

que se reduce a la expresión del teorema, ya que

$$\int_{C_k} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}[f(z)]_{z=z_k}$$

con lo que queda demostrado el teorema de los residuos de Cauchy.

Un ejemplo.

Calcular la integral

$$\int_C \frac{z-2}{z(z-1)} dz$$

donde C es la circunferencia $|z| = 3$ orientada positivamente.

Solución. Sea $f(z) = \frac{z-2}{z(z-1)}$. Los puntos singulares de f son $z_1 = 0$ y $z_2 = 1$. Se observa que ambos son puntos interiores de C , además, z_1 y z_2 son polos simples de f . De esta forma,

$$\operatorname{Res}[f(z)]_{z=z_0} = \operatorname{Res}\left[\frac{z-2}{z(z-1)}\right]_{z=0} = 2$$

y

$$\operatorname{Res}[f(z)]_{z=z_0} = \operatorname{Res}\left[\frac{z-2}{z(z-1)}\right]_{z=1} = -1$$

Como z_1 y z_2 son puntos singulares aislados de f y f es una función analítica en C y en su interior, salvo en z_1 y z_2 , entonces por el Teorema de los Residuos

$$\int_C \frac{z-2}{z(z-1)} dz = 2\pi i [2 + (-1)] = 2\pi i$$

Otro ejemplo.

Calcular la integral

$$\int_C (1+z+z^2) \left(e^{1/z} + e^{1/(z-1)} + e^{1/(z-2)} \right) dz$$

donde C es un contorno cerrado simple que contiene en su interior a los puntos $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ y $z_3 = 2$.

Solución. En este caso, tenemos que

$$f(z) = (1+z+z^2) \left(e^{1/z} + e^{1/(z-1)} + e^{1/(z-2)} \right)$$

la cual puede ser reescrita como la suma de las funciones $f_1(z)$, $f_2(z)$ y $f_3(z)$ definidas, respectivamente, como

$$f_1(z) = e^{1/z} (1+z+z^2)$$

$$f_2(z) = e^{1/(z-1)} (1+z+z^2)$$

$$f_3(z) = e^{1/(z-2)} (1+z+z^2)$$

Calculemos el residuo de $f_1(z)$ en $z_1 = 0$. Se tiene que $f_2(z)$ y $f_3(z)$ son analíticas en $z_1 = 0$, luego poseen desarrollo de Taylor. De esta forma, el residuo de $f(z)$ en $z_1 = 0$ viene dado por el coeficiente de z^{-1} en el desarrollo de Laurent de $f_1(z)$ alrededor de $z_1 = 0$,

$$\begin{aligned}
 f_1(z) &= (1+z+z^2) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} \right] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{1-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2-n}
 \end{aligned}$$

válida para $0 < |z| < 1$. De aquí se deduce que

$$\text{Res}[f(z)]_{z_1=0} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{10}{6}$$

Ahora calculemos el residuo de $f_2(z)$ en $z_2 = 1$. Se tiene que $f_1(z)$ y $f_3(z)$ son analíticas en $z_2 = 1$, luego poseen desarrollo de Taylor. De esta forma, el residuo de $f(z)$ en $z_2 = 1$ viene dado por el coeficiente de $(z-1)^{-1}$ en el desarrollo de Laurent de $f_2(z)$ alrededor de $z_2 = 1$,

$$f_2(z) = e^{\frac{1}{z-1}} (1+z+z^2) = e^{\frac{1}{z-1}} \left(1 + ((z-1)+1) + ((z-1)+1)^2 \right)$$

$$f_2(z) = e^{\frac{1}{z-1}} \left(2 + (z-1) + ((z-1)+1)^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
 f_2(z) &= (3+3(z-1)+(z-1)^2) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z-1)^{-n} \right] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n!} (z-1)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n!} (z-1)^{1-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z-1)^{2-n}
 \end{aligned}$$

válida para $0 < |z-1| < 1$. De aquí se deduce que

$$\text{Res}[f(z)]_{z_2=1} = 3 + \frac{3}{2} + \frac{1}{6} = \frac{28}{6}$$

Finalmente, calculemos el residuo de $f_3(z)$ en $z_3 = 2$. Se tiene que $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son analíticas en $z_3 = 2$, luego poseen desarrollo de Taylor. De esta forma, el residuo de $f(z)$ en $z_3 = 2$ viene dado por el coeficiente del término $(z-2)^{-1}$ en el desarrollo de Laurent de $f_3(z)$ alrededor de $z_3 = 2$,

$$f_3(z) = e^{\frac{1}{z-2}} (1+z+z^2) = e^{\frac{1}{z-2}} \left(1 + ((z-2)+2) + ((z-2)+2)^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
 f_3(z) &= (7+5(z-2)+(z-2)^2) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z-2)^{-n} \right] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7}{n!} (z-2)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{n!} (z-2)^{1-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z-2)^{2-n}
 \end{aligned}$$

válida para $0 < |z-2| < 1$. De aquí se deduce que

$$\text{Res}[f(z)]_{z_3=2} = 7 + \frac{5}{2} + \frac{1}{6} = \frac{58}{6}$$

Con estos resultados, y usando el teorema de los residuos de Cauchy, tenemos que

$$\int_C (1+z+z^2) \left(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}} \right) dz = 2\pi i \left[\frac{10}{6} + \frac{28}{6} + \frac{58}{6} \right] = 32\pi i$$

Ejercicios.

Use el teorema de los residuos de Cauchy para evaluar las integrales, sobre la circunferencia $|z| = 3$ recorrida en sentido positivo, de las funciones

a) $f(z) = \frac{e^{-z}}{z^2}$

b) $f(z) = \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}$

c) $f(z) = z^2 \exp\left(\frac{1}{z}\right)$

d) $f(z) = \frac{z+1}{z^2-2z}$

Soluciones: (a) $-2\pi i$; (b) $-2\pi i/e$; (c) $\pi i/3$; (d) $2\pi i$.

Cálculo de residuos mediante fracciones parciales

En situaciones en las que tenemos una función racional $f(z)$ de la forma

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

donde $q(z)$ es un polinomio de grado mayor al de $p(z)$, es posible usar la expansión en fracciones parciales para encontrar los valores del residuo, tal como lo establece el siguiente teorema.

Teorema. Sea $f(z)$ una función racional, con N polos simples z_k , entonces la expansión en fracciones parciales de $f(z)$ tiene la forma

$$f(z) = \frac{A_1}{(z-z_1)} + \frac{A_2}{(z-z_2)} + \frac{A_3}{(z-z_3)} + \dots + \frac{A_N}{(z-z_N)}$$

donde los números complejos A_k , denominados coeficientes de la expansión, están dados por

$$A_k = \text{Res}[f(z)]_{z=z_k} = [(z-z_k)f(z)]_{z=z_k}.$$

e).- Residuos y polos.

Hasta aquí, cuando una función $f(z)$ tiene una singularidad esencial en z_0 , la única manera que tenemos para determinar el residuo en dicho punto consiste en obtener el desarrollo de Laurent alrededor de z_0 y elegir el coeficiente apropiado, correspondiente al término $(z-z_0)^{-1}$ de la parte principal de dicho desarrollo.

Pero si la función tiene un polo en z_0 no es necesario obtener todo el desarrollo de Laurent alrededor de z_0 para encontrar el coeficiente que buscamos.

Existen diversos métodos de los que podemos echar mano siempre y cuando sepamos que la singularidad es un polo, uno de ellos es el siguiente teorema que nos permite identificar si un punto z_0 es un polo de $f(z)$ y, además, nos dice cómo calcular $\text{Res}[f(z)]_{z=z_0}$.

Cálculo del Residuo en un Polo

Teorema. Sea $f(z)$ una función de variable compleja. Supongamos que para cierto entero positivo m , la función

$$\phi(z) = (z - z_0)^m f(z)$$

se puede definir en z_0 de modo que sea analítica ahí y $\phi(z_0) \neq 0$. Entonces $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0 , y su residuo ahí está dado por

$$\text{Res}[f(z)]_{z=z_0} = \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

Vale la pena notar que en el caso en que el polo es simple ($m = 1$), la expresión anterior se reduce a

$$\text{Res}[f(z)]_{z=z_0} = \phi(z_0).$$

Demostración. Considerando que $\phi(z)$ es analítica en z_0 , admite un desarrollo de Taylor alrededor de z_0 , tal que

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \phi(z_0) + \frac{\phi'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{\phi''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots + \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}(z - z_0)^{(m-1)} \\ &\quad + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \end{aligned}$$

en algún entorno $|z - z_0| < \varepsilon$.

Así que podemos escribir $f(z)$ como

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z - z_0)^m} \left[\phi(z_0) + \frac{\phi'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{\phi''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots + \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}(z - z_0)^{(m-1)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \right] \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\phi(z_0)}{(z - z_0)^m} + \frac{\phi'(z_0)}{1!(z - z_0)^{m-1}} + \frac{\phi''(z_0)}{2!(z - z_0)^{m-2}} + \dots + \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!(z - z_0)} \\ &\quad + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-m} \end{aligned}$$

cuando $0 < |z - z_0| < \varepsilon$.

Este desarrollo en serie de Laurent, junto con el hecho de que $\phi(z_0) \neq 0$, implica que

- z_0 es, en efecto, un polo de orden m de $f(z)$; y
- el coeficiente de $1/(z - z_0)$ confirma que el residuo de $f(z)$ en z_0 es

$$\text{Res}[f(z)]_{z=z_0} = \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

Con lo que se demuestra el teorema.

Ejercicios.

Use el teorema anterior, donde aplique, para evaluar los residuos de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(z) = \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}$

b) $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$

c) $f(z) = \frac{1}{z}$

d) $f(z) = \frac{z+1}{z^2-2z}$

e) $f(z) = \frac{e^{-z}}{z^2}$

f) $f(z) = z^2 \exp\left(\frac{1}{z}\right)$

g) $f(z) = \frac{z^5}{1-z^3}$

Residuos al infinito

Teorema. Si una función f es analítica en todo el plano finito a excepción de un número finito de puntos singulares interiores a un contorno cerrado simple C orientado positivamente, entonces

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) \right]_{z=z_0}$$

f).- Ceros de funciones analíticas.

Hay una relación estrecha entre los ceros y los polos de una función, de hecho más adelante veremos cómo los ceros pueden llevar a polos; sin embargo, previo a ello, veamos algunas ideas que nos pueden ser útiles en esto.

Anteriormente hemos visto que si f es una función analítica en un punto z_0 , entonces existen todas sus derivadas $f^{(n)}(z_0)$ (para $n = 1, 2, \dots$); lo anterior permite enunciar el siguiente teorema.

Teorema. Una función f analítica en z_0 , tiene un cero de orden m en z_0 si, y solo si, existe una función g , analítica y no nula en z_0 , tal que

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

Demostración. Partiendo de que g es analítica y no nula en z_0 , podemos hacer un desarrollo de Taylor para $g(z)$

$$g(z) = g(z_0) + \frac{g'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{g''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \frac{g'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^3 + \dots$$

válido en un entorno $|z - z_0| < \varepsilon$.

Con esto, podemos escribir $f(z)$ como

$$f(z) = g(z_0)(z-z_0)^m + \frac{g'(z_0)}{1!}(z-z_0)^{m+1} + \frac{g''(z_0)}{2!}(z-z_0)^{m+2} + \frac{g'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^{m+3} + \dots$$

que al comparar con su serie de Taylor

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}(z-z_0)^{m-1} + \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z-z_0)^m + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0)^{m+1} + \dots$$

vemos que

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$$

y

$$g(z_0) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$$

Esta última expresión nos lleva a que $f^{(m)}(z_0) \neq 0$, lo que implica que efectivamente z_0 es un cero de orden m de f , con lo que se demuestra en un sentido el teorema.

De manera recíproca, se puede partir de que z_0 es un cero de orden m de f , lo que implica que el desarrollo de Taylor tiene los primeros m términos son cero, de tal forma que

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

$$f(z) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z-z_0)^m + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0)^{m+1} + \dots$$

es decir,

$$f(z) = (z-z_0)^m \left[\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0) + \frac{f^{(m+2)}(z_0)}{(m+2)!}(z-z_0)^2 + \dots \right]$$

de donde vemos que $g(z)$ tiene la forma

$$g(z) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0) + \frac{f^{(m+2)}(z_0)}{(m+2)!}(z-z_0)^2 + \dots$$

con

$$g(z_0) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}$$

Lo que completa la demostración del teorema.

Un ejemplo.

Considerando la función $f(z) = z^2 + 4$, identifique y clasifique el (o los) cero(s).

Solución. Los ceros de $f(z)$ son $z_0 = \pm 2i$, ya que $f(z) = (z + 2i)(z - 2i)$

- Considerando $z_0 = +2i$, escribamos $g(z)$ como

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^m} = \frac{(z + 2i)(z - 2i)}{(z - 2i)^m}$$

que resulta diferente de cero en $z_0 = 2i$ cuando $m = 1$, por lo que $z_0 = +2i$ es un cero de orden 1.

- Considerando $z_0 = -2i$, escribamos $g(z)$ como

$$g(z) = \frac{(z + 2i)(z - 2i)}{(z + 2i)^m}$$

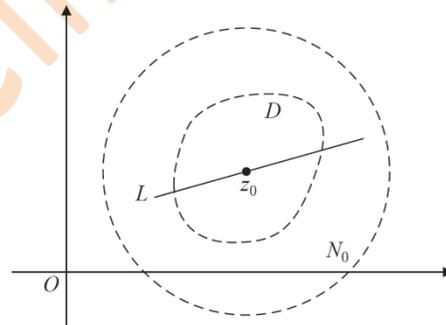
que resulta diferente de cero en $z_0 = -2i$ cuando $m = 1$, por lo que $z_0 = -2i$ es un cero de orden 1.

Para continuar, establecemos un par de teoremas útiles.

Teorema 1. Dados una función $f(z)$ y un punto z_0 , supongamos que

- f es analítica en z_0
- $f(z_0) = 0$, pero f no es idénticamente nula en ningún entorno de z_0 .

Entonces $f(z) \neq 0$ en algún entorno perforado $0 < |z - z_0| < \varepsilon$.



Teorema 2. Dados una función $f(z)$ y un punto z_0 , supongamos que

- f es analítica en un entorno N_0 de z_0
- $f(z_0) = 0$ y $f(z) = 0$, en todos los puntos de un dominio D o de un segmento recto que contengan a z_0 .

Entonces $f(z) \equiv 0$ en N_0 ; esto es, $f(z)$ es idénticamente nula en el entorno N_0 .

Una vez establecidos los teoremas anteriores, vamos a ver el teorema que muestra cómo los ceros de orden m de una función f pueden producir polos de orden m .

Teorema. Supongamos que

- $p(z)$ y $q(z)$ son funciones analíticas en el punto z_0
- $p(z_0) \neq 0$ y $q(z)$ tiene un cero de orden m en z_0 .

Entonces el cociente $p(z)/q(z)$ tiene un polo de orden m en z_0 .

Demostración. Puesto que q tiene un cero de orden m en z_0 , el teorema 1 anterior implica que existe un entorno perforado de z_0 en el cual $q(z)$ es distinto de 0, con lo que z_0 es un punto singular aislado del cociente $p(z)/q(z)$.

Por otro lado, podemos escribir

$$q(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

donde g es analítica y no nula en z_0 , lo que a su vez, permite escribir

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z)/g(z)}{(z - z_0)^m}$$

Como $p(z)/g(z)$ es analítica y no nula en z_0 , se sigue que z_0 es un polo de orden m de $p(z)/q(z)$.

Un ejemplo.

Las funciones $p(z) = z$ y $q(z) = z^2 + 4$ son enteras, y además sabemos que $q(z)$ tiene un cero de orden $m = 1$ en el punto $z_0 = 2i$. Por lo tanto, el teorema anterior implica que la función $f(z)$ definida como

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{z}{z^2 + 4}$$

tiene un polo de orden $m = 1$.

El teorema anterior pone a nuestra disposición otro método para identificar los polos simples y calcular los residuos correspondientes que, en ocasiones, resulta más fácil de aplicar que los procedimientos vistos anteriormente.

Teorema. Sean p y q funciones analíticas en un punto z_0 . Si

$$p(z_0) \neq 0, q(z_0) = 0 \text{ y } q'(z_0) \neq 0$$

z_0 es un polo simple del cociente $p(z)/q(z)$ con

$$\text{Res} \left[\frac{p(z)}{q(z)} \right]_{z=z_0} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Demostración. Observemos que, dadas las condiciones impuestas, z_0 es un cero de orden $m = 1$ de la función q . Así pues

$$q(z) = (z - z_0)g(z)$$

donde $g(z)$ es analítica y no nula en z_0 .

Además z_0 es un polo simple del cociente $p(z)/q(z)$, que puede escribirse como

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z)/g(z)}{z - z_0}$$

Ahora bien, $p(z)/g(z)$ es analítica y no nula en z_0 , así que recordando el teorema para el cálculo del residuo en un polo simple, a saber

$$\text{Res}[f(z)]_{z=z_0} = \phi(z_0) \text{ donde } \phi(z) = (z - z_0)f(z),$$

podemos escribir

$$\text{Res}\left[\frac{p(z)}{q(z)}\right]_{z=z_0} = \frac{p(z_0)}{g(z_0)}$$

Pero como $q(z) = (z - z_0)g(z)$, podemos derivar con respecto a z y evaluar en $z = z_0$, para obtener sucesivamente

$$q'(z) = (z - z_0)'g(z) + (z - z_0)g'(z)$$

$$q'(z) = g(z) + (z - z_0)g'(z)$$

$$q'(z_0) = g(z_0) + (z_0 - z_0)g'(z_0)$$

con lo que, finalmente, se tiene

$$\text{Res}\left[\frac{p(z)}{q(z)}\right]_{z=z_0} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

lo que demuestra el teorema.

Un ejemplo.

Usando el teorema anterior, demostrar que el punto $z = 0$ es un polo simple de la función

$$f(z) = \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

y que su residuo es 1.

Solución. A partir de la expresión para $f(z)$, identificamos

$$p(z) = 1$$

$$q(z) = \sin z$$

A continuación verificamos las condiciones que deben cumplir $p(z)$ y $q(z)$, a saber

$$p(z_0) \neq 0, q(z_0) = 0 \text{ y } q'(z_0) \neq 0$$

que en este caso resultan

$$p(0) = 1 \neq 0,$$

$$q(0) = \sin 0 = 0$$

y

$$q'(0) = \cos(0) = 1 \neq 0$$

Por lo que podemos concluir que $z = 0$ es un polo simple de $\csc z$.

Mientras que para calcular el residuo, usamos

$$\text{Res}\left[\frac{p(z)}{q(z)}\right]_{z=z_0} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

es decir

$$\operatorname{Res}[\csc z]_{z=0} = \frac{1}{1} = 1$$

Otro ejemplo.

Pruebe que

$$\operatorname{Res}[z \sec z]_{z=z_n} = (-1)^{n+1} z_n$$

donde

$$z_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Solución. En este caso, aunque no vemos el cociente, este aparece cuando escribimos $f(z)$ como

$$f(z) = z \sec z = \frac{z}{\cos z}$$

de donde podemos identificar

$$p(z) = z$$

$$q(z) = \cos z$$

A continuación verificamos las condiciones que deben cumplir $p(z)$ y $q(z)$, a saber

$$p(z_0) \neq 0, q(z_0) = 0 \text{ y } q'(z_0) \neq 0$$

que en este caso resultan

$$p\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \neq 0$$

$$q\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(n\pi) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(n\pi) = 0$$

y

$$\begin{aligned} q'\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) &= -\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \\ &= -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(n\pi) - \sin(n\pi)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\cos(n\pi) = -(-1)^n = (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

Por lo que podemos concluir que la función

$$f(z) = z \sec z = \frac{z}{\cos z}$$

tiene un polo de orden $m = 1$ en todos los puntos

$$z_n = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \text{con } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Para calcular el residuo, usamos $\text{Res} \left[\frac{p(z)}{q(z)} \right]_{z=z_0} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$

es decir

$$\text{Res}[z \sec z]_{z=z_n} = \text{Res} \left[\frac{z}{\cos z} \right]_{z=z_n} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right)}{(-1)^{n+1}} = (-1)^{n+1} \left(\frac{\pi}{2} + n\pi \right)$$

con lo que se llega al resultado deseado.

g).- Aplicación de los residuos.

Calculo de integrales impropias.

En cálculo, la integral impropia de una función $f(x)$ sobre la semirrecta $x \geq 0$ se define como

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) dx \quad (1)$$

Cuando el límite existe se dice que la integral impropia es convergente y que converge a dicho límite.

Si $f(x)$ es continua en todo x , su integral impropia sobre la recta $-\infty < x < \infty$ se define como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R_1 \rightarrow \infty} \int_{-R_1}^0 f(x) dx + \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \int_0^{R_2} f(x) dx \quad (2)$$

y cuando los dos límites existen se dice que la integral impropia converge a la suma de ambos límites.

Definición. Esta última integral tiene otro valor asignado conocido como **valor principal de Cauchy (VP)** que se define como el número

$$VP \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \right] = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx$$

siempre que este límite exista.

Es importante mencionar que si la integral dada por la ecuación (2) es convergente, su valor principal de Cauchy (VP) existe; sin embargo, la existencia del valor principal de Cauchy NO garantiza la convergencia de la integral (2), tal como se muestra en el ejemplo siguiente.

Un ejemplo.

Observemos que para la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dx$$

el valor principal es

$$VP \left[\int_{-\infty}^{\infty} x dx \right] = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R x dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-R}^R = \lim_{R \rightarrow \infty} [0] = 0$$

Mientras que usando la expresión (2) tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x dx &= \lim_{R_1 \rightarrow \infty} \int_{-R_1}^0 x dx + \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \int_0^{R_2} x dx \\ &= \lim_{R_1 \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-R_1}^0 + \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{R_2} \\ &= - \lim_{R_1 \rightarrow \infty} \left[\frac{R_1^2}{2} \right] + \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \left[\frac{R_2^2}{2} \right] \end{aligned}$$

y dado que estos dos últimos límites no existen, la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dx$$

no existe.

Valor principal para una función impar.

Supongamos que $f(x)$ es una función impar, tal que

$$f(-x) = -f(x)$$

para todo x . En este caso tenemos que

$$\int_{-R}^R f(x) dx = 0$$

ya que el área bajo curva de $f(x)$ ubicada entre $-R$ y 0 cancela al área bajo la curva ubicada entre 0 y R .

Con lo anterior, el valor principal de Cauchy para una función impar $f(x)$ resulta

$$VP \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \right] = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = 0$$

Valor principal para una función par.

A continuación, supongamos que $f(x)$ es una función par, tal que

$$f(-x) = f(x)$$

para todo x .

La simetría de la función nos permite escribir

$$\int_{-R}^R f(x) dx = 2 \int_0^R f(x) dx$$

lo que permite probar que para una función par, el valor principal de Cauchy existe, y está dado por

$$VP \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \right] = 2 \int_0^{\infty} f(x) dx$$

A continuación describiremos un método basado en los residuos que permite evaluar integrales impropias de funciones racionales pares $f(x)$ de la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

con

$$f(-x) = f(x)$$

y donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios con coeficientes reales sin factores comunes.

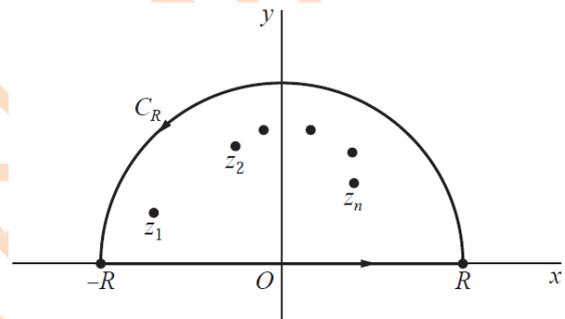
Suponemos que $q(z)$ no tiene ceros reales y que tiene al menos un cero en el semiplano complejo superior (donde $\text{Im}(z) > 0$).

El método se inicia identificando todos los ceros distintos del polinomio $q(z)$ situados en el semiplano superior, hay un número finito de ellos (dependiendo del grado del polinomio) y podemos denotarlos como z_1, z_2, \dots, z_n , donde n es menor o igual que el grado N de $q(z)$.

A continuación se integra el cociente

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

sobre el contorno semicircular formado por el segmento recto desde $z = -R$ a $z = R$ y la mitad superior de la circunferencia $|z| = R$ descrita en sentido positivo y que denotaremos por C_R , tal como se muestra en la figura.



En todo caso supondremos que R es lo suficientemente grande para que los puntos z_1, z_2, \dots, z_n sean todos interiores al contorno cerrado que se está considerando.

Usando el teorema de los residuos de Cauchy y la parametrización $z = x$ para el segmento recto, podemos escribir

$$\int_C f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z)]_{z=z_k}$$

de donde

$$\int_{-R}^R f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z)]_{z=z_k} - \int_{C_R} f(z) dz$$

Si

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$$

entonces

$$VP \left[\int_{-R}^R f(x) dx \right] = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z)]_{z=z_k}$$

Tomando en cuenta que $f(x)$ es una función par, podemos escribir finalmente que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z)]_{z=z_k}$$

y

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z)]_{z=z_k}$$

Un ejemplo.

Para evaluar la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx$$

comenzamos observando que

$$f(z) = \frac{z^2}{z^6 + 1} = \frac{p(z)}{q(z)}$$

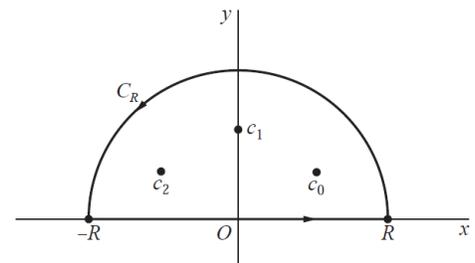
tiene singularidades aisladas en los ceros del polinomio $q(z) = z^6 + 1$, que son las raíces sextas de $-1 (= e^{i\pi})$ y es analítica en todos los demás puntos del plano complejo.

En este caso, recordando lo visto anteriormente para el cálculo de raíces, vemos que

$$z_k = c_k = \exp\left[i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{6}\right)\right]$$

con $k = 0, 1, 2, \dots, 5$.

Las primeras tres raíces están en el semiplano superior y las otras tres en el semiplano inferior, tal como se muestra en la figura. Cuando $R > 1$, los puntos c_k ($k = 0, 1, 2$) están en el interior de la región semicircular acotada por el contorno cerrado simple mostrado.



Así que en este caso, integrando sobre el contorno cerrado, obtenemos

$$\int_C f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i [B_0 + B_1 + B_2]$$

donde B_k es el residuo de $f(z)$ en c_k ($k = 0, 1, 2$).

Para calcular los residuos anteriores, vemos que los puntos c_k son polos simples de $f(z)$, por lo que podemos utilizar un teorema anteriormente visto que establece que

$$\text{Res}\left[\frac{p(z)}{q(z)}\right]_{z=z_0} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Si $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = 0$ y $q'(z_0) \neq 0$.

En este caso

$$B_k = \operatorname{Res} \left[\frac{z^2}{z^6 + 1} \right]_{z=c_k} = \frac{c_k^2}{6c_k^5} = \frac{1}{6c_k^3}$$

Por lo que

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \left[\frac{1}{6i} - \frac{1}{6i} + \frac{1}{6i} \right] = \frac{\pi}{3}$$

de donde

$$\int_{-R}^R f(x) dx = \frac{\pi}{3} - \int_{C_R} f(z) dz$$

válida para toda R , tal que $R > 1$.

En este punto tenemos que considerar el cálculo de la integral del lado derecho, para ello vamos a utilizar la parametrización de C_R dada por

$$z(t) = Re^{it}$$

con $0 \leq t \leq \pi$.

A partir de lo anterior, tenemos que

$$|z^2| = |z|^2 = R^2$$

y, usando la desigualdad del triángulo para números complejos ($|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$), podemos escribir

$$|z^6 + 1| \geq ||z|^6 - 1| = R^6 - 1$$

Así que si z es cualquier punto sobre el contorno C_R , entonces

$$|f(z)| = \left| \frac{z^2}{z^6 + 1} \right| \leq \frac{R^2}{R^6 - 1}$$

En este punto podemos usar un resultado que se tiene cuando evaluamos una integral sobre un contorno de longitud L en el que el módulo de la función $f(z)$ está acotado por un valor M , es decir

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML$$

lo cual implica que

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \left(\frac{R^2}{R^6 - 1} \right) \pi R = \frac{\pi R^3}{R^6 - 1}$$

es decir

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \frac{\frac{\pi}{R^3}}{\frac{R^6}{R^6} - \frac{1}{R^6}} = \frac{\frac{\pi}{R^3}}{1 - \frac{1}{R^6}}$$

que, en el límite cuando $R \rightarrow \infty$, resulta cero.

Con este último resultado podemos establecer que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x^2}{x^6 + 1} dx = \frac{\pi}{3}$$

de donde, el valor principal de Cauchy está dado por

$$VP \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx \right] = \frac{\pi}{3}$$

Lo que permite escribir, finalmente, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx = \frac{\pi}{3}$$

y como el integrando es par, también tenemos que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx = \frac{\pi}{6}$$

Con lo que se obtiene el resultado que se buscaba.

Ejercicios.

Utilice los residuos para calcular, en cada inciso, la integral impropia solicitada.

a) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$

b) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$

c) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$

d) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$

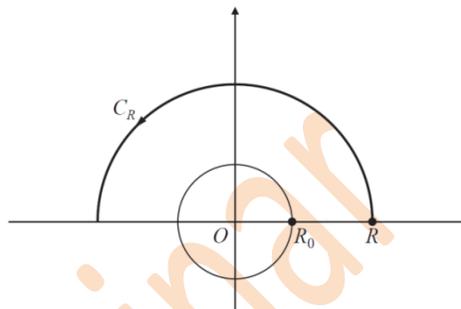
Lema de Jordan

En la evaluación de integrales sobre el contorno C_R , cuyo integrando es de la forma $f(z)e^{iaz}$, en algunas ocasiones se hace necesario usar el llamado *Lema de Jordan*, que se enuncia a continuación.

Teorema. Suponga que

- (a) la función $f(z)$ es analítica en todos los puntos z del semiplano complejo superior que son exteriores a un círculo $|z| = R_0$;
- (b) C_R denota el semicírculo representado por $z = Re^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$), donde $R > R_0$;
- (c) para todos los puntos z de C_R hay una constante positiva M_R tal que

$$|f(z)| \leq M_R \quad \text{y} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} M_R = 0$$



Entonces, para toda constante positiva a ,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)e^{iaz} dz = 0 \quad (5.17)$$

Integrales impropias en el análisis de Fourier.

Otra aplicación del teorema de los residuos aparece en el cálculo de integrales impropias convergentes de las formas

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin ax dx \quad \text{ó} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ax dx$$

donde a es una constante positiva y, tal como lo hemos hecho, supondremos que

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios con coeficientes reales sin factores en común; además, $q(x)$ no tiene ceros reales.

Este tipo de integrales aparecen en la teoría y aplicaciones de la Integral de Fourier que veremos más adelante en este curso.

En este tipo de integrales no podemos aplicar directamente las ideas desarrolladas anteriormente para el cálculo de integrales impropias, pero aún podemos hacer algo si consideramos que

$$\int_{-R}^R f(x) \cos ax dx + i \int_{-R}^R f(x) \sin ax dx = \int_{-R}^R f(x) e^{iax} dx$$

es decir, en vez de calcular la integral que involucra al seno o al coseno, calculamos la integral que contiene a la exponencial y al final igualamos partes reales e imaginarias en ambos lados del resultado que se obtiene.

Lo anterior, nos conduce a que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ax dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos ax dx = \operatorname{Re} \left[2\pi i \sum_i \operatorname{Res} \left[\frac{p(z)}{q(z)} e^{iaz} \right]_{z_k} \right]$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin ax dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin ax dx = \operatorname{Im} \left[2\pi i \sum_i \operatorname{Res} \left[\frac{p(z)}{q(z)} e^{iaz} \right]_{z_k} \right]$$

siempre que la diferencia entre el grado de $q(x)$ y el grado de $p(x)$ sea mayor o igual a 1.

Un ejemplo.

Calcule $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^4 + 1} dx$

Solución. En este caso identificamos

$$f(z)e^{iaz} = \frac{p(z)}{q(z)} e^{iaz} = \frac{z}{z^4 + 1} e^{i2z}$$

por lo que tenemos que calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^4 + 1} dx = \operatorname{Im} \left[2\pi i \sum_i \operatorname{Res} \left[\frac{ze^{i2z}}{z^4 + 1} \right]_{z_k} \right]$$

Para ello advertimos que los polos z_k se ubican en los ceros de $z^4 + 1$, resultando

$$z_k = \exp \left[i \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4} \right) \right]$$

con $k = 0, 1, 2, 3$. Como los cuatro valores son distintos, podemos afirmar que corresponden a polos simples.

Para nuestro problema bastará considerar los polos ubicados en el semiplano superior, que corresponden a los valores

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 + i)$$

por lo que el cálculo del residuo se reduce a evaluar

$$\sum_k \operatorname{Res} \left[\frac{ze^{i2z}}{z^4 + 1} \right]_{z_k} = \sum_k \left. \frac{ze^{i2z}}{4z^3} \right|_{z_k} = \sum_k \left. \frac{e^{i2z}}{4z^2} \right|_{z_k}$$

desarrollando la sumatoria para cada polo, obtenemos

$$\sum_k \operatorname{Res} \left[\frac{ze^{i2z}}{z^4 + 1} \right]_{z_k} = \frac{e^{i2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right)}}{4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right)^2} + \frac{e^{i2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)\right)}}{4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)\right)^2}$$

que podemos simplificar al desarrollar las operaciones indicadas en el denominador y en el argumento de las exponenciales para llegar a

$$\sum_k \operatorname{Res} \left[\frac{ze^{i2z}}{z^4+1} \right]_{z_k} = \frac{e^{i\sqrt{2}(1+i)}}{4i} + \frac{e^{i\sqrt{2}(-1+i)}}{-4i}$$

que se reduce a

$$\sum_k \operatorname{Res} \left[\frac{ze^{i2z}}{z^4+1} \right]_{z_k} = \frac{e^{-\sqrt{2}}}{2} \left(\frac{e^{i\sqrt{2}} - e^{-i\sqrt{2}}}{2i} \right)$$

o

$$\sum_k \operatorname{Res} \left[\frac{ze^{i2z}}{z^4+1} \right]_{z_k} = \frac{e^{-\sqrt{2}}}{2} \sin \sqrt{2}$$

Así que finalmente, el resultado buscado es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^4+1} dx = \operatorname{Im} \left[2\pi i \left(\frac{e^{-\sqrt{2}}}{2} \sin \sqrt{2} \right) \right]$$

es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^4+1} dx = \pi e^{-\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}$$

De hecho, una vez calculado el residuo podemos establecer un par de resultados adicionales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos 2x}{x^4+1} dx = \operatorname{Re} \left[2\pi i \left(\frac{e^{-\sqrt{2}}}{2} \sin \sqrt{2} \right) \right] = 0$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i2x}}{x^4+1} dx = 2\pi i \left(\frac{e^{-\sqrt{2}}}{2} \sin \sqrt{2} \right) = \pi i \left(e^{-\sqrt{2}} \sin \sqrt{2} \right)$$

Otro ejemplo.

Calcule $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+4} dx$

Solución. En este caso identificamos

$$f(z)e^{iaz} = \frac{p(z)}{q(z)} e^{iaz} = \frac{1}{z^2+4} e^{i3z}$$

por lo que tenemos que calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+4} dx = \operatorname{Re} \left[2\pi i \sum_i \operatorname{Res} \left[\frac{e^{i3z}}{z^2+4} \right]_{z_k} \right]$$

Para ello advertimos que los polos z_k se ubican en los ceros de z^2+4 , resultando $z_k = \pm 2i$. Como los dos valores son distintos, podemos afirmar que corresponden a polos simples.

Para nuestro problema bastará considerar es polo ubicado en el semiplano superior, que corresponde al valor $z_k = +2i$.

Por lo que el cálculo del residuo se reduce a evaluar

$$\sum_k \operatorname{Res} \left[\frac{e^{i3z}}{z^2 + 4} \right]_{z_k} = \frac{e^{i3z}}{2z} \Big|_{z_0=2i}$$

desarrollando la sumatoria para cada polo, obtenemos

$$\sum_k \operatorname{Res} \left[\frac{e^{i3z}}{z^2 + 4} \right]_{z_k} = \frac{e^{i3(2i)}}{2(2i)} = \frac{e^{-6}}{4i}$$

que se reduce a

$$\sum_k \operatorname{Res} \left[\frac{e^{i3z}}{z^2 + 4} \right]_{z_k} = -i \frac{e^{-6}}{4}$$

Así que finalmente, el resultado buscado es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2 + 4} dx = \operatorname{Re} \left[2\pi i \left(-i \frac{e^{-6}}{4} \right) \right] = \operatorname{Re} \left[2\pi \left(\frac{e^{-6}}{4} \right) \right]$$

es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2 + 4} dx = \frac{\pi e^{-6}}{2}$$

De hecho, una vez calculado el residuo podemos establecer un par de resultados adicionales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3x}{x^2 + 4} dx = \operatorname{Im} \left[2\pi i \left(-i \frac{e^{-6}}{4} \right) \right] = 0$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i3x}}{x^2 + 4} dx = 2\pi i \left(-i \frac{e^{-6}}{4} \right) = \pi \left(\frac{e^{-6}}{2} \right)$$

Integrales sobre contornos sangrados o con muescas.

Hasta este punto, en las aplicaciones de los residuos, hemos prestado atención al problema de evaluar integrales de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin ax dx \quad \text{ó} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos ax dx$$

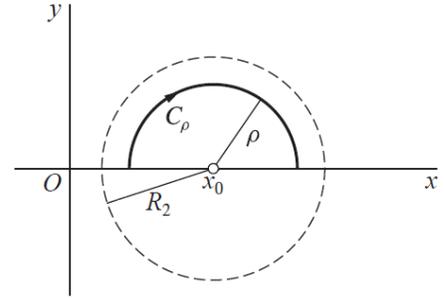
En todo momento se exigió que el denominador ($q(x)$) sea diferente de cero para todo x .

Como una última aplicación de los residuos veremos el cálculo de integrales en los que el contorno de integración pasa por singularidades, es decir, puntos en los que $q(x) = 0$; siempre que se cumplan ciertas condiciones. Este tipo de contornos se llaman *contornos sangrados o con muescas*.

Para poder trabajar con este tipo de contornos sangrados, veamos el siguiente teorema.

Teorema. Supongamos que

- i. Una función $f(z)$ tiene un polo simple en un punto $z = x_0$ del eje real, con una representación en serie de Laurent en el disco perforado $0 < |z - x_0| < R_2$ y residuo B_0 .
- ii. C_ρ denota la mitad superior de una circunferencia $|z - x_0| = \rho$, con $\rho < R_2$, recorrida en sentido negativo (el de las agujas de un reloj).



Entonces

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} f(z) dz = -B_0 \pi i$$

Demostración. Suponiendo que se satisfacen las condiciones (i) y (ii) del teorema, podemos escribir la serie de Laurent de $f(z)$ como

$$f(z) = g(z) + \frac{B_0}{z - x_0} \quad (0 < |z - x_0| < R_2)$$

donde

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - x_0)^n \quad (|z - x_0| < R_2)$$

Con esto, la integral sobre $f(z)$ se puede escribir como

$$\int_{C_\rho} f(z) dz = \int_{C_\rho} g(z) dz + B_0 \int_{C_\rho} \frac{dz}{z - x_0}$$

A continuación veamos cada una de las integrales del lado derecho de la expresión anterior, considerando el límite cuando $\rho \rightarrow 0$.

La función $g(z)$ es continua cuando $|z - x_0| < R_2$, por lo que si tomamos un número ρ_0 tal que

$$\rho < \rho_0 < R_2,$$

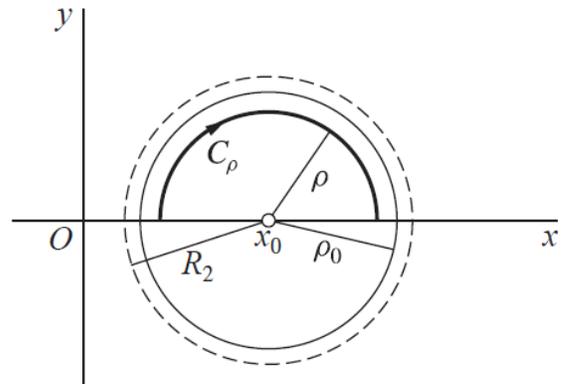
$g(z)$ debe estar acotada en el disco cerrado $|z - x_0| < \rho_0$.

Así pues, existe una constante M tal que

$$|g(z)| \leq M \quad \text{siempre que } |z - x_0| < \rho_0$$

con lo anterior, puesto que la longitud de C_ρ es $L = \pi\rho$, se tiene

$$\left| \int_{C_\rho} g(z) dz \right| \leq ML = M \pi \rho$$



Por consiguiente

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left| \int_{C_\rho} g(z) dz \right| = 0$$

Para evaluar la segunda integral, parametricemos la semicircunferencia $-C_\rho$ como

$$z = x_0 + \rho e^{i\theta} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

así que

$$z - x_0 = \rho e^{i\theta}$$

Con lo que podemos escribir la integral como

$$\begin{aligned} \int_{C_\rho} \frac{dz}{z - x_0} &= - \int_{-C_\rho} \frac{dz}{z - x_0} \\ &= - \int_0^\pi \frac{1}{\rho e^{i\theta}} \rho i e^{i\theta} d\theta \\ &= -i \int_0^\pi d\theta = -i\pi \end{aligned}$$

por lo que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\int_{C_\rho} \frac{dz}{z - x_0} \right) = -i\pi$$

Finalmente, podemos usar los resultados anteriores, correspondientes a cada una de las integrales para escribir

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} f(z) dz = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} g(z) dz + B_0 \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} \frac{dz}{z - x_0}$$

como

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} f(z) dz = -B_0 \pi i$$

con lo que se demuestra el teorema.

Un ejemplo:

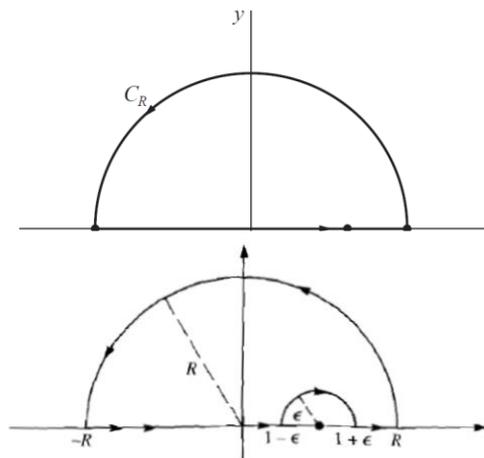
Encuentre el valor principal de Cauchy para la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x-1} dx$$

Solución. En este caso no podemos considerar un contorno como los empleados anteriormente porque el polo de $f(x)$, $c_0 = 1$, forma parte del contorno tal como se muestra en la figura anexa.

Sin embargo, considerando la idea planteada en el teorema anterior podemos considerar el siguiente contorno sangrado, con el que rodeamos la singularidad mediante una muesca (o sangría) de radio ε centrada en c_0 .

Con esto, podemos extender la función $f(x)$ al plano complejo considerando que



$$f(z) = \frac{e^{i3z}}{z-1}$$

por lo que aplicando el teorema de Cauchy podemos escribir

$$\int_C \frac{e^{i3z}}{z-1} dz = \int_{-R}^{1-\varepsilon} \frac{e^{i3x}}{x-1} dx + \int_{C_\rho} \frac{e^{i3z}}{z-1} dz + \int_{1+\varepsilon}^R \frac{e^{i3x}}{x-1} dx + \int_{C_R} \frac{e^{i3z}}{z-1} dz = 0$$

Queda de tarea demostrar que la última integral, en el límite cuando $R \rightarrow \infty$, es cero.

A continuación, vamos a evaluar la segunda integral en el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ considerando que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\rho} f(z) dz = -B_0 \pi i$$

lo que implica evaluar el residuo B_0 de

$$f(z) = \frac{e^{i3z}}{z-1}$$

En este caso, podemos usar

$$B_0 = \text{Res} \left[\frac{e^{i3z}}{z-1} \right]_{c_0=1} = \frac{e^{i3z}}{1} \Big|_{c_0=1} = e^{3i}$$

con lo que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\rho} f(z) dz = -e^{3i} \pi i$$

Una vez tomados los límites $R \rightarrow \infty$ y $\varepsilon \rightarrow 0$ podemos escribir

$$\int_{-R}^{1-\varepsilon} \frac{e^{i3x}}{x-1} dx + \int_{C_\rho} \frac{e^{i3z}}{z-1} dz + \int_{1+\varepsilon}^R \frac{e^{i3x}}{x-1} dx + \int_{C_R} \frac{e^{i3z}}{z-1} dz = 0$$

como

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left[\int_{-R}^{1-\varepsilon} \frac{e^{i3x}}{x-1} dx + \int_{1+\varepsilon}^R \frac{e^{i3x}}{x-1} dx \right] - i\pi e^{3i} = 0$$

En el límite indicado, la primera parte de la ecuación se reduce al valor principal de Cauchy para la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i3x}}{x-1} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x + i \sin 3x}{x-1} dx$$

Así pues,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x-1} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3x}{x-1} dx = i\pi e^{3i} = i\pi [\cos 3 + i \sin 3]$$

con lo que igualando partes real e imaginaria por separado, nos permite escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x-1} dx = -\pi \sin 3$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3x}{x-1} dx = \pi \cos 3$$

Vale la pena mencionar que en este ejemplo el integrando de la integral real que hemos evaluado tenía una discontinuidad en $x = 1$. La integración se efectuó a largo de un contorno sangrado alrededor del valor de z que corresponde a este punto. Cuando el integrando tenga más de una discontinuidad es necesario emplear contornos de integración con muescas en todos y cada uno de los puntos de discontinuidad.

Por ejemplo, para calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 - 9} dx$$

se deben considerar muescas en $z = \pm 3$.

Otro ejemplo:

Encuentre el valor principal de Cauchy para la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 - 16} dx$$

Solución. En este caso tenemos dos polos simples en $x = \pm 4$, por lo que debemos considerar un contorno sangrado que nos permita rodear las singularidades mediante muescas (o sangrías) de radio ϵ centradas en $z = \pm 4$.

Con esto, podemos extender la función $f(x)$ al plano complejo considerando que

$$f(z) = \frac{e^{i2z}}{z^2 - 16}$$

por lo que aplicando el teorema de Cauchy podemos escribir

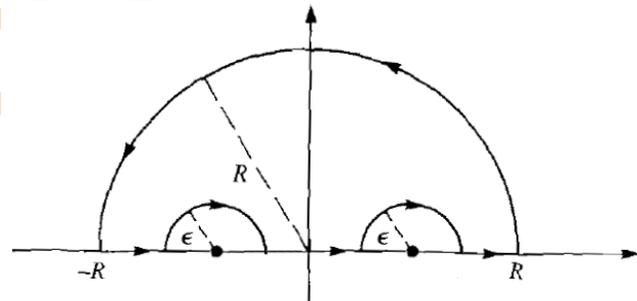
$$\int_{-R}^{-4-\epsilon} \frac{e^{i2x}}{x^2 - 16} dx + \int_{C_{\rho_1}} \frac{e^{i2z}}{z^2 - 16} dz + \int_{-4+\epsilon}^{4-\epsilon} \frac{e^{i2x}}{x^2 - 16} dx + \int_{C_{\rho_2}} \frac{e^{i2z}}{z^2 - 16} dz + \int_{4+\epsilon}^R \frac{e^{i2x}}{x^2 - 16} dx + \int_{C_R} \frac{e^{i2z}}{z^2 - 16} dz = 0$$

Queda de tarea demostrar que la última integral, en el límite cuando $R \rightarrow \infty$, es cero.

A continuación, vamos a evaluar la segunda integral en el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ considerando que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_{\rho_1}} f(z) dz = -B_0 \pi i$$

lo que implica evaluar el residuo B_0 de



$$f(z) = \frac{e^{i2z}}{z^2 - 16}$$

en $z = -4$, resultando

$$B_0 = \text{Res} \left[\frac{e^{i2z}}{z^2 - 16} \right]_{c_0=1} = \frac{e^{i2z}}{2z} \Big|_{c_0=-4} = -\frac{e^{-8i}}{8}$$

con lo que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_{\rho_1}} f(z) dz = \frac{e^{-8i}}{8} \pi i$$

Procediendo de manera similar encontramos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_{\rho_2}} f(z) dz = -\frac{e^{8i}}{8} \pi i$$

Una vez tomados los límites $R \rightarrow \infty$ y $\varepsilon \rightarrow 0$ podemos escribir

$$\int_{-R}^{-4-\varepsilon} \frac{e^{i2x}}{x^2 - 16} dx + \int_{C_{\rho_1}} \frac{e^{i2z}}{z^2 - 16} dz + \int_{-4+\varepsilon}^{4-\varepsilon} \frac{e^{i2x}}{x^2 - 16} dx + \int_{C_{\rho_2}} \frac{e^{i2z}}{z^2 - 16} dz + \int_{4+\varepsilon}^R \frac{e^{i2x}}{x^2 - 16} dx + \int_{C_R} \frac{e^{i2z}}{z^2 - 16} dz = 0$$

como

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left[\int_{-R}^{-4-\varepsilon} \frac{e^{i2x}}{x^2 - 16} dx + \int_{-4+\varepsilon}^{4-\varepsilon} \frac{e^{i2x}}{x^2 - 16} dx + \int_{4+\varepsilon}^R \frac{e^{i2x}}{x^2 - 16} dx \right] + \frac{e^{-8i}}{8} \pi i - \frac{e^{8i}}{8} \pi i = 0$$

En el límite indicado, la primera parte de la ecuación se reduce al valor principal de Cauchy para la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2x}}{x^2 - 16} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x + i \sin 2x}{x^2 - 16} dx$$

Así pues,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 - 16} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2 - 16} dx &= \frac{e^{8i}}{8} \pi i - \frac{e^{-8i}}{8} \pi i \\ &= \frac{i\pi}{8} [(\cos 8 + i \sin 8) - (\cos 8 - i \sin 8)] = -\frac{\pi}{4} \sin 8 \end{aligned}$$

con lo que igualando partes real e imaginaria por separado, nos permite escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2 - 16} dx = -\frac{\pi}{4} \sin 8 \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2 - 16} dx = 0$$

Siendo la primera de las dos integrales el resultado que buscábamos, la segunda integral nos da cero, toda vez que el integrando es impar y el límite considerado es simétrico respecto al origen al igual que las singularidades que presenta.

Las ideas discutidas en esta parte final de las aplicaciones de residuos muchas veces se pueden aplicar en situaciones en las que los límites de integración no son al infinito, por ejemplo, cuando calculamos integrales de la forma

$$\int_a^b f(x)dx$$

vemos que a veces existe entre a y b un punto p en el que $f(x)$ se hace infinita. Supongamos que $f(x)$ es continua en todos los otros puntos del intervalo $a \leq x \leq b$, tenemos así una integral impropia.

Las integrales impropias que ya conocemos son aquellas cuyos límites son infinitos; sin embargo, el adjetivo “impropias” se usa en ambos casos porque estas integrales no se pueden expresar como el límite de una suma.

Las siguientes expresiones son integrales impropias del tipo que hemos estudiado (funciones racionales $p(x)/q(x)$)

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} , \quad \int_1^3 \frac{dx}{(x-2)} \quad \text{y} \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$$

ya que, dicho coloquialmente, los integrandos de estas expresiones “estallan” en algún punto del intervalo de integración donde el denominador toma el valor de cero.

Para evaluar este tipo de integrales necesitamos una definición adecuada del valor principal de Cauchy, que se presenta a continuación.

Definición. Sea $f(x)$ una función continua para toda x en el intervalo $a \leq x \leq b$, excepto en el punto p interno a dicho intervalo, y ε acercándose a cero por la derecha. Se define el valor principal de Cauchy para la integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

como el número

$$VP \left[\int_a^b f(x)dx \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{p-\varepsilon} f(x)dx + \int_{p+\varepsilon}^b f(x)dx \right]$$

siempre que este límite exista.

Un ejemplo.

Determine el valor principal de Cauchy para la integral

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$$

Solución. Usando la definición anterior, podemos escribir

$$VP \left[\int_{-1}^2 \frac{dx}{x} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-1}^{\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^2 \frac{dx}{x} \right]$$

Lo que lleva a

$$\begin{aligned} VP \left[\int_{-1}^2 \frac{dx}{x} \right] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\ln |\varepsilon| - \ln |-1| + \ln |2| - \ln |\varepsilon|] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [-\ln |-1| + \ln |2|] \\ VP \left[\int_{-1}^2 \frac{dx}{x} \right] &= \ln |2| \end{aligned}$$

Es importante mencionar que aunque en el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ las integrales no existen por separado, cuando se considera la suma el resultado converge, por lo que podemos calcular el Valor Principal de Cauchy para esta integral.

Sin embargo, habrá integrales para las cuales no podamos calcular esta suma, de tal manera que el Valor Principal no existirá debido a la inexistencia del límite requerido por la definición.

Ejercicios sugeridos.

Secciones 5a y 5b:

1.- En cada caso, escriba la parte principal de la función en su punto singular aislado y determine si se trata de un polo, un punto singular removible, o un punto singular esencial.

(a) $f(z) = ze^{\left(\frac{1}{z}\right)}$;

(b) $f(z) = \frac{z^2}{1+z}$;

(c) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$;

(d) $f(z) = \frac{\cos z}{z}$;

(e) $f(z) = \frac{1}{(2-z)^3}$.

2.- Muestre que el punto singular de cada una de las siguientes funciones es un polo. Determine el orden m del polo y calcule el correspondiente residuo B .

(a) $f(z) = \frac{1 - \cosh z}{z^3}$;

(b) $f(z) = \frac{1 - e^{2z}}{z^4}$;

(c) $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$.

RESPUESTA: (a) $m = 1, B = -1/2$; (b) $m = 3, B = -4/3$; (c) $m = 2, B = 2e^2$.

3.- Suponga que una función f es analítica en un punto z_0 , y escriba $g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)}$. Muestre que

(a) si $f(z_0) \neq 0$, entonces z_0 es un polo simple de g , con residuo $f(z_0)$;

(b) si $f(z_0) = 0$, entonces z_0 es un punto singular removible de g .

Sugerencia: Como se estableció anteriormente, debido a que f es analítica en z_0 , existe una serie de Taylor para $f(z)$ alrededor de z_0 . Empiece cada inciso escribiendo unos pocos términos de dicha serie.

Secciones 5c y 5d:

4.- Encuentre el residuo en $z_0 = 0$ de la función

(a) $f(z) = \frac{1}{z+z^2}$;

(b) $f(z) = z \cos\left(\frac{1}{z}\right)$;

(c) $f(z) = \frac{z - \sin z}{z}$;

(d) $f(z) = \frac{\cot z}{z^4}$;

(e) $f(z) = \frac{\sinh z}{z^4(1-z^2)}$.

RESPUESTA: (a) 1; (b) $-1/2$; (c) 0; (d) $-1/45$; (e) $7/6$.

5.- Sea C la circunferencia $|z| = 1$, recorrida en dirección contrarreloj. Siga los pasos indicados para demostrar que

$$\int_C e^{\left(z+\frac{1}{z}\right)} dz = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}$$

(a) Usando el desarrollo en serie de Maclaurin para e^z y la propiedad que justifica la integración término a término para una serie, escriba la integral anterior como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_C z^n e^{\left(\frac{1}{z}\right)} dz$$

(b) Aplique el teorema de los residuos para evaluar las integrales que aparecen en la parte (a) para llegar al resultado deseado.

Sección 5e:

6.- En cada caso, demuestre que los puntos singulares son polos. Determine el orden m de cada polo, y encuentre el residuo correspondiente B .

(a) $f(z) = \frac{z^2+2}{z-1}$;

(b) $f(z) = \left(\frac{z}{2z+1}\right)^3$;

(c) $f(z) = \frac{e^z}{z^2+\pi^2}$.

RESPUESTA: (a) $m = 1, B = 3$; (b) $m = 3, B = -3/16$; (c) $m = 1, B = \pm i/2\pi$.

7.- Halle el valor de la integral

$$\int_C \frac{3z^3 + 2}{(z-1)(z^2+9)} dz$$

en sentido contrarreloj a lo largo de la circunferencia (a) $|z-2| = 2$; (b) $|z| = 4$.

RESPUESTA: (a) πi ; (b) $6\pi i$.

8.- Halle el valor de la integral

$$\int_C \frac{dz}{z^3(z+4)}$$

en sentido contrarreloj a lo largo de la circunferencia (a) $|z| = 2$; (b) $|z+2| = 3$.

9.- Evalúe la integral

$$\int_C \frac{\cosh \pi z dz}{z(z^2+1)}$$

considerando que C es la circunferencia $|z| = 2$ recorrida en sentido positivo.

RESPUESTA: $4\pi i$.

10.- Use el teorema (5.8) de la Sección 5e, para evaluar la integral de $f(z)$ a lo largo de la circunferencia $|z| = 3$ orientada positivamente, cuando

(a) $f(z) = \frac{(3z+2)^2}{z(z-1)(2z+5)}$;

(b) $f(z) = \frac{z^3(1-3z)}{(1+z)(1+2z^4)}$;

(c) $f(z) = \frac{z^3 e^{1/z}}{1+z^3}$.

RESPUESTA: (a) $9\pi i$; (b) $-3\pi i$; (c) $2\pi i$.

11.- Evalúe la integral

$$\int_C \frac{2z^2 + 5}{(z + 2)^3(z^2 + 4)z^2} dz$$

donde C es (a) la circunferencia $|z - 2i| = 6$, y (b) el cuadrado con vértices en $1 + i$, $2 + i$, $2 + 2i$ y $1 + 2i$. En ambos casos considere que los contornos se recorren en sentido contrarreloj.

Sección 5f:

12.- Encuentre los ceros y polos de

$$f(z) = \frac{z^2 + 4}{z^3 + 2z^2 + 2z}$$

y determine los residuos en cada uno de los polos.

RESPUESTA: Ceros: $z = \pm 2i$. Polos y residuos: En $z = 0$ es 2; en $z = -1 + i$ es $-\frac{1}{2}(1 - 3i)$; en $z = -1 - i$ es $-\frac{1}{2}(1 + 3i)$.

13.- Considerando que C denota la circunferencia $|z| = 2$ orientada positivamente, evalúe la integral

(a) $\int_C \tan z \, dz$;

(b) $\int_C \frac{dz}{\sinh 2z}$.

RESPUESTA: (a) $-4\pi i$; (b) $-\pi i$.

14.- Usando los primeros términos del desarrollo de $\csc z$ (válido para $0 < |z| < \pi$)

$$\csc z = \frac{1}{z} + \frac{1}{3!}z + \left[\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!} \right] z^3 + \dots$$

y considerando el contorno C_N como la frontera del cuadrado cuyas caras están formadas por las líneas

$$x = \pm \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi \quad \text{y} \quad y = \pm \left(N + \frac{1}{2}\right)\pi$$

donde N es un entero positivo, muestre que

$$\int_{C_N} \frac{dz}{z^2 \sin z} = 2\pi i \left[\frac{1}{6} + 2 \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^2 \pi^2} \right]$$

Sección 5g:

15.- Use residuos para evaluar las integrales impropias de los ejercicios siguientes.

(a) $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

(b) $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2}$.

RESPUESTA. (a) $\pi/6$; (b) $\pi/200$.

16.- Use residuos para encontrar los valores principales de Cauchy de las integrales en los ejercicios siguientes.

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}$.

RESPUESTA. (b) $-\pi/5$.

17.- Use residuos para evaluar las integrales impropias en los siguientes ejercicios.

(a) $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+1} dx$ con $a > 0$.

(b) $\int_0^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2+3} dx$.

RESPUESTA. (a) $\frac{\pi}{2} e^{-a}$; (b) $\frac{\pi}{2} e^{-2\sqrt{3}}$.

18.- Pruebe que

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

19.- Pruebe que si $m > 0$,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi e^{-m}(1+m)}{4}$$

20.- (a) Encuentre el residuo de $\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^5}$ en $z = i$. (b) Evalúe la integral $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^5} dx$.

6.- Series de Fourier de funciones periódicas

- a) Introducción.
- b) Condiciones de Dirichlet.
- c) Desarrollo en Series de Fourier.
- d) Coeficientes de Fourier.
- e) Algunas consideraciones de simetría.
- f) Funciones discontinuas. Fenómeno de Gibbs.
- g) Expansión de Fourier de medio rango.
- h) Series de Fourier para funciones complejas.

a).- Introducción.

En cursos previos de Matemáticas se ha visto que dos vectores \vec{a} y \vec{b} (distintos de cero) son ortogonales, cuando su producto interno $\vec{a} \cdot \vec{b}$ es cero; en una generalización de este concepto, es muy común hacer una analogía en el caso de funciones definidas en un cierto dominio, y decir que dos funciones distintas son ortogonales cuando su producto interno es cero.

Funciones ortogonales

Definición. Se dice que un conjunto de funciones $\{\phi_k(t)\}$ es ortogonal en el intervalo $a < t < b$ si dos funciones cualesquiera $\phi_m(t)$ y $\phi_n(t)$ de dicho conjunto cumplen que

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_a^b \phi_m(t) \cdot \phi_n(t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ A_n & m = n \end{cases}$$

Cualquier conjunto de ortogonal de funciones diferentes de cero $\{\phi_k(t)\}$ se puede normalizar, es decir transformarlo en un conjunto ortonormal dividiendo cada función entre su norma.

Desarrollo en series ortogonales

Suponga que $\{\phi_k(t)\}$ es un conjunto infinito de funciones ortogonales en el intervalo $a < t < b$. La pregunta es: Si $y = f(t)$ es una función definida en el intervalo $[a, b]$, ¿será posible determinar un conjunto de coeficientes c_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, para el que podamos escribir a la función $f(t)$ como

$$f(t) = c_0\phi_0 + c_1\phi_1 + \dots + c_n\phi_n + \dots?$$

La respuesta es **sí se puede**, y para ello, debemos multiplicar el desarrollo anterior para $f(t)$ por la función $\phi_m(t)$ e integrar en el intervalo $[a, b]$ para obtener

$$\int_a^b f(t)\phi_m(t)dt = \int_a^b c_0\phi_0(t)\phi_m(t)dt + \int_a^b c_1\phi_1(t)\phi_m(t)dt + \dots + \int_a^b c_n\phi_n(t)\phi_m(t)dt + \dots$$

Sin embargo, debido a la propiedad de ortogonalidad, las integrales del lado derecho son cero, excepto cuando $m = n$, así que la expresión anterior se reduce a

$$\int_a^b f(t)\phi_n(t)dt = c_n \int_a^b \phi_n(t)\phi_n(t)dt$$

de donde podemos despejar los coeficientes c_n del desarrollo propuesto para $f(t)$.

Con el resultado anterior, podemos escribir el desarrollo de $f(t)$ como

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(t)$$

donde

$$c_n = \frac{\int_a^b f(t)\phi_n(t)dt}{\|\phi_n(t)\|^2}$$

Si el conjunto de funciones $\phi_n(t)$ es *ortonormal*, entonces el denominador en la última expresión es igual a 1, y el cálculo del coeficiente c_n del desarrollo de $f(t)$ se reduce a

$$c_n = \int_a^b f(t)\phi_n(t)dt .$$

En particular, las funciones periódicas (como el seno y el coseno) de frecuencias distintas, pero múltiplos de una frecuencia fundamental, son ortogonales y forman un conjunto completo, por lo que son una buena opción para realizar un desarrollo de la forma descrita líneas arriba.

En lo que sigue analizaremos los desarrollos para una función $f(t)$ en términos de una suma de senos y cosenos.

Tal representación se llama *serie de Fourier* y, a diferencia de la serie de Taylor, puede describir funciones que no son completamente continuas o diferenciables. Además, son fáciles de diferenciar e integrar, sus módulos son fáciles de evaluar y cada término incluye solamente una frecuencia característica.

Este último punto es importante porque, como se verá más adelante, la serie de Fourier se utiliza a menudo para representar la respuesta de un sistema a una entrada periódica, y esta respuesta a menudo depende directamente de la frecuencia de entrada.

Las series de Fourier se utilizan en una amplia variedad de situaciones físicas, por ejemplo, las vibraciones de una cuerda finita, la dispersión de la luz por una rejilla de difracción, la transmisión de una señal de entrada a través de un circuito electrónico, etc.

b).- Condiciones de Dirichlet.

En párrafos anteriores se ha mencionado que las series de Fourier pueden usarse para representar una función para la cual no es posible un desarrollo de Taylor.

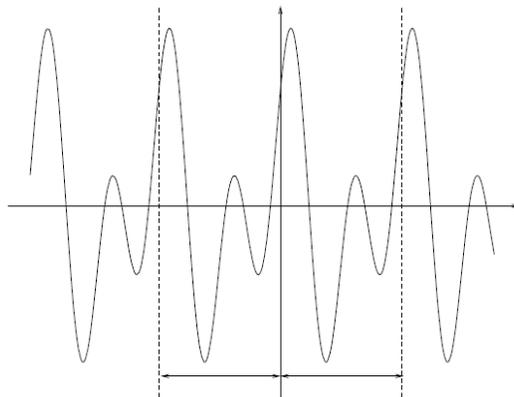
Las condiciones particulares que debe reunir una función $f(t)$, a fin de que pueda representarse mediante una serie de Fourier, se conocen como *condiciones de Dirichlet* y son las siguientes:

- i. La función $f(t)$ debe ser periódica;
- ii. La función debe ser monovaluada y continua, excepto (posiblemente) en un número finito de discontinuidades finitas;
- iii. La función debe tener solamente un número finito de máximos y mínimos dentro de un periodo T ; y
- iv. La integral de $|f(t)|$ sobre un periodo T , debe converger.

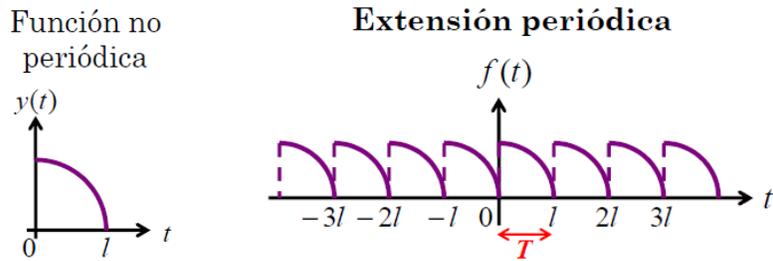
Si se satisfacen las condiciones anteriores entonces la serie de Fourier correspondiente converge a $f(t)$ en todos los puntos en que $f(t)$ es continua.

Vale la pena mencionar que cuando tenemos situaciones físicas (reales), las tres últimas condiciones de Dirichlet casi siempre se cumplen, no así la primera de ellas, ya que no todas las funciones son periódicas. Sin embargo, en muchas situaciones es posible representar una función no periódica como una serie de Fourier mediante la manipulación de la función para transformarla en una forma periódica, lo cual veremos más adelante.

En la siguiente figura se muestra un ejemplo de función que puede representarse como una serie de Fourier sin necesidad de modificarla, toda vez que presenta una periodicidad evidente.



Por otro lado, si consideramos la figura que se muestra a continuación, vemos que la función representada del lado izquierdo no presenta periodicidad, sin embargo se le puede introducir una periodicidad, logrando una extensión periódica de la función, que se muestra en el lado derecho.

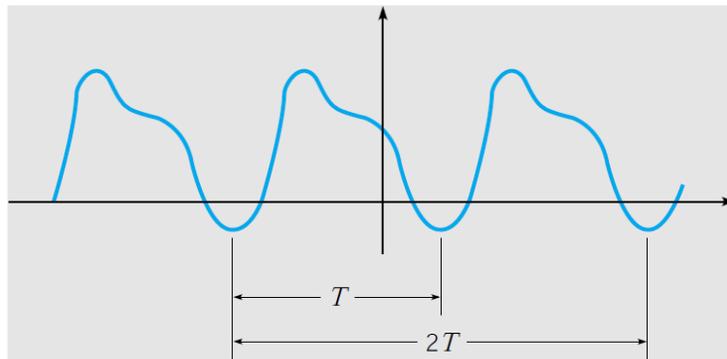


El procedimiento que seguiremos en tales casos se discutirá más adelante.

Resumiendo.

Se dice que una función $f(t)$ es periódica, con periodo T , si

- el dominio de $f(t)$ contiene tanto a t como a $t + T$; y
- $f(t+T) = f(t)$



Aunque $2T$ también satisface las condiciones anteriores, el valor mínimo de T será el que usaremos en lo que sigue.

c).- Desarrollo en Series de Fourier.

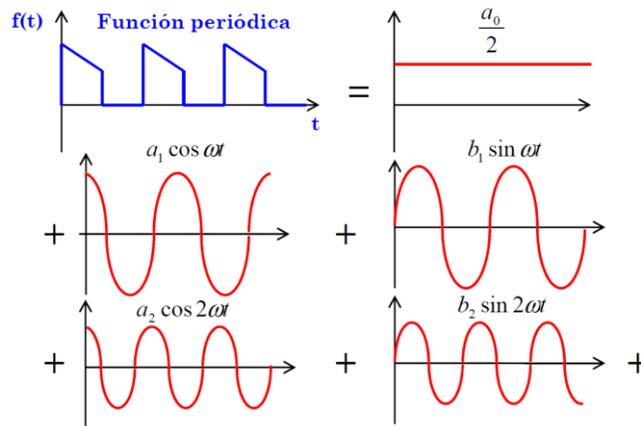
Definición. Una serie de Fourier es una expansión de una función periódica $f(t)$, con periodo T , en términos de una suma infinita de senos y cosenos que toma la forma

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

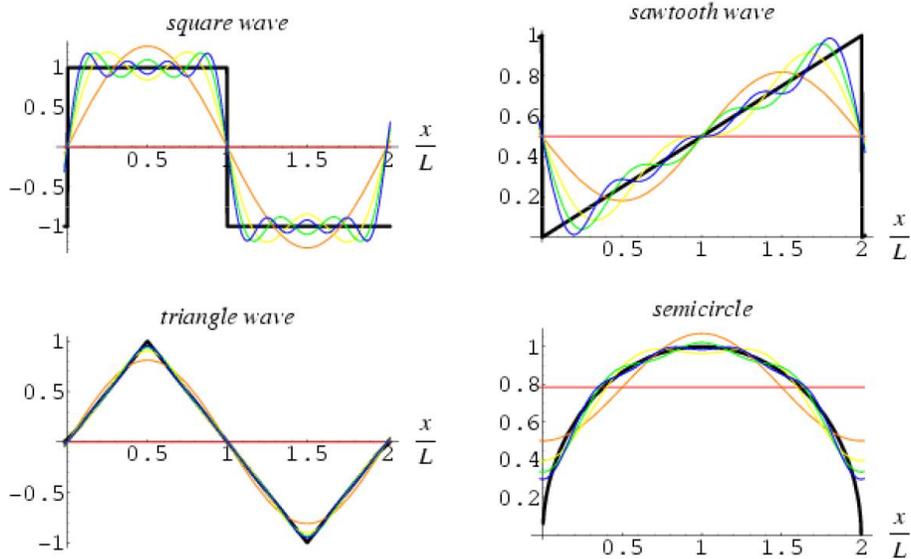
En otras palabras, cualquier función periódica se puede reescribir como una suma de funciones armónicas multiplicadas por constantes a determinar: a_n y b_n .

En el desarrollo anterior, se considera que la función $f(t)$ tiene una periodicidad definida; sin embargo, más adelante veremos que aunque la función no sea periódica podremos hacer un análisis de Fourier mediante la *transformada integral de Fourier*.

Un ejemplo gráfico.



Otros ejemplos.



d).- Coeficientes de Fourier.

Considerando el desarrollo en términos de funciones ortogonales, podemos encontrar los coeficientes del desarrollo de Fourier para la función $f(t)$ dada por

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (6.1)$$

Vale la pena mencionar que en esta expresión se ha separado el término cuando $n = 0$, de la definición de Serie de Fourier dada en la sección anterior, y ahora la sumatoria empieza en $n = 1$.

El término $\frac{a_0}{2}$ corresponde al valor promedio de la función $f(t)$ en el periodo T , como veremos a continuación.

Si multiplicamos la expresión (6.1) por $(\cos n\omega t)$ e integramos de 0 a T encontramos que

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

mientras que para $n = 0$, se tiene

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt$$

Por otro lado, multiplicando la expresión (6.1) pero ahora por $(\sin n\omega t)$, e integrando de 0 a T , encontramos que

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Desarrollo en Serie de Fourier

Definición. Sea $f(t)$ una función convergente en el intervalo $0 \leq t \leq T$, el desarrollo en serie de Fourier para $f(t)$ existe y está dado por

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

donde los coeficiente del desarrollo a_n y b_n están dados por

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$; mientras que a_0 está dado por

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt$$

A la cantidad ω que aparece en las expresiones anteriores se le conoce como **frecuencia fundamental** y está dada por

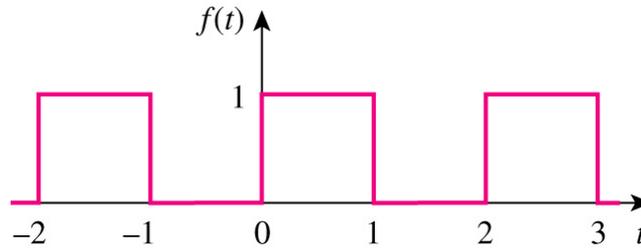
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

donde T es el periodo de la función $f(t)$.

El cálculo y estudio de las series de Fourier se conoce como **análisis armónico** (o análisis de Fourier) y es extremadamente útil al estudiar funciones periódicas arbitrarias y hacer un análisis de la misma en términos de su contenido frecuencial o espectro, ω_n .

Un ejemplo.

Determina la representación en series de Fourier de la siguiente función $f(t)$.



Solución.

Primero determinemos el periodo T , y escribamos la expresión matemática de la función $f(t)$, resultando que

$$T = 2$$

y

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

A continuación calculemos los coeficientes del desarrollo de Fourier

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{2} \int_0^2 f(t) dt = \int_0^1 1 dt + \int_1^2 0 dt = 1 - 0 = 1$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^2 f(t) \cos n\omega t dt \\ &= \int_0^1 1 \cos n\pi t dt + \int_1^2 0 dt = \left[\frac{\sin n\pi t}{n\pi} \right]_0^1 = \frac{\sin n\pi}{n\pi} \end{aligned}$$

como estamos considerando que n es un entero, este último resultado se anulará, por lo que

$$a_n = 0$$

Por otro lado, el coeficiente b_n está dado por

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_0^2 f(t) \sin n\omega t dt \\ &= \int_0^1 1 \sin n\pi t dt + \int_1^2 0 dt = \left[-\frac{\cos n\pi t}{n\pi} \right]_0^1 = \frac{1 - \cos n\pi}{n\pi} \end{aligned}$$

de nuevo, como n es un entero, podemos advertir que

$$\cos n\pi = (-1)^n$$

con lo que

$$b_n = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi}$$

Finalmente, la serie de Fourier resulta ser

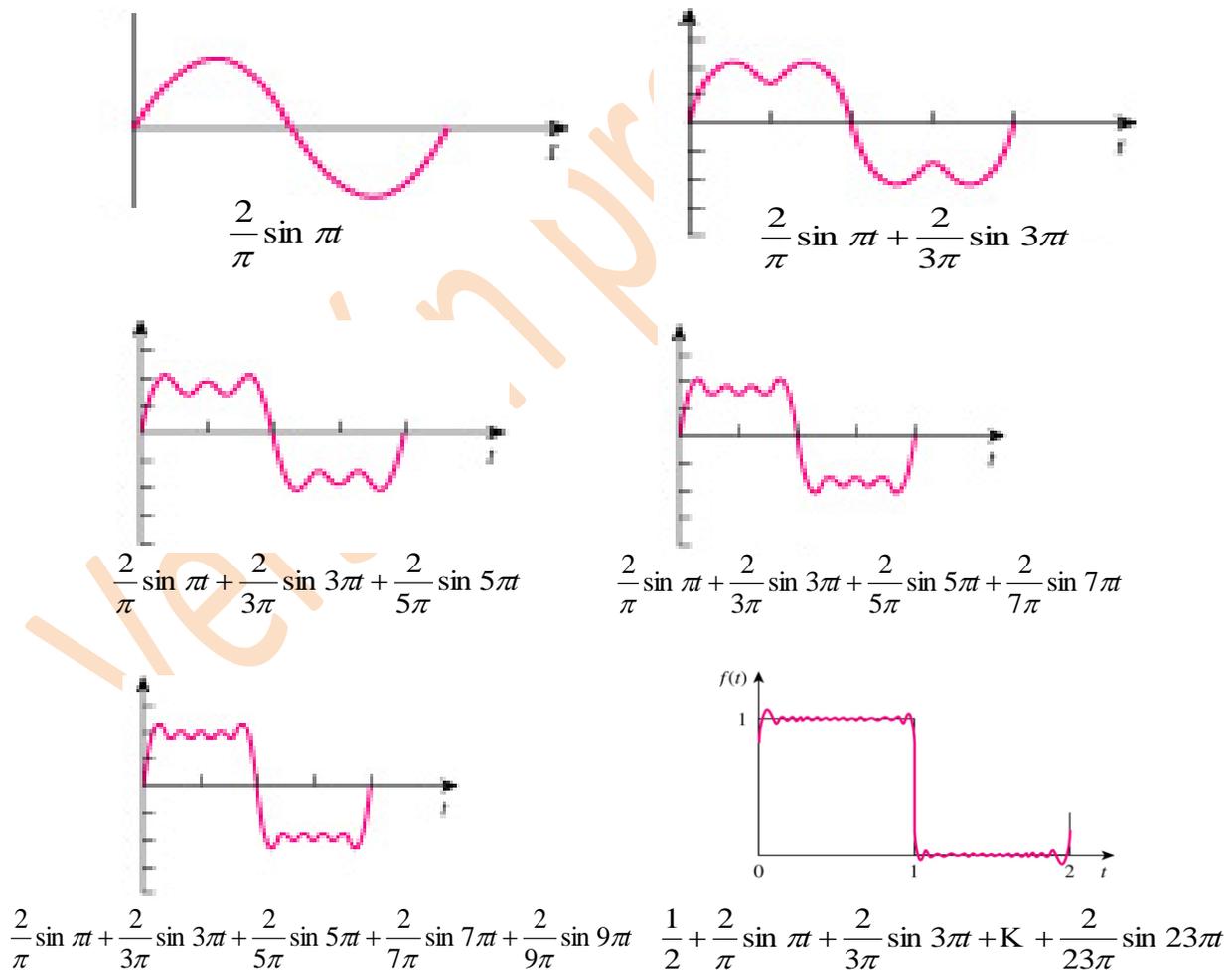
$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \right] \sin n\pi t$$

que desarrollando los primeros términos se escribe como

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin \pi t + \frac{2}{3\pi} \sin 3\pi t + \frac{2}{5\pi} \sin 5\pi t + \dots$$

Es importante mencionar que la serie obtenida anteriormente, en principio, es una serie infinita; sin embargo, en muchas situaciones será suficiente considerar un número finito de términos para obtener la aproximación deseada, toda vez que conforme sumamos términos el resultado va convergiendo a la función original $f(t)$.

Lo que puede apreciarse mejor en la siguiente secuencia de imágenes correspondientes a la serie de Fourier recién construida.



Antes de continuar vale la pena escribir las siguientes identidades que pueden resultar útiles en el análisis de Fourier

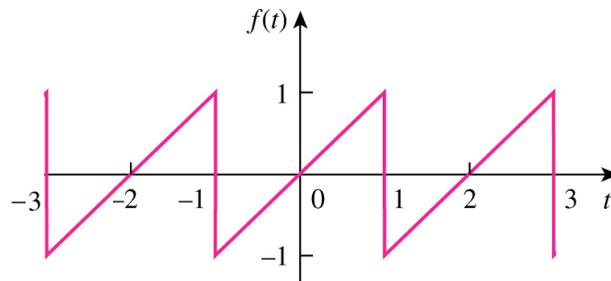
$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x & \cos(-x) &= \cos x \\ \sin n\pi &= 0 & \cos n\pi &= (-1)^n \\ \sin 2n\pi &= 0 & \cos 2n\pi &= 1 \end{aligned}$$

Otro ejemplo.

Dada $f(t) = t$ definida en el intervalo $[-1,1]$ y con periodo $T = 2$, bosqueje la gráfica entre $t = -3$ y $t = 3$ y calcule los coeficientes de la serie de Fourier correspondiente.

Solución.

La gráfica de la función tiene la forma



Así que

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

A continuación, calculamos los coeficientes de la serie de Fourier empezando con a_0

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^1 f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-1}^1 f(t) dt \\ &= \frac{2}{2} \int_{-1}^1 t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{1-1}{2} = 0 \end{aligned}$$

Mientras que los coeficientes a_n están definidos por

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-1}^1 f(t) \cos n\omega t dt = \int_{-1}^1 t \cos n\pi t dt$$

para calcular esta integral, usamos el método de integración por partes,

$$\begin{aligned} a_n &= \left[\frac{t \sin n\pi t}{n\pi} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{\sin n\pi t}{n\pi} dt \\ a_n &= \frac{\sin n\pi - [-\sin(-n\pi)]}{n\pi} + \left[\frac{\cos n\pi t}{n^2 \pi^2} \right]_{-1}^1 \end{aligned}$$

$$a_n = 0 + \frac{\cos n\pi - \cos(-n\pi)}{n^2 \pi^2} = 0$$

Para terminar, calculemos el coeficiente b_n

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-1}^1 f(t) \sin n\omega t dt = \int_{-1}^1 t \sin n\pi t dt$$

es decir

$$\begin{aligned} b_n &= \left[-\frac{t \cos n\pi t}{n\pi} \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{\cos n\pi t}{n\pi} dt \\ &= \frac{-\cos n\pi + [-\cos(-n\pi)]}{n\pi} + \left[\frac{\sin n\pi t}{n^2 \pi^2} \right]_{-1}^1 \\ &= -\frac{2 \cos n\pi}{n\pi} + \frac{\sin n\pi - \sin(-n\pi)}{n^2 \pi^2} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \\ &= -\frac{2 \cos n\pi}{n\pi} = -\frac{2(-1)^n}{n\pi} \end{aligned}$$

Con lo anterior, para la función $f(t) = t$ definida en el intervalo $[-1,1]$ y con periodo $T = 2$, la serie de Fourier resulta ser

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin n\pi t$$

o expandida en sus primeros términos

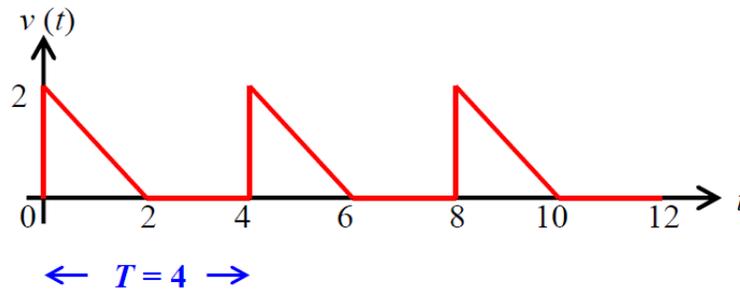
$$f(t) = \frac{2}{\pi} \sin \pi t - \frac{2}{2\pi} \sin 2\pi t + \frac{2}{3\pi} \sin 3\pi t - \dots$$

Un ejercicio.

Dada $v(t) = 2 - t$ en el intervalo $[0,2]$, $v(t) = 0$ en el intervalo $[2,4]$ y con periodo $T = 4$, (a) bosqueje la gráfica entre $t = 0$ y $t = 12$; y (b) calcule los coeficientes de la serie de Fourier correspondiente.

Solución.

(a) La gráfica es



(b) Los coeficientes son

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^4 v(t) dt = \frac{2}{4} (2) = 1$$

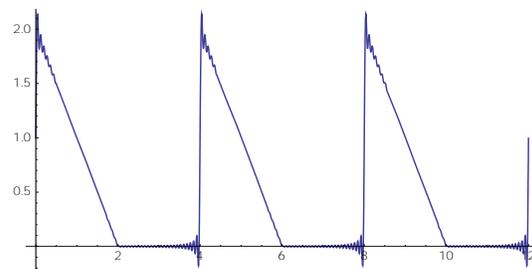
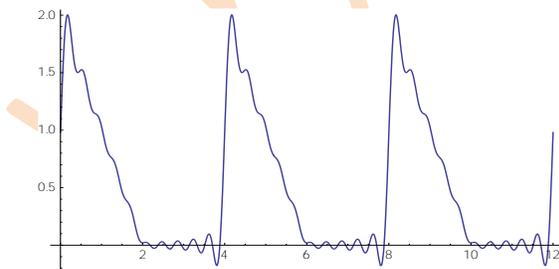
$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^4 v(t) \cos n\omega t dt = \frac{2[1 - (-1)^n]}{n^2 \pi^2}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^4 v(t) \sin n\omega t dt = \frac{2}{n\pi}$$

Así que la serie resulta

$$v(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2[1 - (-1)^n]}{n^2 \pi^2} \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right) + \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right) \right\}$$

Cuya gráfica, considerando los primeros 10 y 50 términos, es



e).- Algunas consideraciones de simetría.

En muchas ocasiones, la paridad de la función $f(t)$ permite simplificar el cálculo de su serie de Fourier, para ello vale la pena identificar el tipo de simetría que presenta dicha función y obviar el cálculo de los coeficientes a_0 y a_n , o los coeficientes b_n , según sea la paridad mostrada por $f(t)$.

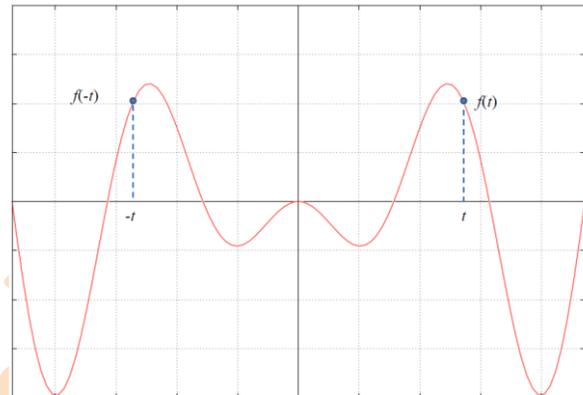
Función par

Una función $f(t)$ es par si su gráfica es simétrica respecto al eje vertical, tal como se muestra en la figura.

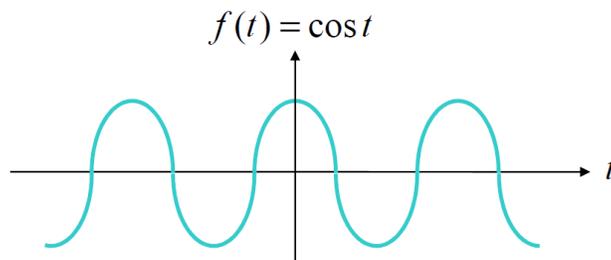
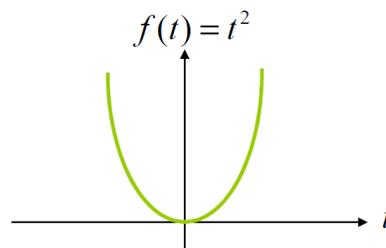
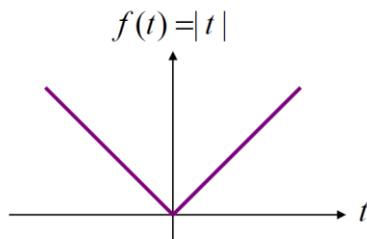
En este caso se cumple que

$$f(-t) = f(t)$$

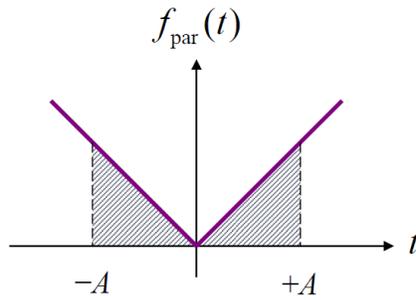
para todo valor de t en el dominio de definición.



Algunos ejemplos de funciones pares son los siguientes



Evidentemente, la integral de una función par de $-A$ a $+A$



es el doble de la integral de 0 a +A, es decir

$$\int_{-A}^A f_{par}(t) dt = 2 \int_0^A f_{par}(t) dt$$

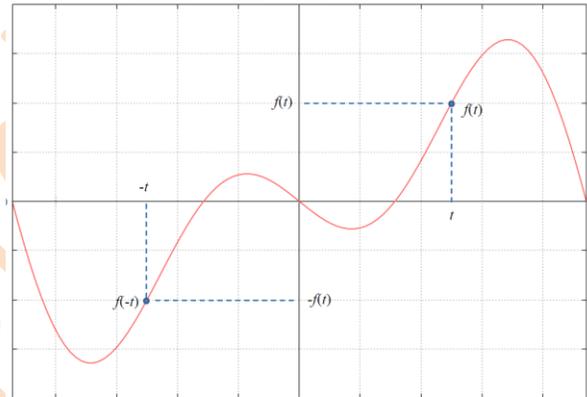
Función impar

Una función $f(t)$ es impar si su gráfica es antisimétrica respecto al eje vertical, tal como se muestra en la figura.

En este caso se cumple que

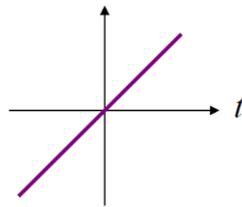
$$f(-t) = -f(t)$$

para todo valor de t en el dominio de definición.

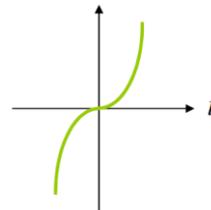


Algunos ejemplos de funciones impares son

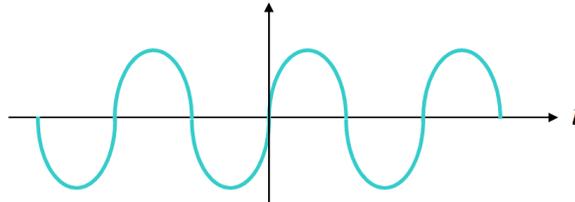
$$f(t) = t$$



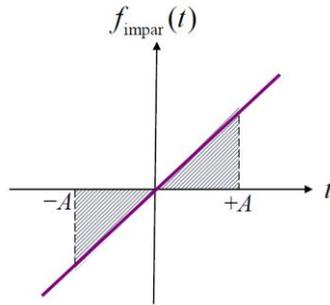
$$f(t) = t^3$$



$$f(t) = \sin t$$



Evidentemente, la integral de una función impar de $-A$ a $+A$



se anula, es decir

$$\int_{-A}^{+A} f_{\text{impar}}(t) dt = 0$$

Producto de funciones pares e impares.

De acuerdo a la clasificación presentada anteriormente, el producto de funciones satisface las siguientes propiedades:

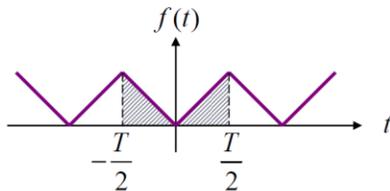
- (par) x (par) = par
- (impar) x (impar) = par
- (par) x (impar) = impar
- (impar) x (par) = impar

La simetría en los coeficientes de Fourier.

De las propiedades de las funciones pares e impares, se puede demostrar que

- para funciones pares:

$$a_0 = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt, \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega t dt \quad \text{y} \quad b_n = 0$$



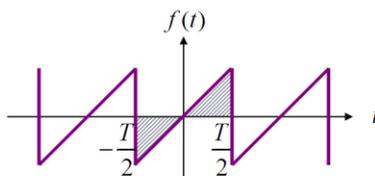
$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(t)}_{\text{(par)}} \times \underbrace{\cos n\omega t}_{\text{(par)}} dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega t dt \quad \left| \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(t)}_{\text{(par)}} \times \underbrace{\sin n\omega t}_{\text{(impar)}} dt = 0 \right.$$

||
||
(par)
(impar)

mientras que

- para funciones impares:

$$a_0 = a_n = 0 \quad \text{y} \quad b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega t dt$$



$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(t)}_{\text{(impar)}} dt = 0 \quad \left| \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(t)}_{\text{(impar)}} \times \underbrace{\sin n\omega t}_{\text{(impar)}} dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega t dt \right.$$

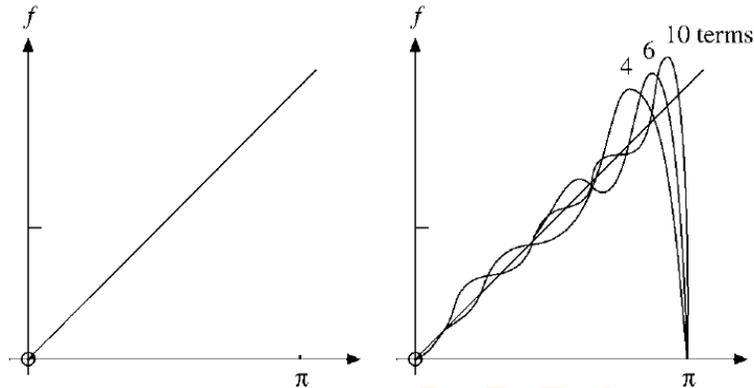
$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(t)}_{\text{(impar)}} \times \underbrace{\cos n\omega t}_{\text{(par)}} dt = 0 \quad \left| \quad \right.$$

||
||
(impar)
(par)

f).- Funciones discontinuas. Fenómeno de Gibbs.

La expansión en Serie de Fourier usualmente funciona de manera adecuada cuando tenemos funciones que son discontinuas en el intervalo requerido. Sin embargo, en estos casos la serie no produce una función discontinua, sino que “conecta” la función original en su discontinuidad.

Por ejemplo, para la función diente de sierra definida como $f(t) = at$ (con $a > 0$) y periodo π , que se muestra en la figura de la izquierda, y que presenta una discontinuidad en $t = \pi$, encontramos que el desarrollo en Serie de Fourier existe, tal como se muestra en la figura de la derecha, el cual se ha calculado para 4, 6 y 10 términos.



En este punto mencionaremos, sin probar, que el valor de la función en términos de la Serie de Fourier en la discontinuidad será el promedio de los valores que toma $f(t)$ en la discontinuidad.

Matemáticamente, podemos expresar que en el punto de discontinuidad t_d , la serie converge al valor dado por

$$f_{FOURIER}(t_d) = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [f(t_d + \varepsilon) + f(t_d - \varepsilon)]$$

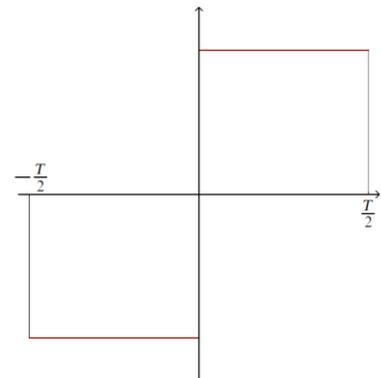
En la discontinuidad, la representación en series de Fourier de la función, $f_{FOURIER}(t)$ toma valores que rebasan los correspondientes a la función original $f(t)$.

Conforme se incluyen más términos en la representación en serie, los puntos con rebasamiento se acercan cada vez más a la discontinuidad, pero no desaparecen, incluso en el límite cuando se considera la serie completa. Este comportamiento se conoce como *fenómeno de Gibbs*.

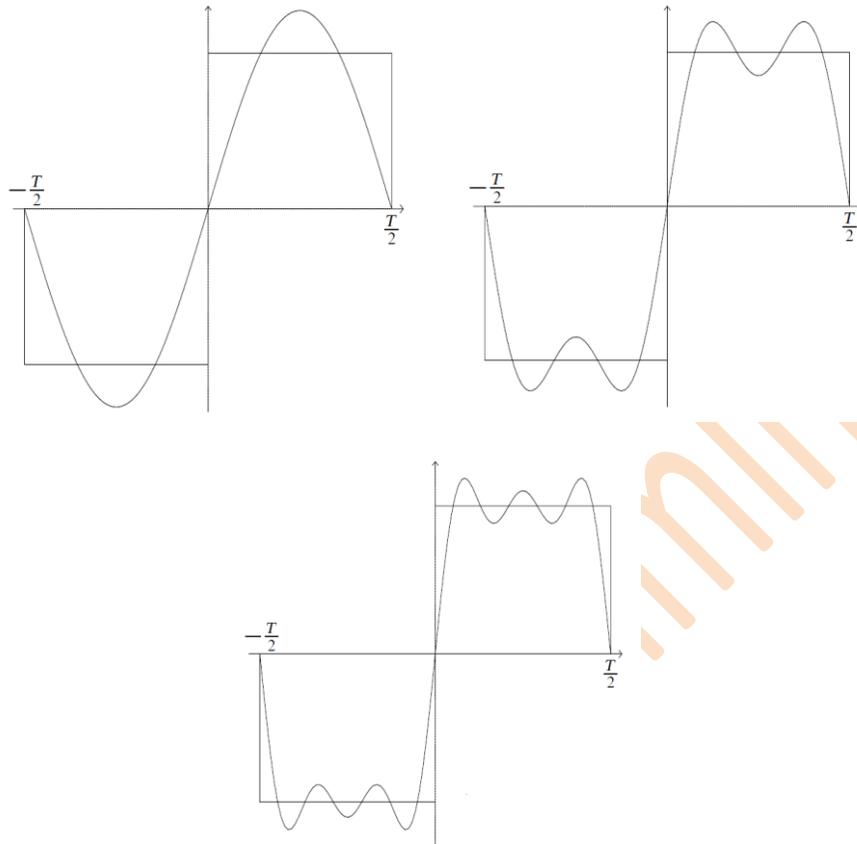
En las siguientes imágenes se muestra este fenómeno para el desarrollo en serie de Fourier de la función cuadrada, definida como

$$f(t) = \begin{cases} F_0 & \text{para } -\frac{T}{2} < t < 0 \\ -F_0 & \text{para } 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

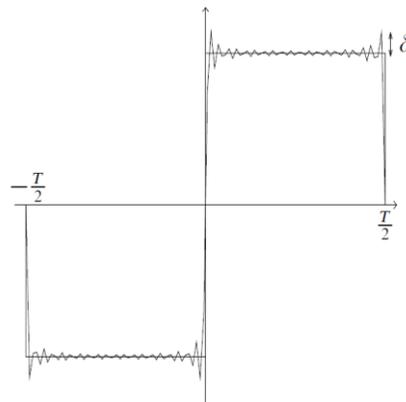
que evidentemente no es continua, tal como se aprecia en la gráfica.



En la esquina superior izquierda se muestra la serie de Fourier compuesta por un término, a la derecha se muestra la serie con dos términos, mientras que en la parte inferior la serie consta de tres términos.



Uno puede aumentar la cantidad de términos en la serie, con la idea de que el desarrollo se va a mejorar, pero esto no termina siendo cierto, al menos, no en la parte de la discontinuidad.



En esta última gráfica se muestra el desarrollo considerando 20 términos, así como el rebasamiento δ que podemos advertir no desaparece, sino sólo se hace más cercano a la discontinuidad.

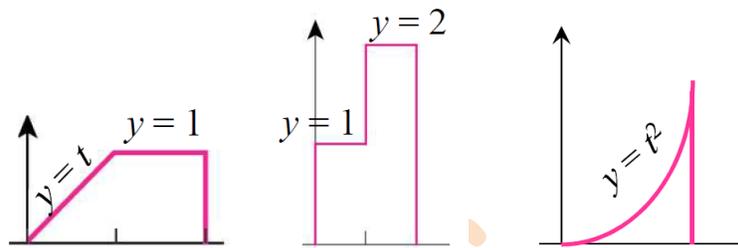
En este curso no se pretende una discusión completa de este fenómeno, pero vale la pena mencionar que el tamaño de rebasamiento δ es proporcional a la magnitud de la discontinuidad.

g).- Expansión de Fourier de medio rango.

Hasta este punto hemos considerado funciones periódicas, por lo que aplicar la teoría de Fourier para hacer un desarrollo en series de senos y cosenos ha sido directo.

Sin embargo, en muchas situaciones físicas lo que se tienen son funciones no periódicas, pero esto no debe representar mayor problema ya que (casi) siempre se pueden definir sobre un intervalo dado, considerando que en una observación o medición sobre un sistema física el tiempo involucrado es finito.

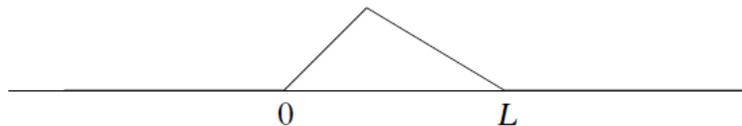
Algunos ejemplos de funciones no periódicas se muestran en las figuras siguientes, las cuales son distintas de cero en un intervalo finito.



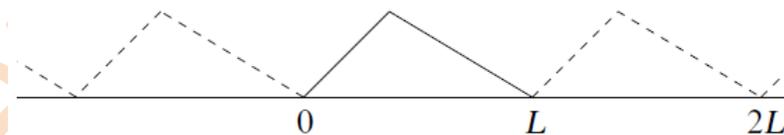
Por lo anterior, resulta muy útil extender la función no periódica en una función periódica antes de calcular su representación en serie de Fourier.

La serie de Fourier de esta función periódica representaría entonces correctamente a la función no periódica en el intervalo deseado.

Por ejemplo, si consideramos una función no periódica tal como la mostrada a continuación.

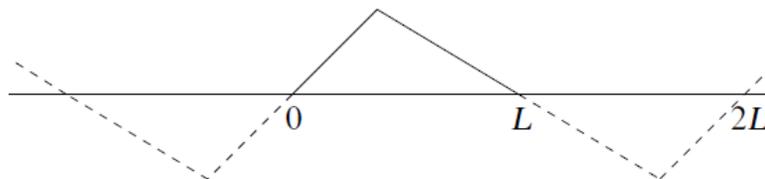


Podemos extenderla, simplemente repitiendo la función, tal como se muestra



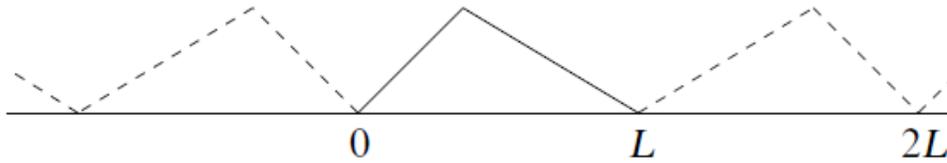
en cuyo caso no hay simetría respecto al eje y.

Otra opción puede ser



que como vemos presenta simetría impar, ya que $f(-t) = -f(t)$.

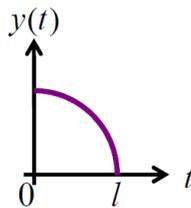
Hay otra opción de extensión, mostrada a continuación, que presenta simetría par, ya que $f(-t) = f(t)$.



Como pudimos ver en el ejemplo mostrado anteriormente, a menudo estamos en libertad de ampliar la función de varias maneras; sin embargo, normalmente es preferible usar alguna de las simetrías vistas anteriormente (par o impar) para la extensión periódica, en lugar de una extensión periódica normal; ya que el uso de una función con cierta simetría (par o impar) nos proporcionará coeficientes cero de cualquiera de los a_n o b_n de la expansión, lo que puede proporcionar una expansión más sencilla de la serie de Fourier correspondiente.

Otro ejemplo.

La función periódica mostrada a continuación



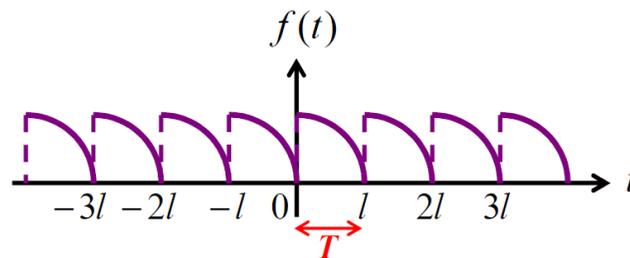
tiene las siguientes extensiones periódicas.

- Extensión periódica normal:

$$f(t) = y(t) \quad , \quad 0 < t < l$$

$$f(t+l) = f(t)$$

$$T = l$$

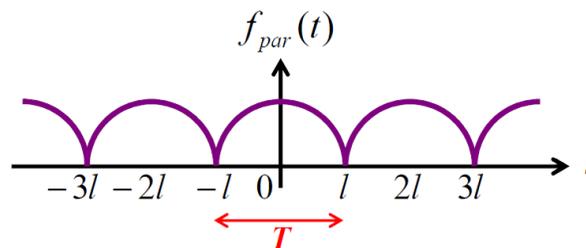


- Extensión periódica par:

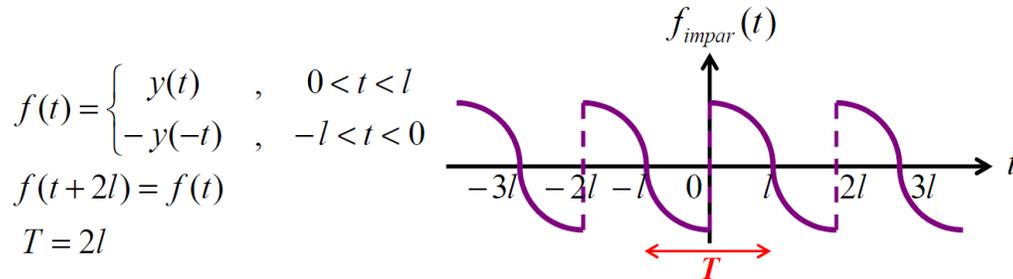
$$f(t) = \begin{cases} y(t) & , \quad 0 < t < l \\ y(-t) & , \quad -l < t < 0 \end{cases}$$

$$f(t+2l) = f(t)$$

$$T = 2l$$



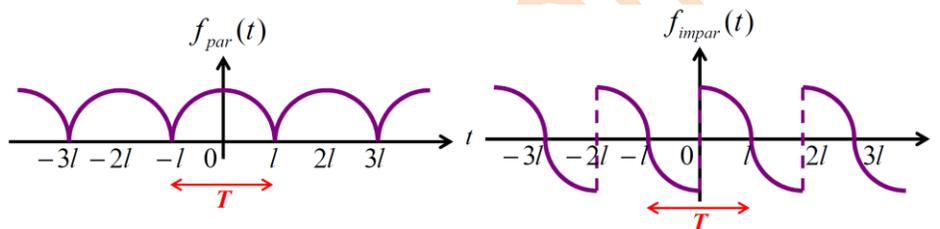
- Extensión periódica impar:



Como puede verse, para la misma función $f(t)$, las diferentes extensiones implican modificar el periodo, en el caso recién mostrado, un dominio inicialmente entre 0 y L , se mantiene sin cambios para una extensión normal, pero se duplicó para las extensiones par e impar.

Serie de Fourier de medio rango

Definición. La serie de Fourier de una extensión periódica par o impar de una función no periódica se le llama **serie de Fourier de medio rango**. Lo anterior se debe a que la función no periódica se considera equivalente a la mitad de la función expandida, ya sea mediante una función par, o una función impar.



Serie coseno de Fourier de medio rango

Definición. Si la función no periódica se extiende mediante una función par entonces los coeficientes b_n se anulan y, por lo tanto, el desarrollo de la función se reduce a

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t$$

que sólo contiene el desarrollo en términos de cosenos, por lo que se le conoce como *Serie coseno de Fourier de medio rango*.

Serie seno de Fourier de medio rango

Definición. Si la función no periódica se extiende mediante una función impar entonces los coeficientes a_n se anulan y, por lo tanto, el desarrollo de la función se reduce a

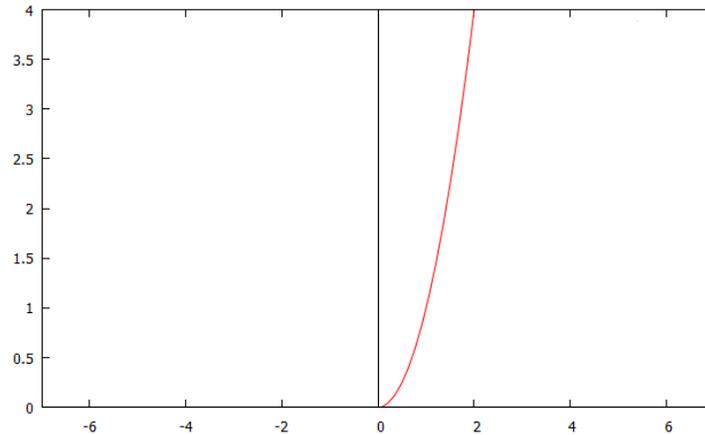
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

que sólo contiene el desarrollo en términos de senos, por lo que se le conoce como *Serie seno de Fourier de medio rango*.

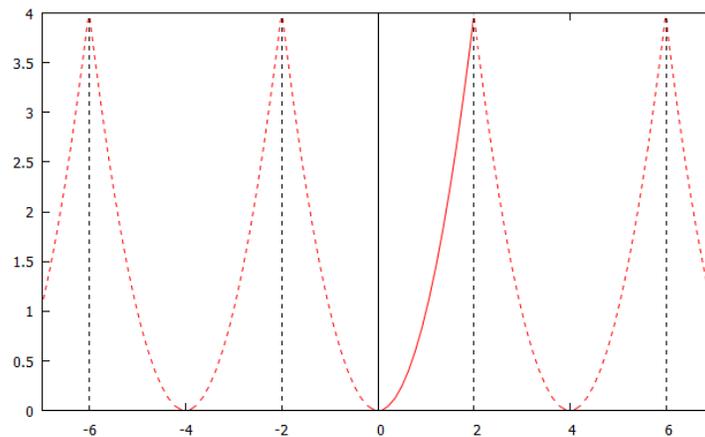
Un ejemplo.

Encuentre el desarrollo en series de Fourier para la función $f(t) = t^2$ para el intervalo $0 < t \leq 2$.

Solución. En este caso la función tiene la siguiente representación gráfica



Lo primero que tenemos que hacer es transformarla en una función periódica, así que en este caso consideraremos una expansión par, por lo que ahora tenemos una función tal como la mostrada a continuación



En este caso, hemos extendido el rango de interés de $0 < t \leq 2$, a $-2 < t \leq 2$, con lo que la función extendida satisface que

$$f(-t) = f(t)$$

además, el periodo de la función extendida es $T = 4$, tal que

$$f(t + 4k) = f(t)$$

donde k es un entero cualquiera.

Con lo anterior, la serie de Fourier que obtengamos debe representar a $f(t)$ en el intervalo $-2 < t \leq 2$, pero no afuera.

Como la extensión que realizamos es par, podemos aplicar las condiciones de simetría presentadas anteriormente, de tal manera que los coeficientes b_n serán cero y tendremos una serie coseno de Fourier de medio rango

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t$$

así que nuestra tarea será calcular los coeficientes a_0 y a_n , lo que haremos a continuación.

De la definición

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{4} \int_{-2}^2 t^2 dt \\ &= \frac{4}{4} \int_0^2 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^2 = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Mientras que

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \left(\frac{2\pi n t}{T} \right) dt$$

donde hemos usado la definición de la frecuencia fundamental ω .

Así que la integral a evaluar es

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{4} \int_{-2}^2 t^2 \cos \left(\frac{2\pi n t}{4} \right) dt = \frac{4}{4} \int_0^2 t^2 \cos \left(\frac{\pi n t}{2} \right) dt \\ &= \int_0^2 t^2 \cos \left(\frac{\pi n t}{2} \right) dt \end{aligned}$$

que podemos resolver usando integración por partes, para obtener sucesivamente,

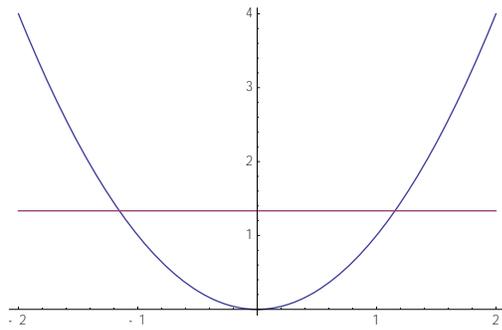
$$\begin{aligned} a_n &= \left[\frac{2}{n\pi} t^2 \sin \left(\frac{\pi n t}{2} \right) \right]_0^2 - \frac{4}{n\pi} \int_0^2 t \sin \left(\frac{\pi n t}{2} \right) dt \\ &= \frac{8}{n^2 \pi^2} \left[\frac{2}{n\pi} t^2 \sin \left(\frac{\pi n t}{2} \right) \right]_0^2 - \frac{8}{n^2 \pi^2} \int_0^2 \cos \left(\frac{\pi n t}{2} \right) dt \\ &= \frac{16}{n^2 \pi^2} \cos(\pi n) = \frac{16}{n^2 \pi^2} (-1)^n \end{aligned}$$

Con lo que la serie coseno de Fourier para $f(t) = t^2$ en el intervalo $-2 < t \leq 2$, se escribe como

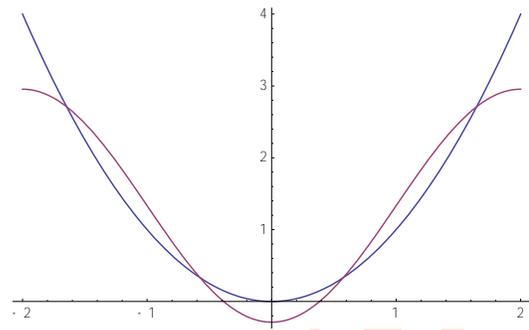
$$f(t) = \frac{4}{3} + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \pi^2} \cos \left(\frac{\pi n t}{2} \right)$$

Queda de tarea para el lector interesado, construir la serie seno de Fourier para esta función, mediante una extensión impar de $f(t)$.

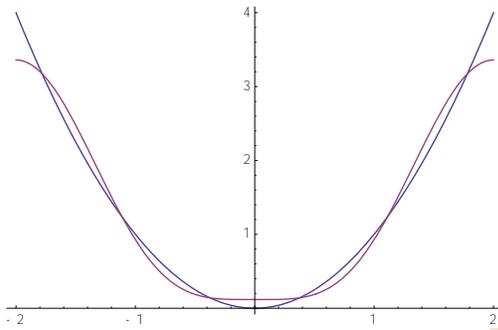
A continuación se muestran las gráficas correspondientes a la serie coseno de Fourier obtenida anteriormente, en la que se consideran series truncadas en el n -ésimo término, mostrado en cada figura.



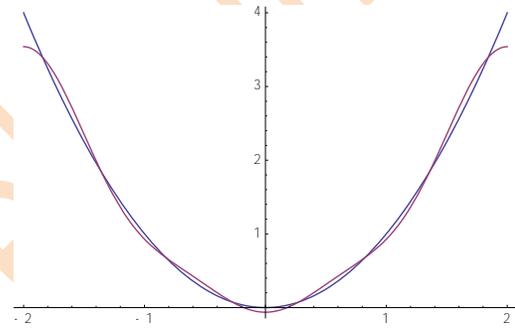
$n = 0$



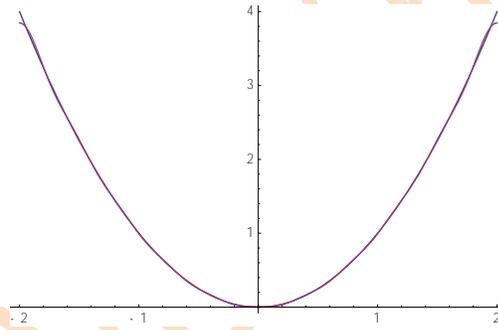
$n = 1$



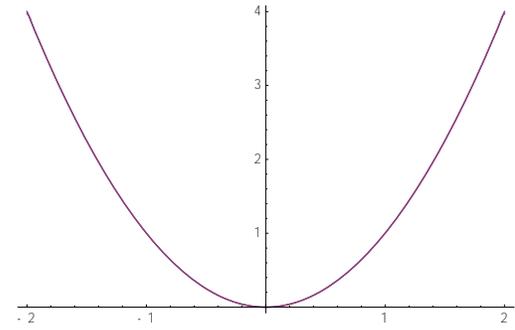
$n = 2$



$n = 3$



$n = 10$



$n = 50$

h).- Series de Fourier complejas.

Antes de concluir con este análisis de la teoría de Fourier para los desarrollos en series de Fourier reales, vamos a presentar la extensión a las series de Fourier complejas.

Dado que, en general, una expansión en series de Fourier contiene tanto senos como cosenos, se puede escribir esta expansión en una forma más compacta usando una exponencial compleja.

Esta simplificación toma en cuenta que $e^{inx} = \cos nx + i \operatorname{sen} nx$. Lo que permite escribir la expansión en series de Fourier compleja como

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(i \frac{2n\pi}{T} t\right)$$

donde los coeficientes de Fourier c_n (para $n \neq 0$) están dados por

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp\left(-i \frac{2n\pi}{T} t\right) dt$$

mientras que c_0 está dado por

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

Esta relación se puede derivar de manera similar a como se hizo la derivación de los coeficientes reales a_n y b_n ; sólo que en este caso, se debe multiplicar el desarrollo de $f(t)$ por

$$\exp\left(-i \frac{2m\pi}{T} t\right)$$

e integrar usando la relación de ortogonalidad

$$\int_0^T \exp\left(-i \frac{2m\pi}{T} t\right) \exp\left(i \frac{2n\pi}{T} t\right) dt = \begin{cases} T & \text{para } m = n \\ 0 & \text{para } m \neq n \end{cases}$$

Los coeficientes complejos c_n se relacionan con los coeficientes reales a_n y b_n mediante

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \end{aligned}$$

Si $f(t)$ es real entonces $c_{-n} = c_n^*$, donde el asterisco (*) significa complejo conjugado.

Un ejemplo.

Encuentre una serie de Fourier compleja para $f(t) = t^3$ en el intervalo $-3 < t < 3$.

Solución. En este caso debemos escribir una serie de la forma

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(i \frac{2n\pi}{T} t\right)$$

donde los coeficientes de Fourier c_n (para $n \neq 0$) estarán dados por

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp\left(-i \frac{2n\pi}{T} t\right) dt \\ &= \frac{1}{6} \int_{-3}^3 t^3 \exp\left(-i \frac{n\pi}{3} t\right) dt \end{aligned}$$

usando integración por partes, encontramos que los coeficientes son

$$c_n = \frac{1}{6} \int_{-3}^3 t^3 \exp\left(-i \frac{n\pi}{3} t\right) dt$$

$$c_n = \frac{1}{6} \left[i(-1)^n \frac{162(n^2\pi^2 - 6)}{n^3\pi^3} \right]$$

$$c_n = i(-1)^n \frac{27(n^2\pi^2 - 6)}{n^3\pi^3}$$

mientras que c_0 estará dado por

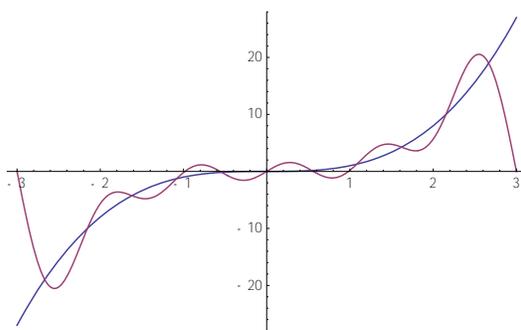
$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$= \frac{1}{6} \int_{-3}^3 t^3 dt = 0$$

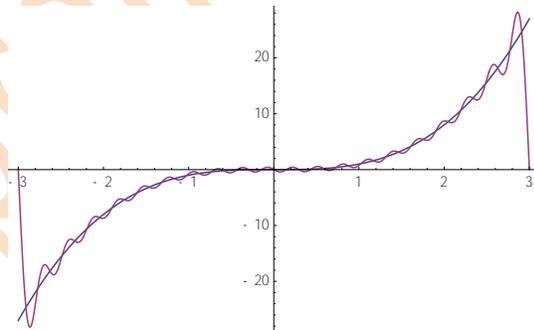
Por lo que la serie de Fourier compleja para $f(t) = t^3$ está dada por

$$f(t) = i \frac{27}{\pi^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{(n^2\pi^2 - 6)}{n^3} \exp\left(i \frac{n\pi}{3} t\right)$$

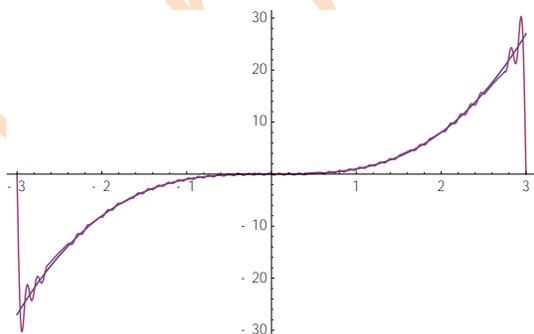
cuya gráfica, calculada considerando los valores de n indicados, junto con $f(t) = t^3$, se muestra a continuación.



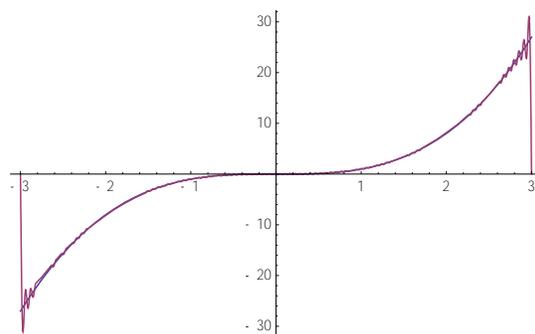
$-5 < n < 5$



$-20 < n < 20$



$-50 < n < 50$



$-100 < n < 100$

Ejercicios sugeridos.

1. En los siguientes problemas bosqueje la función, encuentre el periodo mínimo y construya el desarrollo en Series de Fourier que corresponda.

$$(a) f(t) = \begin{cases} 2t + 4 & -2 < t < 0 \\ 4 & 0 < t < 4 \end{cases}$$

$$(b) f(t) = |\operatorname{sen} 2t|, \text{ para } -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

- (c) $f(t) = H(t)$, para $-2 < t < 2$. En este caso, $H(t)$ representa a la función unitaria de Heaviside (llamada en ocasiones, función escalón).

$$(d) f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{x}{2} & 0 < x \leq \pi \\ -\operatorname{sen} \frac{x}{2} & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

$$(e) f(t) = \begin{cases} -x + e^x & -3 < t < 0 \\ x + e^{-x} & 0 < t < 3 \end{cases}$$

2. En algunos problemas es conveniente aproximar $\sin \pi t$ en el intervalo $[0,1]$ mediante una parábola $f(t) = at(1-t)$, donde a es una constante. Para tener una idea de la exactitud de esta aproximación,

- (a) Expanda la función $f(t) = 4t(1-t)$ en una serie de Fourier considerando

$$f(t) = \begin{cases} 4t(1+t) & -1 \leq t < 0 \\ 4t(1-t) & 0 < t < 1 \end{cases}$$

- (b) grafique, junto a la función $f(t) = \sin \pi t$, la expansión obtenida considerando 2, 4, 8 y 20 términos.

3. Una función diente de sierra se describe por

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(\pi+t) & -\pi \leq t < 0 \\ +\frac{1}{2}(\pi-t) & 0 < t \leq \pi \end{cases}$$

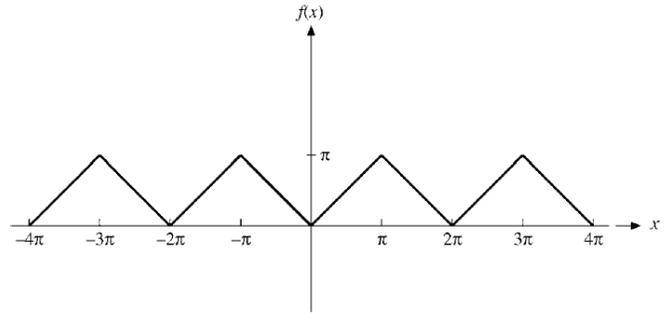
Muestre que

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}$$

4. La figura mostrada representa una onda triangular $f(x)$.

(a) Escribe la función analítica (por partes) que la describe en el intervalo de definición, es decir, la expresión para $f(x)$.

(b) Construya la expansión en Serie de Fourier para dicha función.



5. (a) Encuentre la representación en series de Fourier de

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t \leq 0 \\ t & 0 < t \leq \pi \end{cases}$$

(b) Usando la expansión de Fourier encontrada en el inciso (a), muestre que

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

6. Expanda la función $f(t)$ definida mediante

$$f(t) = \begin{cases} 2t & 0 < t \leq 2 \\ 8 - 2t & 2 < t \leq 4 \end{cases}$$

en (a) una serie seno de Fourier; y (b) una serie coseno de Fourier. (c) Analizando las gráficas obtenidas para cada una de las expansiones en serie de Fourier, ¿cuál de las dos representaciones anteriores converge más rápido a $f(t)$? Explique. (d) Construya la serie completa de Fourier para la función dada.

7. Grafique cada una de las siguientes funciones y encuentre sus correspondientes (a) serie de Fourier completa y (b) serie de Fourier de medio rango usando las propiedades de simetría que considere se pueden aplicar.

(a) $f(t) = \begin{cases} 2 & 0 < t \leq 2 \\ -2 & 2 < t \leq 4 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} -3 & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ 3 & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$

(c) $f(t) = \begin{cases} -x & -2 < x \leq 0 \\ x & 0 < x \leq 2 \end{cases}$

$$(d) f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \\ \pi - \frac{t}{2} & \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

$$(e) f(x) = \frac{x}{2} \quad 0 < x < 4$$

$$(f) f(t) = \begin{cases} 3t & 0 < t \leq 3 \\ 0 & -3 < t \leq 0 \end{cases}$$

$$(g) g(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leq \pi \\ 2\pi - x & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

8. Encuentre y grafique la serie de Fourier compleja para la función $f(t) = t^3 - t$ en el intervalo $-2 < t < 2$. Para ello, considere una extensión periódica que busque eliminar el fenómeno de Gibbs en los extremos del intervalo.

7.- Teorema integral de Fourier. Transformada de Fourier

- a) Introducción.
- b) Transformada de Fourier.
- c) Teorema integral de Fourier.
- d) Propiedades de la Transformada de Fourier.
- e) Teorema de Convolución.
- f) Teorema de Parseval.

a).- Introducción.

Transformación integral

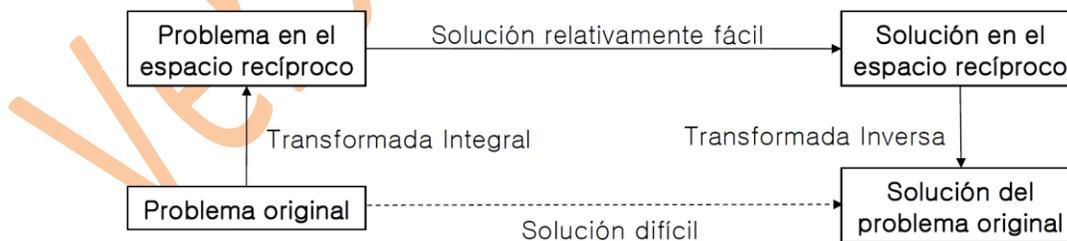
Una definición. Una transformación integral se define como la operación matemática que asocia a cada función $f(t)$ en el espacio directo (o real), otra función $F(\tau)$ en el espacio recíproco mediante la siguiente identidad

$$F(\tau) \equiv \int_a^b K(\tau, t) f(t) dt$$

donde $K(\tau, t)$ recibe el nombre de **kernel** de la transformación, y los límites a y b están dados por la transformada correspondiente.

Ejemplos de transformadas integrales son: la de Fourier, la de Laplace, la Z, la de Hilbert, etc., cada una con su correspondiente *kernel* y límites a y b .

La importancia de las transformadas integrales reside en que un problema que es difícil de resolver en sus "coordenadas" originales (espacio real o directo), a menudo es más sencillo de resolver al transformarlo al espacio recíproco, después de ello, la transformada inversa nos devuelve la solución en el espacio original.



En lo que sigue, estudiaremos algunos aspectos importantes de un tipo muy importante de transformación integral: La transformada de Fourier.

La teoría de las transformadas de Fourier es una rama muy importante de las matemáticas debido a que tienen una gran cantidad de aplicaciones físicas.

Antes de entrar en materia enunciaremos un par de definiciones importantes.

Integrabilidad absoluta

Definición. Decimos que una función de una variable real $f(t)$ es absolutamente integrable cuando la integral

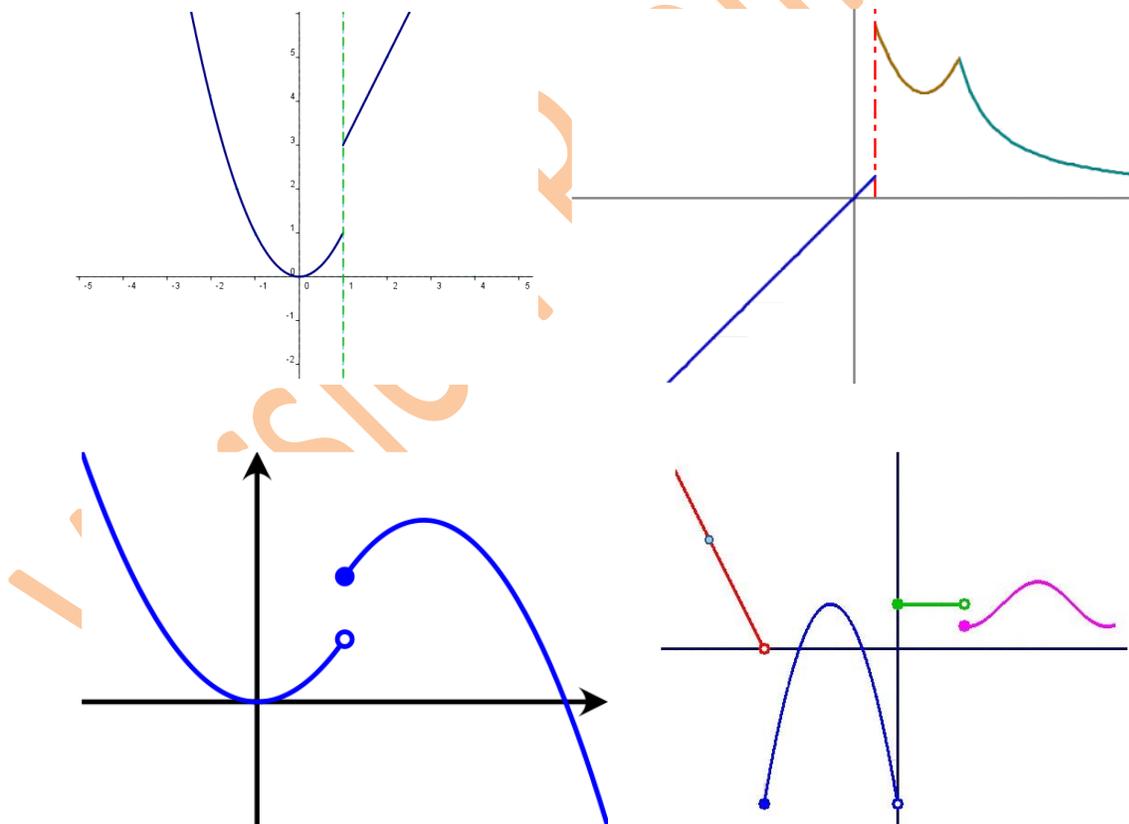
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$$

existe.

Continuidad a trozos

Definición. Decimos que la función $f(t)$ es *continua a trozos* sobre un intervalo del eje t si podemos dividir este intervalo en un número finito de subintervalos en que $f(t)$ sea continua. En cada subintervalo $f(t)$ tiene límites finitos cuando la variable tiende hacia los extremos desde el interior del subintervalo.

Ejemplos de funciones continuas a trozos



En los ejemplos anteriores, las discontinuidades presentes corresponden a “saltos” finitos, lo que implica que en cada salto las funciones tienen límites finitos tanto a la izquierda como a la derecha de la discontinuidad.

En el caso complejo, una función compleja de variable real $f(t) = u(t) + i v(t)$ puede contener discontinuidades de salto, siempre y cuando dichas discontinuidades lo sean tanto de $u(t)$ como de $v(t)$.

Este tipo discontinuidades de salto se denominan también *discontinuidades de primera especie*. Un punto de discontinuidad t_d se denomina *de segunda especie* cuando existe el límite a uno de los lados pero no al otro, o cuando no lo hay en ninguno de los dos lados.

b).- Transformada de Fourier.

Sea $f(t)$ una función absolutamente integrable y continua a trozos en todo intervalo finito del eje t , podemos definir de la siguiente manera una nueva función $F(\omega)$, llamada transformada de Fourier de f .

Definición. Se define la transformada de Fourier de la función $f(t)$ como

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (7.1)$$

para $-\infty < \omega < \infty$.

En general se usan minúsculas (en este caso f) para representar una función de t , y mayúsculas (en este caso F) para representar su transformada de Fourier.

Cabe señalar que se han presentado las *condiciones suficientes* (integrabilidad absoluta y continuidad a trozos) para la existencia de la transformada de Fourier, $F(\omega)$; sin embargo, existen funciones que sin cumplir la primera de ellas, sí tienen transformada de Fourier.

Un ejemplo.

Calcule la transformada de Fourier de la función $f(t)$ definida como

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Ae^{-\alpha t} & 0 \leq t \end{cases}$$

Solución. Usando la definición de transformada de Fourier

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

podemos escribir

$$F(\omega) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{i\omega t} dt$$

donde hemos considerado que la integral de $-\infty$ a 0 se anula porque en ese intervalo $f(t) = 0$.

La última integral se puede escribir como

$$F(\omega) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha-i\omega)t} dt$$

que nos lleva a

$$F(\omega) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{e^{-(\alpha-i\omega)t}}{\alpha-i\omega} \right)_{t=0}^{t=\infty}$$

y valuando en los límites correspondiente, nos permite escribir la transformada de Fourier que buscamos

$$F(\omega) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\alpha-i\omega} \right)$$

Como podemos advertir, en general, la transformada de una función real suele ser una función compleja de variable real; en este caso, podemos escribir

$$F(\omega) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\alpha+i\omega}{\alpha^2+\omega^2} \right)$$

c).- Teorema integral de Fourier.

Antes de enunciar el teorema integral de Fourier es importante mencionar que la transformada integral de Fourier está sujeta a las condiciones:

- i. $f(t)$ es continua o continua por trozos; y
- ii. $f(t)$ es absolutamente integrable.

Por lo que podemos partir de la definición de la transformada integral de Fourier (7.1) para establecer que es posible recuperar o encontrar $f(t)$ a partir de su transformada de Fourier $F(\omega)$ mediante la expresión

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (7.2)$$

donde la integral es un valor principal de Cauchy y recibe el nombre de **Transformada Inversa de Fourier**.

La transformada inversa de Fourier no proporciona correctamente el valor de $f(t)$ en los valores t_d en los que $f(t)$ no es continua. En dichos puntos, la expresión (7.2) proporciona el valor medio de los límites de $f(t)$ por la derecha y por la izquierda del punto considerado t_d , es decir,

$$\frac{1}{2} [f(t_d+) + f(t_d-)].$$

Este resultado se conoce como **teorema integral de Fourier**.

En algunos textos llaman teorema integral de Fourier a la expresión

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \right) e^{-i\omega t} d\omega \quad (7.3)$$

la cual se obtiene al sustituir la transformada de Fourier $F(\omega)$ en la expresión para la transformada inversa de Fourier $f(t)$, tal como se muestra a continuación.

Partiendo de la ecuación (7.2), en donde hemos sustituido la definición de $F(\omega)$ dada por la ecuación (7.1), tenemos la ecuación

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \right) e^{-i\omega t} d\omega$$

que puede escribirse como

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \right) e^{-i\omega t} d\omega$$

Para obtener la ecuación (7.3), basta con cambiar t por τ en el integrando de la integral sobre t , de esta última expresión.

Es importante mencionar que la función $f(t)$ y su correspondiente función $F(\omega)$ forman una pareja de transformadas de Fourier, por lo que la ecuación (7.2) corresponde a la representación de $f(t)$ en términos de una integral de Fourier.

Lo anterior permite interpretar a la transformada inversa de Fourier como una representación de $f(t)$ en términos de una distribución de ondas sinusoidales infinitamente grandes de frecuencia angular ω , en el que esta frecuencia es una variable continua.

En muchas de las aplicaciones de física, la variable t representa el tiempo (en s) y ω la frecuencia angular (en rad/s), por lo que diremos que son cantidades recíprocas.

En mecánica cuántica, se acostumbra cambiar ω por E (considerando que $E = \hbar\omega$), por lo que el par (E, t) son cantidades recíprocas; mientras que en óptica aparecerán como variables recíprocas la posición r y el número de onda k .

Una función importante que aparece en muchas áreas de la Física, ya sea directamente o como una aproximación a una situación física, es la distribución Gaussiana o normal.

A continuación se presentan algunos ejemplos:

- (i) Una función gaussiana es la función de onda del estado fundamental del oscilador armónico cuántico.
- (ii) Los orbitales moleculares usados en química computacional son combinaciones lineales de funciones gaussianas llamados orbitales gaussianos.
- (iii) Matemáticamente, la función gaussiana juega un papel importante en la definición de los polinomios de Hermite. Consecuentemente, están también asociadas con el estado de vacío en la teoría cuántica de campos.
- (iv) Los rayos gaussianos se usan en sistemas ópticos y de microondas.
- (v) Las funciones gaussianas se utilizan como filtro de suavizado en el procesamiento digital de imágenes.

Su transformada de Fourier es de suma importancia, tanto en sí misma, como en su interpretación estadística ya que ilustra fácilmente una forma del principio de incertidumbre.

Otro ejemplo.

Por lo anterior, vamos a calcular la transformada de Fourier de la distribución Gaussiana normalizada, definida por

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)}$$

Esta distribución Gaussiana está centrada en $t = 0$ y tiene una desviación raíz media cuadrática $\Delta t_{\text{rms}} = \sigma$.

Solución. Partiendo de la definición de transformada de Fourier podemos escribir

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)} e^{i\omega t} dt$$
$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}(t^2 - 2\sigma^2 i\omega t)\right)} dt$$

El argumento de la exponencial se puede escribir como

$$\begin{aligned} (t^2 - 2\sigma^2 i\omega t) &= (t^2 - 2\sigma^2 i\omega t) + (-\sigma^2 i\omega)^2 - (-\sigma^2 i\omega)^2 \\ &= (t^2 - 2\sigma^2 i\omega t + (\sigma^2 i\omega)^2) - (\sigma^2 i\omega)^2 \\ &= (t - i\sigma^2 \omega)^2 - (i\sigma^2 \omega)^2 \end{aligned}$$

lo que permite reescribir a la transformada de Fourier $F(\omega)$ como

$$F(\omega) = \frac{e^{-\left(\frac{1}{2}\sigma^2 \omega^2\right)}}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{(t - i\sigma^2 \omega)^2}{2\sigma^2}\right)} dt \right\}$$

La integral del término entre corchetes se puede escribir como

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{(t - i\sigma^2 \omega)^2}{2\sigma^2}\right)} dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{(t - i\sigma^2 \omega)^2}{\sqrt{2}\sigma}\right)} dt$$

y haciendo el cambio de variable

$$x = \frac{t - i\sigma^2 \omega}{\sqrt{2}\sigma} \quad dt = \sqrt{2}\sigma dx$$

tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{(t-i\sigma^2\omega)^2}{2\sigma^2}\right)} dt &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-x^2)} \sqrt{2}\sigma dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 1 \end{aligned}$$

Por lo que finalmente podemos escribir

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2\right)}$$

Que corresponde a otra gaussiana, centrada en $\omega = 0$ y con una desviación $\Delta\omega_{\text{rms}} = 1/\sigma$.

En el ejemplo anterior, las desviaciones o “dispersiones” en t y ω resultaron inversamente relacionadas, es decir

$$\Delta\omega \Delta t = 1$$

independientemente del valor de σ .

En términos físicos, el hacer más angosto el tiempo implica un ensanchamiento (o aumento) en el espectro de frecuencias. Enunciados similares son válidos para otras parejas de variables recíprocas de Fourier, como las mencionadas líneas arriba.

Por ejemplo, el par *posición - número de onda* permite escribir $\Delta x \Delta k = 1$, para un paquete gaussiano.

Las relaciones de incertidumbre como se expresan usualmente en la mecánica cuántica se pueden relacionar con esto si uno introduce las relaciones para momento y energías, dadas por De Broglie y Einstein, respectivamente, las cuales son

$$p = \hbar k \quad \text{y} \quad E = \hbar \omega$$

donde \hbar es la constante de Planck reducida, obtenida al dividir la constante de Planck h entre 2π .

En mecánica cuántica $f(t)$ representa una función de onda y la amplitud de probabilidad en el tiempo está dado por $|f(t)|^2$ (que también es una gaussiana). De manera similar, la amplitud de probabilidad en la frecuencia está dada por $|F(\omega)|^2$. Estas dos distribuciones tienen desviaciones rms de $\sigma/\sqrt{2}$ y $1/\sigma\sqrt{2}$ dando lugar, después de usar las expresiones para p y E ,

$$\Delta E \Delta t = \hbar/2 \quad \text{y} \quad \Delta p_x \Delta x = \hbar/2$$

Los factores de $(1/2)$ que aparecen en las expresiones anteriores son producto de considerar distribuciones gaussianas para la función de onda $f(t)$, sin embargo, cualquier forma que tenga la función de onda $f(t)$ produce una cantidad $a\hbar$ para el producto $\Delta E \Delta t$ en el cual a es estrictamente positivo, de hecho el valor de $(1/2)$ producido por la Gaussiana es el mínimo posible, por lo que a este tipo de funciones de onda gaussianas se les llama *paquete de mínima dispersión*.

d).- Propiedades de la Transformada de Fourier.

Algunas propiedades básicas de la transformada de Fourier, y que se desprenden de su definición, son las siguientes:

- La transformada de Fourier es una aplicación lineal, es decir, la transformada de una suma de funciones es la suma de las transformadas.

$$F\{af(t) + bg(t)\}(\omega) = aF\{f(t)\}(\omega) + bF\{g(t)\}(\omega)$$

- Si la función es absolutamente integrable se cumplen las siguientes relaciones.
 - Cambio de escala

$$F\{f(at)\}(\omega) = \frac{1}{|a|} F\left\{f(t)\right\}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

- Traslación

$$F\{f(t-a)\}(\omega) = e^{-i\omega a} F\{f(t)\}(\omega)$$

- Traslación en la variable transformada

$$F\{f(t)\}(\omega-a) = F\{e^{iat} f(t)\}(\omega)$$

- Transformada de la derivada: Si f y su derivada son integrables, entonces satisface que

$$F\{f'(t)\}(\omega) = i\omega F\{f(t)\}(\omega)$$

- Derivada de la transformada:

$$F\{f(t)\}'(\omega) = F\{-it \cdot f(t)\}(\omega)$$

Estas identidades se demuestran mediante un cambio de variables o integración por partes, operada sobre la definición.

Ejercicios sugeridos.

1. (a) Encuentre la transformada de Fourier de la función $f(t) = e^{-|t|}$; y (b) Usando el resultado anterior y el teorema integral de Fourier muestre que

$$\frac{\pi}{2} e^{-|t|} = \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega t}{1 + \omega^2} d\omega$$

2. Encuentre la transformada de Fourier de la función $g(t) = H(t-a)e^{-bt}$, donde $H(t)$ es la función de Heaviside (o función "escalón").

3. Encuentre la transformada de Fourier para la función

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para } |t| < \beta \\ 0 & \text{para } |t| > \beta \end{cases}$$

4. Encuentre la transformada de Fourier para la función $f(t) = te^{-t^2}$.

5. Encuentre la transformada de Fourier para la *función triángulo* definida por

$$g(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{para } |t| < 1 \\ 0 & \text{para } |t| > 1 \end{cases}$$

Versión Preliminar

Versión Preliminar

Bibliografía

- William R. Derrick. "Variable compleja con aplicaciones". 2ª edición. Grupo Editorial Iberoamérica. (1987).
- James Ward Brown y Ruel V. Churchill. "Variable compleja y Aplicaciones". 7ª edición. McGraw-Hill Interamericana (2004).
- Murray R. Spiegel. "Variable Compleja – Serie Schaum". 2ª edición. McGraw-Hill Interamericana (2011).
- A. David Wunsch. "Complex Variables with Applications". 3rd edition. Pearson Addison-Wesley (2005).
- George B. Arfken y Hanz J. Weber. "Mathematical Methods for Physicists". 6th edition. Elsevier Academic Press (2005).
- Jerrold E. Marsden y Michael J. Hoffman. "Análisis básico de variable compleja". 2ª edición. Editorial Trillas (1996).
- Ken Riley, Michael Hobson y Stephen Bence. "Mathematical Methods for Physics and Engineering". 3rd edition. Cambridge University Press (2006).
- Yue Kuen Kwok. "Applied Complex Variables for Scientists and Engineers". 2nd edition. Cambridge University Press (2010).

Versión Preliminar