7.- Teorema integral de Fourier. Transformada de Fourier

a) Introducción.
b) Transformada de Fourier.
c) Teorema integral de Fourier.
d) Propiedades de la Transformada de Fourier.
e) Teorema de Convolución.
f) Teorema de Parseval.

a).- Introducción.

Transformación integral

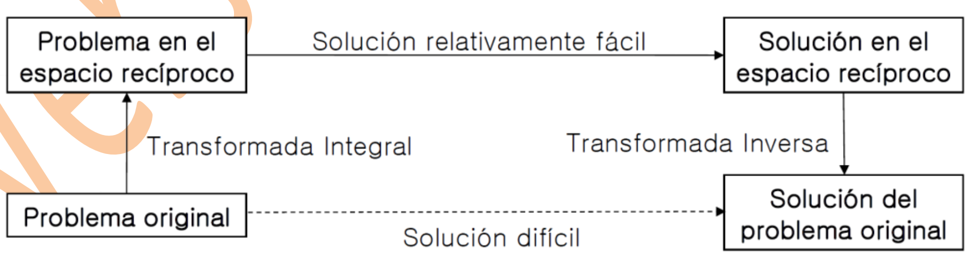
Una definición. Una transformación integral se define como la operación matemática que asocia a cada función $f(t)$ en el espacio directo (o real), otra función $F(\tau)$ en el espacio recíproco mediante la siguiente identidad

$$F(\tau) \equiv \int_a^b K(\tau,t)\, f(t)dt$$

donde $K(\tau,t)$ recibe el nombre de ***kernel*** de la transformación, y los límites a y b están dados por la transformada correspondiente.

Ejemplos de transformadas integrales son: la de Fourier, la de Laplace, la Z, la de Hilbert, etc., cada una con su correspondiente *kernel* y límites a y b.

La importancia de las transformadas integrales reside en que un problema que es difícil de resolver en sus "coordenadas" originales (espacio real o directo), a menudo es más sencillo de resolver al transformarlo al espacio recíproco, después de ello, la transformada inversa nos devuelve la solución en el espacio original.



En lo que sigue, estudiaremos algunos aspectos importantes de un tipo muy importante de transformación integral: La transformada de Fourier.

La teoría de las transformadas de Fourier es una rama muy importante de las matemáticas debido a que tienen una gran cantidad de aplicaciones físicas.

Antes de entrar en materia enunciaremos un par de definiciones importantes.

Integrabilidad absoluta

Definición. Decimos que una función de una variable real $f(t)$ es absolutamente integrable cuando la integral

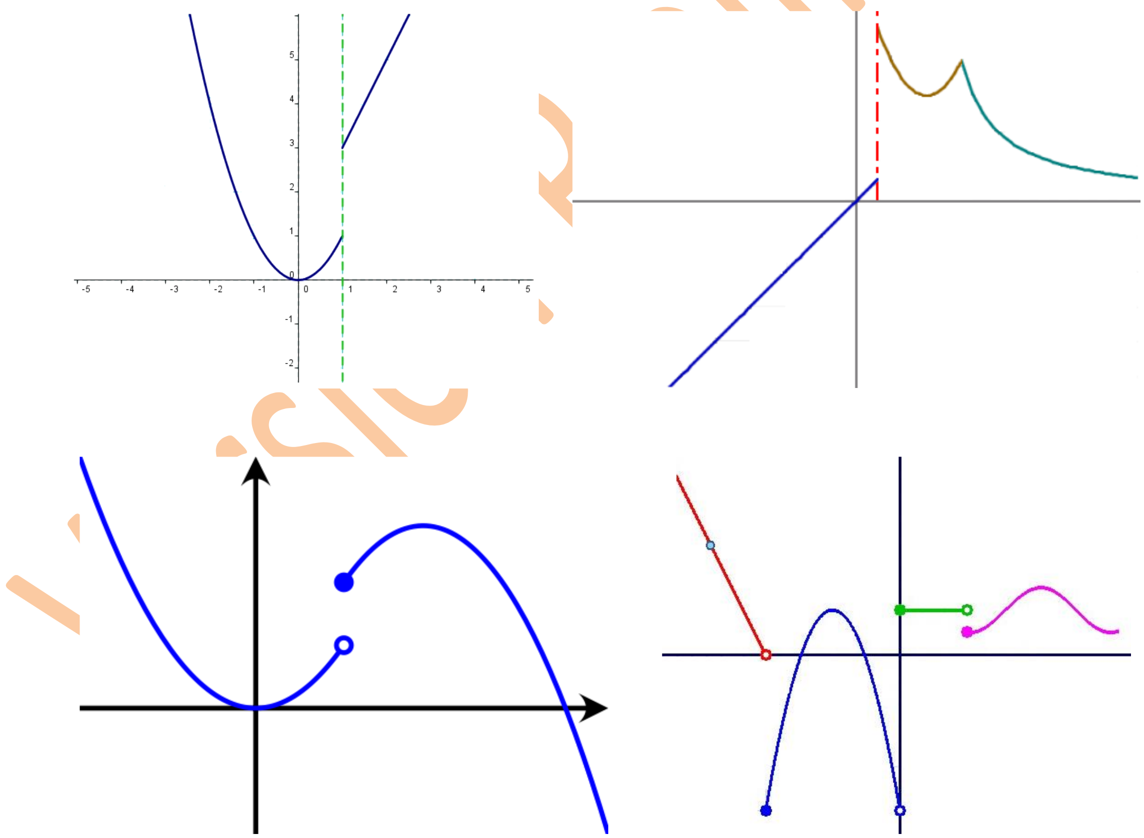
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$$

existe.

Continuidad a trozos

Definición. Decimos que la función $f(t)$ es *continua a trozos* sobre un intervalo del eje t si podemos dividir este intervalo en un número finito de subintervalos en que $f(t)$ sea continua. En cada subintervalo $f(t)$ tiene límites finitos cuando la variable tiende hacia los extremos desde el interior del subintervalo.

Ejemplos de funciones continuas a trozos



En los ejemplos anteriores, las discontinuidades presentes corresponden a “saltos” finitos, lo que implica que en cada salto las funciones tienen límites finitos tanto a la izquierda como a la derecha de la discontinuidad.

En el caso complejo, una función compleja de variable real $f(t) = u(t) + i\ v(t)$ puede contener discontinuidades de salto, siempre y cuando dichas discontinuidades lo sean tanto de $u(t)$ como de $v(t)$.

Este tipo discontinuidades de salto se denominan también *discontinuidades de primera especie*. Un punto de discontinuidad t_d se denomina *de segunda especie* cuando existe el límite a uno de los lados pero no al otro, o cuando no lo hay en ninguno de los dos lados.

b).- Transformada de Fourier.

Sea $f(t)$ una función absolutamente integrable y continua a trozos en todo intervalo finito del eje t, podemos definir de la siguiente manera una nueva función $F(\omega)$, llamada transformada de Fourier de f.

Definición. Se define la transformada de Fourier de la función $f(t)$ como

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \qquad (7.1)$$

para $-\infty < \omega < \infty$.

En general se usan minúsculas (en este caso f) para representar una función de t, y mayúsculas (en este caso F) para representar su transformada de Fourier.

Cabe señalar que se han presentado las *condiciones suficientes* (integrabilidad absoluta y continuidad a trozos) para la existencia de la transformada de Fourier, $F(\omega)$; sin embargo, existen funciones que sin cumplir la primera de ellas, sí tienen transformada de Fourier.

Un ejemplo.

Calcule la transformada de Fourier de la función $f(t)$ definida como

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Ae^{-\alpha t} & 0 \le t \end{cases}$$

Solución. Usando la definición de transformada de Fourier

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

podemos escribir

$$F(\omega) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{i\omega t} dt$$

donde hemos considerado que la integral de $-\infty$ a 0 se anula porque en ese intervalo $f(t) = 0$.

La última integral se puede escribir como

$$F(\omega)=\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-(\alpha-i\omega)t}dt$$

que nos lleva a

$$F(\omega)=\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{e^{-(\alpha-i\omega)t}}{\alpha-i\omega}\right)_{t=0}^{t=\infty}$$

y valuando en los límites correspondiente, nos permite escribir la transformada de Fourier que buscamos

$$F(\omega)=\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\alpha-i\omega}\right)$$

Como podemos advertir, en general, la transformada de una función real suele ser una función compleja de variable real; en este caso, podemos escribir

$$F(\omega)=\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\alpha+i\omega}{\alpha^{2}+\omega^{2}}\right)$$

c).- Teorema integral de Fourier.

Antes de enunciar el teorema integral de Fourier es importante mencionar que la transformada integral de Fourier está sujeta a las condiciones:

i. $f(t)$ es continua o continua por trozos; y
ii. $f(t)$ es absolutamente integrable.

Por lo que podemos partir de la definición de la transformada integral de Fourier (7.1) para establecer que es posible recuperar o encontrar $f(t)$ a partir de su transformada de Fourier $F(\omega)$ mediante la expresión

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \qquad (7.2)$$

donde la integral es un valor principal de Cauchy y recibe el nombre de ***Transformada Inversa de Fourier***.

La transformada inversa de Fourier no proporciona correctamente el valor de $f(t)$ en los valores t_d en los que $f(t)$ no es continua. En dichos puntos, la expresión (7.2) proporciona el valor medio de los límites de $f(t)$ por la derecha y por la izquierda del punto considerado t_d, es decir,

$$\tfrac{1}{2}\left[f(t_d+)+f(t_d-)\right].$$

Este resultado se conoce como **teorema integral de Fourier**.

En algunos textos llaman teorema integral de Fourier a la expresión

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau\right)e^{-i\omega t}d\omega \tag{7.3}$$

la cual se obtiene al sustituir la transformada de Fourier $F(\omega)$ en la expresión para la transformada inversa de Fourier $f(t)$, tal como se muestra a continuación.

Partiendo de la ecuación (7.2), en donde hemos sustituido la definición de $F(\omega)$ dada por la ecuación (7.1), tenemos la ecuación

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\omega t}dt\right)e^{-i\omega t}d\omega$$

que puede escribirse como

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i\omega t}dt\right)e^{-i\omega t}d\omega$$

Para obtener la ecuación (7.3), basta con cambiar t por τ en el integrando de la integral sobre t, de esta última expresión.

Es importante mencionar que la función $f(t)$ y su correspondiente función $F(\omega)$ forman una pareja de transformadas de Fourier, por lo que la ecuación (7.2) corresponde a la representación de $f(t)$ en términos de una integral de Fourier.

Lo anterior permite interpretar a la transformada inversa de Fourier como una representación de $f(t)$ en términos de una distribución de ondas sinusoidales infinitamente grandes de frecuencia angular ω, en el que esta frecuencia es una variable continua.

En muchas de las aplicaciones de física, la variable t representa el tiempo (en s) y ω la frecuencia angular (en rad/s), por lo que diremos que son cantidades recíprocas.

En mecánica cuántica, se acostumbra cambiar ω por E (considerando que $E = \hbar\omega$), por lo que el par (E,t) son cantidades recíprocas; mientras que en óptica aparecerán como variables recíprocas la posición $\boldsymbol{r}$ y el número de onda $\boldsymbol{k}$.

Una función importante que aparece en muchas áreas de la Física, ya sea directamente o como una aproximación a una situación física, es la distribución Gaussiana o normal.

A continuación se presentan algunos ejemplos:

(i) Una función gaussiana es la función de onda del estado fundamental del oscilador armónico cuántico.
(ii) Los orbitales moleculares usados en química computacional son combinaciones lineales de funciones gaussianas llamados orbitales gaussianos.
(iii) Matemáticamente, la función gaussiana juega un papel importante en la definición de los polinomios de Hermite. Consecuentemente, están también asociadas con el estado de vacío en la teoría cuántica de campos.
(iv) Los rayos gaussianos se usan en sistemas ópticos y de microondas.
(v) Las funciones gaussianas se utilizan como filtro de suavizado en el procesamiento digital de imágenes.

Su transformada de Fourier es de suma importancia, tanto en sí misma, como en su interpretación estadística ya que ilustra fácilmente una forma del principio de incertidumbre.

Otro ejemplo.

Por lo anterior, vamos a calcular la transformada de Fourier de la distribución Gaussiana normalizada, definida por

$$f(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)}$$

Esta distribución Gaussiana está centrada en t = 0 y tiene una desviación raíz media cuadrática $\Delta t_{\mathrm{rms}} = \sigma$.

Solución. Partiendo de la definición de transformada de Fourier podemos escribir

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)}e^{i\omega t}dt$$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(t^2-2\sigma^2 i\omega t\right)\right)}dt$$

El argumento de la exponencial se puede escribir como

$$\begin{aligned}\left(t^2-2\sigma^2 i\omega t\right)&=\left(t^2-2\sigma^2 i\omega t\right)+\left(-\sigma^2 i\omega\right)^2-\left(-\sigma^2 i\omega\right)^2\\&=\left(t^2-2\sigma^2 i\omega t+\left(\sigma^2 i\omega\right)^2\right)-\left(\sigma^2 i\omega\right)^2\\&=\left(t-i\sigma^2\omega\right)^2-\left(i\sigma^2\omega\right)^2\end{aligned}$$

lo que permite reescribir a la transformada de Fourier $F(\omega)$ como

$$F(\omega)=\frac{e^{\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2\right)}}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\left(-\frac{\left(t-i\sigma^2\omega\right)^2}{2\sigma^2}\right)}dt\right\}$$

La integral del término entre corchetes se puede escribir como

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\left(-\frac{\left(t-i\sigma^2\omega\right)^2}{2\sigma^2}\right)}dt=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\left(-\left(\frac{t-i\sigma^2\omega}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right)}dt$$

y haciendo el cambio de variable

$$x=\frac{t-i\sigma^2\omega}{\sqrt{2}\sigma}\qquad dt=\sqrt{2}\sigma dx$$

tenemos

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{\left(t-i\sigma^2\omega\right)^2}{2\sigma^2}\right)}dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-x^2\right)}\sqrt{2}\sigma dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = 1$$

Por lo que finalmente podemos escribir

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2\right)}$$

Que corresponde a otra gaussiana, centrada en $\omega = 0$ y con una desviación $\Delta\omega_{rms} = 1/\sigma$.

En el ejemplo anterior, las desviaciones o "dispersiones" en t y ω resultaron inversamente relacionadas, es decir

$$\Delta\omega\,\Delta t = 1$$

independientemente del valor de σ.

En términos físicos, el hacer más angosto el tiempo implica un ensanchamiento (o aumento) en el espectro de frecuencias. Enunciados similares son válidos para otras parejas de variables recíprocas de Fourier, como las mencionadas líneas arriba.

Por ejemplo, el par *posición - número de onda* permite escribir $\Delta x\ \Delta k = 1$, para un paquete gaussiano.

Las relaciones de incertidumbre como se expresan usualmente en la mecánica cuántica se pueden relacionar con esto si uno introduce las relaciones para momento y energías, dadas por De Broglie y Einstein, respectivamente, las cuales son

$$p = \hbar k \qquad \text{y} \qquad E = \hbar\omega$$

donde $\hbar$ es la constante de Planck reducida, obtenida al dividir la constante de Planck h entre 2π.

En mecánica cuántica $f(t)$ representa una función de onda y la amplitud de probabilidad en el tiempo está dado por $|f(t)|^2$ (que también es una gaussiana). De manera similar, la amplitud de probabilidad en la frecuencia está dada por $|F(\omega)|^2$. Estas dos distribuciones tienen desviaciones rms de $\sigma/\sqrt{2}$ y $1/\sigma\sqrt{2}$ dando lugar, después de usar las expresiones para p y E,

$$\Delta E\ \Delta t = \hbar/2 \qquad \text{y} \qquad \Delta p_x\ \Delta x = \hbar/2$$

Los factores de (1/2) que aparecen en las expresiones anteriores son producto de considerar distribuciones gaussianas para la función de onda $f(t)$, sin embargo, cualquier forma que tenga la función de onda $f(t)$ produce una cantidad $a\hbar$ para el producto $\Delta E\ \Delta t$ en el cual a es estrictamente positivo, de hecho el valor de (1/2) producido por la Gaussiana es el mínimo posible, por lo que a este tipo de funciones de onda gaussianas se les llama *paquete de mínima dispersión*.

d).- Propiedades de la Transformada de Fourier.

Algunas propiedades básicas de la transformada de Fourier, y que se desprenden de su definición, son las siguientes:

- La transformada de Fourier es una aplicación lineal, es decir, la trasformada de una suma de funciones es la suma de las transformadas.

$$F\{af(t)+bg(t)\}(\omega)=aF\{f(t)\}(\omega)+bF\{g(t)\}(\omega)$$

- Si la función es absolutamente integrable se cumplen las siguientes relaciones.
    - Cambio de escala

$$F\{f(at)\}(\omega)=\frac{1}{|a|}F\{f(t)\}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

    - Traslación

$$F\{f(t-a)\}(\omega)=e^{-i\omega a}F\{f(t)\}(\omega)$$

    - Traslación en la variable transformada

$$F\{f(t)\}(\omega-a)=F\{e^{iat}f(t)\}(\omega)$$

    - Transformada de la derivada: Si f y su derivada son integrables, entonces satisface que

$$F\{f'(t)\}(\omega)=i\omega F\{f(t)\}(\omega)$$

    - Derivada de la transformada:

$$F\{f(t)\}'(\omega)=F\{-it\cdot f(t)\}(\omega)$$

Estas identidades se demuestran mediante un cambio de variables o integración por partes, operada sobre la definición.

Ejercicios sugeridos.

1. (a) Encuentre la transformada de Fourier de la función $f(t)=e^{-|t|}$; y (b) Usando el resultado anterior y el teorema integral de Fourier muestre que

$$\frac{\pi}{2}e^{-|t|}=\int_0^\infty \frac{\cos\omega t}{1+\omega^2}d\omega$$

2. Encuentre la transformada de Fourier de la función $g(t)=H(t-a)e^{-bt}$, donde $H(t)$ es la *función de Heaviside* (o función “escalón”).

3. Encuentre la transformada de Fourier para la función

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad |t| < \beta \\ 0 & \text{para} \quad |t| > \beta \end{cases}$$

4. Encuentre la transformada de Fourier para la función $f(t) = te^{-t^2}$.

5. Encuentre la transformada de Fourier para la *función triángulo* definida por

$$g(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{para} \quad |t| < 1 \\ 0 & \text{para} \quad |t| > 1 \end{cases}$$

Bibliografía

- William R. Derrick. “Variable compleja con aplicaciones”. 2ª edición. Grupo Editorial Iberoamérica. (1987).
- James Ward Brown y Ruel V. Churchill. “Variable compleja y Aplicaciones”. 7ª edición. McGraw-Hill Interamericana (2004).
- Murray R. Spiegel. “Variable Compleja – Serie Schaum”. 2ª edición. McGraw-Hill Interamericana (2011).
- A. David Wunsch. “Complex Variables with Applications”. 3rd edition. Pearson Addison-Wesley (2005).
- George B. Arfken y Hanz J. Weber. “Mathematical Methods for Physicists”. 6th edition. Elsevier Academic Press (2005).
- Jerrold E. Marsden y Michael J. Hoffman. “Análisis básico de variable compleja”. 2ª edición. Editorial Trillas (1996).
- Ken Riley, Michael Hobson y Stephen Bence. “Mathematical Methods for Physics and Engineering”. 3rd edition. Cambridge University Press (2006).
- Yue Kuen Kwok. “Applied Complex Variables for Scientists and Engineers”. 2nd edition. Cambridge University Press (2010).