6.- Series de Fourier de funciones periódicas

a) Introducción.
b) Condiciones de Dirichlet.
c) Desarrollo en Series de Fourier.
d) Coeficientes de Fourier.
e) Algunas consideraciones de simetría.
f) Funciones discontinuas. Fenómeno de Gibbs.
g) Expansión de Fourier de medio rango.
h) Series de Fourier para funciones complejas.

a).- Introducción.

En cursos previos de Matemáticas se ha visto que dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ (distintos de cero) son ortogonales, cuando su producto interno $\vec{a}\cdot\vec{b}$ es cero; en una generalización de este concepto, es muy común hacer una analogía en el caso de funciones definidas en un cierto dominio, y decir que dos funciones distintas son ortogonales cuando su producto interno es cero.

Funciones ortogonales

Definición. Se dice que un conjunto de funciones $\{\phi_k(t)\}$ es ortogonal en el intervalo $a < t < b$ si dos funciones cualesquiera $\phi_m(t)$ y $\phi_n(t)$ de dicho conjunto cumplen que

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_a^b \phi_m(t)\cdot\phi_n(t)dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ A_n & m = n \end{cases}$$

Cualquier conjunto de ortogonal de funciones diferentes de cero $\{\phi_k(t)\}$ se puede normalizar, es decir transformarlo en un conjunto ortonormal dividiendo cada función entre su norma.

Desarrollo en series ortogonales

Suponga que $\{\phi_k(t)\}$ es un conjunto infinito de funciones ortogonales en el intervalo $a < t < b$. La pregunta es: Si $y = f(t)$ es una función definida en el intervalo $[a, b]$, ¿será posible determinar un conjunto de coeficientes c_n, $n = 0,1,2,\cdots$, para el que podamos escribir a la función $f(t)$ como

$$f(t) = c_0\phi_0 + c_1\phi_1 + \cdots + c_n\phi_n + \cdots ?$$

La respuesta es **sí se puede**, y para ello, debemos multiplicar el desarrollo anterior para $f(t)$ por la función $\phi_m(t)$ e integrar en el intervalo $[a,b]$ para obtener

$$\int_a^b f(t)\phi_m(t)dt = \int_a^b c_0\phi_0(t)\phi_m(t)dt + \int_a^b c_1\phi_1(t)\phi_m(t)dt + \ldots + \int_a^b c_n\phi_n(t)\phi_m(t)dt + \ldots$$

Sin embargo, debido a la propiedad de ortogonalidad, las integrales del lado derecho son cero, excepto cuando $m = n$, así que la expresión anterior se reduce a

$$\int_a^b f(t)\phi_n(t)dt = c_n \int_a^b \phi_n(t)\phi_n(t)dt$$

de donde podemos despejar los coeficientes c_n del desarrollo propuesto para $f(t)$.

Con el resultado anterior, podemos escribir el desarrollo de $f(t)$ como

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(t)$$

donde

$$c_n = \frac{\int_a^b f(t)\phi_n(t)dt}{\left\|\phi_n(t)\right\|^2}$$

Si el conjunto de funciones $\phi_n(t)$ es *ortonormal*, entonces el denominador en la última expresión es igual a 1, y el cálculo del coeficiente c_n del desarrollo de $f(t)$ se reduce a

$$c_n = \int_a^b f(t)\phi_n(t)dt \,.$$

En particular, las funciones periódicas (como el seno y el coseno) de frecuencias distintas, pero múltiplos de una frecuencia fundamental, son ortogonales y forman un conjunto completo, por lo que son una buena opción para realizar un desarrollo de la forma descrita líneas arriba.

En lo que sigue analizaremos los desarrollos para una función $f(t)$ en términos de una suma de senos y cosenos.

Tal representación se llama *serie de Fourier* y, a diferencia de la serie de Taylor, puede describir funciones que no son completamente continuas o diferenciables. Además, son fáciles de diferenciar e integrar, sus módulos son fáciles de evaluar y cada término incluye solamente una frecuencia característica.

Este último punto es importante porque, como se verá más adelante, la serie de Fourier se utiliza a menudo para representar la respuesta de un sistema a una entrada periódica, y esta respuesta a menudo depende directamente de la frecuencia de entrada.

Las series de Fourier se utilizan en una amplia variedad de situaciones físicas, por ejemplo, las vibraciones de una cuerda finita, la dispersión de la luz por una rejilla de difracción, la transmisión de una señal de entrada a través de un circuito electrónico, etc.

b).- Condiciones de Dirichlet.

En párrafos anteriores se ha mencionado que las series de Fourier pueden usarse para representar una función para la cual no es posible un desarrollo de Taylor.

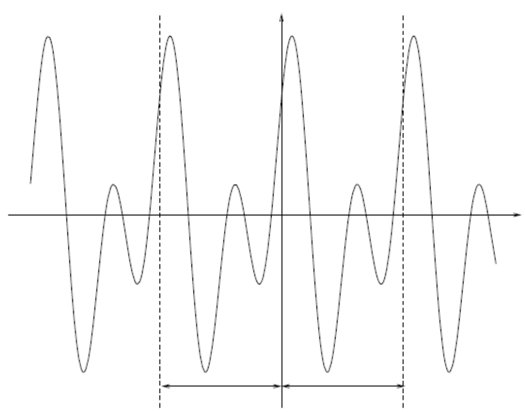
Las condiciones particulares que debe reunir una función $f(t)$, a fin de que pueda representarse mediante una serie de Fourier, se conocen como *condiciones de Dirichlet* y son las siguientes:

i. La función $f(t)$ debe ser periódica;
ii. La función debe ser monovaluada y continua, excepto (posiblemente) en un número finito de discontinuidades finitas;
iii. La función debe tener solamente un número finito de máximos y mínimos dentro de un periodo T; y
iv. La integral de $|f(t)|$ sobre un periodo T, debe converger.

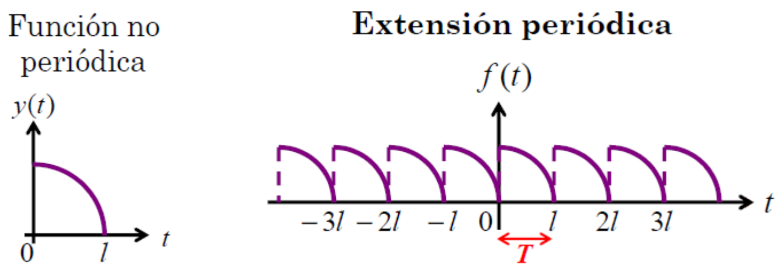
Si se satisfacen las condiciones anteriores entonces la serie de Fourier correspondiente converge a $f(t)$ en todos los puntos en que $f(t)$ es continua.

Vale la pena mencionar que cuando tenemos situaciones físicas (reales), las tres últimas condiciones de Dirichlet casi siempre se cumplen, no así la primera de ellas, ya que no todas las funciones son periódicas. Sin embargo, en muchas situaciones es posible representar una función no periódica como una serie de Fourier mediante la manipulación de la función para transformarla en una forma periódica, lo cual veremos más adelante.

En la siguiente figura se muestra un ejemplo de función que puede representarse como una serie de Fourier sin necesidad de modificarla, toda vez que presenta una periodicidad evidente.



Por otro lado, si consideramos la figura que se muestra a continuación, vemos que la función representada del lado izquierdo no presenta periodicidad, sin embargo se le puede introducir una periodicidad, logrando una extensión periódica de la función, que se muestra en el lado derecho.

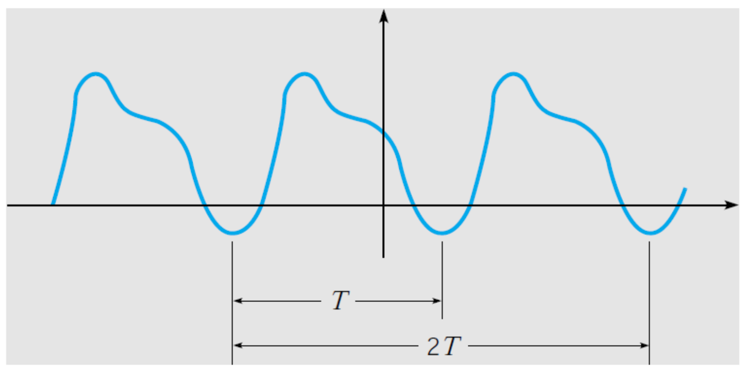


El procedimiento que seguiremos en tales casos se discutirá más adelante.

Resumiendo.

Se dice que una función $f(t)$ es periódica, con periodo T, si

- el dominio de $f(t)$ contiene tanto a t como a $t + T$; y
- $f(t+T) = f(t)$



Aunque $2T$ también satisface las condiciones anteriores, el valor mínimo de T será el que usaremos en lo que sigue.

c).- Desarrollo en Series de Fourier.

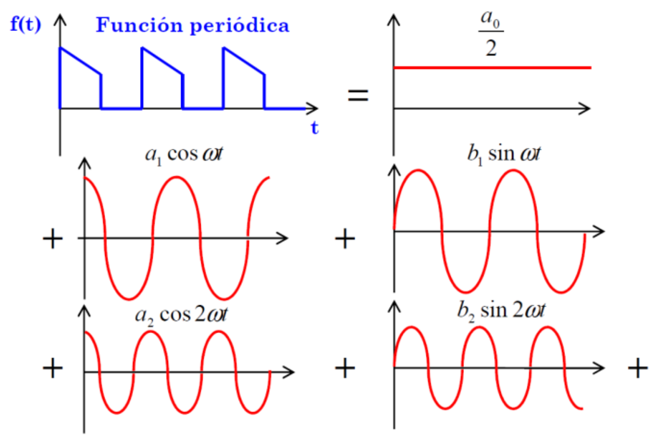
Definición. Una serie de Fourier es una expansión de una función periódica $f(t)$, con periodo T, en términos de una suma infinita de senos y cosenos que toma la forma

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

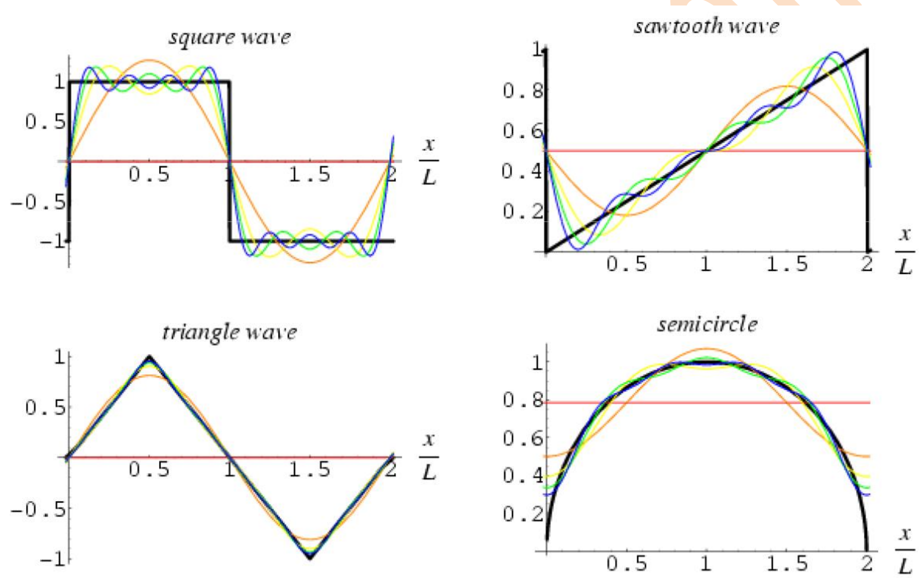
En otras palabras, cualquier función periódica se puede reescribir como una suma de funciones armónicas multiplicadas por constantes a determinar: a_n y b_n.

En el desarrollo anterior, se considera que la función $f(t)$ tiene una periodicidad definida; sin embargo, más adelante veremos que aunque la función no sea periódica podremos hacer un análisis de Fourier mediante la *transformada integral de Fourier*.

Un ejemplo gráfico.



Otros ejemplos.



d).- Coeficientes de Fourier.

Considerando el desarrollo en términos de funciones ortogonales, podemos encontrar los coeficientes del desarrollo de Fourier para la función $f(t)$ dada por

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \tag{6.1}$$

Vale la pena mencionar que en esta expresión se ha separado el término cuando $n = 0$, de la definición de Serie de Fourier dada en la sección anterior, y ahora la sumatoria empieza en $n = 1$.

El término $\frac{a_0}{2}$ corresponde al valor promedio de la función $f(t)$ en el periodo T, como veremos a continuación.

Si multiplicamos la expresión (6.1) por ($\cos m\omega t$) e integramos de 0 a T encontramos que

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t dt \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

mientras que para $n = 0$, se tiene

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) dt$$

Por otro lado, multiplicando la expresión (6.1) pero ahora por ($\sin m\omega t$), e integrando de 0 a T, encontramos que

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t dt \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Desarrollo en Serie de Fourier

Definición. Sea $f(t)$ una función convergente en el intervalo $0 \leq t \leq T$, el desarrollo en serie de Fourier para $f(t)$ existe y está dado por

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

donde los coeficiente del desarrollo a_n y b_n están dados por

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t dt$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$; mientras que a_0 está dado por

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) dt$$

A la cantidad ω que aparece en las expresiones anteriores se le conoce como **frecuencia fundamental** y está dada por

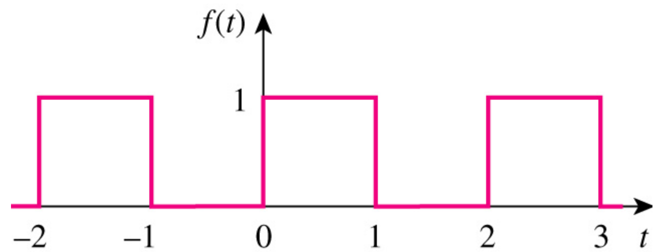
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

donde T es el periodo de la función $f(t)$.

El cálculo y estudio de las series de Fourier se conoce como **análisis armónico** (o análisis de Fourier) y es extremadamente útil al estudiar funciones periódicas arbitrarias y hacer un análisis de la misma en términos de su contenido frecuencial o espectro, ω_n.

Un ejemplo.

Determina la representación en series de Fourier de la siguiente función *f*(*t*).



Solución.

Primero determinemos el periodo T, y escribamos la expresión matemática de la función $f(t)$, resultando que

$$T = 2$$

y

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases}$$

A continuación calculemos los coeficientes del desarrollo de Fourier

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)dt = \int_0^1 1dt + \int_1^2 0dt = 1 - 0 = 1$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^2 f(t)\cos n\omega t dt$$

$$= \int_0^1 1\cos n\pi t dt + \int_1^2 0dt = \left[\frac{\sin n\pi t}{n\pi}\right]_0^1 = \frac{\sin n\pi}{n\pi}$$

como estamos considerando que n es un entero, este último resultado se anulará, por lo que

$$a_n = 0$$

Por otro lado, el coeficiente b_n está dado por

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^2 f(t)\sin n\omega t dt$$

$$= \int_0^1 1\sin n\pi t dt + \int_1^2 0dt = \left[-\frac{\cos n\pi t}{n\pi}\right]_0^1 = \frac{1 - \cos n\pi}{n\pi}$$

de nuevo, como n es un entero, podemos advertir que

$$\cos n\pi = (-1)^n$$

con lo que

$$b_n = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi}$$

Finalmente, la serie de Fourier resulta ser

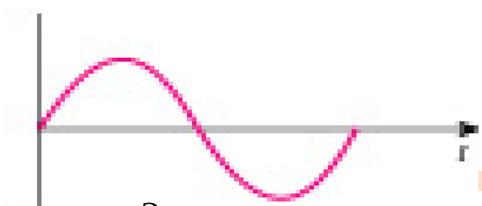
$$f(t)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\right]\sin n\pi t$$

que desarrollando los primeros términos se escribe como

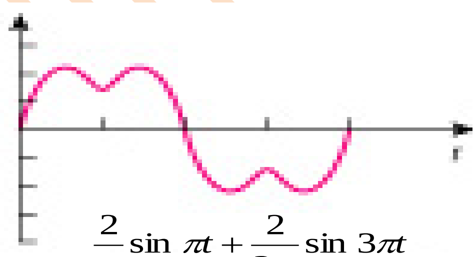
$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sin\pi t+\frac{2}{3\pi}\sin 3\pi t+\frac{2}{5\pi}\sin 5\pi t+\ldots$$

Es importante mencionar que la serie obtenida anteriormente, en principio, es una serie infinita; sin embargo, en muchas situaciones será suficiente considerar un número finito de términos para obtener la aproximación deseada, toda vez que conforme sumamos términos el resultado va convergiendo a la función original $f(t)$.

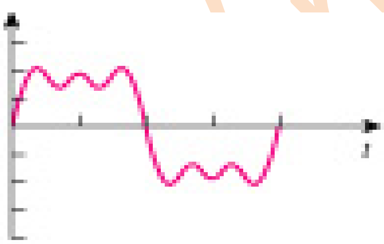
Lo que puede apreciarse mejor en la siguiente secuencia de imágenes correspondientes a la serie de Fourier recién construida.



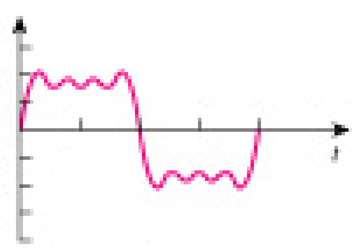
$$\frac{2}{\pi}\sin\pi t$$



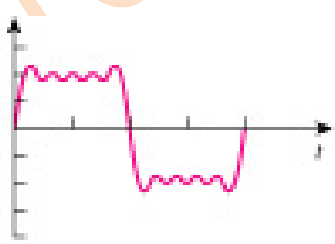
$$\frac{2}{\pi}\sin\pi t+\frac{2}{3\pi}\sin 3\pi t$$



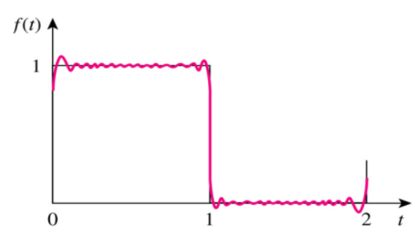
$$\frac{2}{\pi}\sin\pi t+\frac{2}{3\pi}\sin 3\pi t+\frac{2}{5\pi}\sin 5\pi t$$



$$\frac{2}{\pi}\sin\pi t+\frac{2}{3\pi}\sin 3\pi t+\frac{2}{5\pi}\sin 5\pi t+\frac{2}{7\pi}\sin 7\pi t$$



$$\frac{2}{\pi}\sin\pi t+\frac{2}{3\pi}\sin 3\pi t+\frac{2}{5\pi}\sin 5\pi t+\frac{2}{7\pi}\sin 7\pi t+\frac{2}{9\pi}\sin 9\pi t$$



$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sin\pi t+\frac{2}{3\pi}\sin 3\pi t+\ldots+\frac{2}{23\pi}\sin 23\pi t$$

Antes de continuar vale la pena escribir las siguientes identidades que pueden resultar útiles en el análisis de Fourier

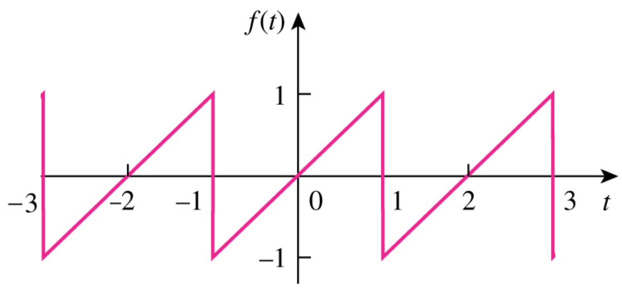
$$\begin{array}{cc} \sin(-x) = -\sin x & \cos(-x) = \cos x \\ \sin n\pi = 0 & \cos n\pi = (-1)^n \\ \sin 2n\pi = 0 & \cos 2n\pi = 1 \end{array}$$

Otro ejemplo.

Dada $f(t) = t$ definida en el intervalo $[-1,1]$ y con periodo $T = 2$, bosqueje la gráfica entre $t = -3$ y $t = 3$ y calcule los coeficientes de la serie de Fourier correspondiente.

Solución.

La gráfica de la función tiene la forma



Así que

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

A continuación, calculamos los coeficientes de la serie de Fourier empezando con a_0

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^2 f(t)dt = \frac{2}{T}\int_{-1}^{1} f(t)dt$$

$$= \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} tdt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1-1}{2} = 0$$

Mientras que los coeficientes a_n están definidos por

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-1}^{1} f(t)\cos n\omega t dt = \int_{-1}^{1} t\cos n\pi t dt$$

para calcular esta integral, usamos el método de integración por partes,

$$a_n = \left[\frac{t\sin n\pi t}{n\pi}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{\sin n\pi t}{n\pi}dt$$

$$a_n = \frac{\sin n\pi - [-\sin(-n\pi)]}{n\pi} + \left[\frac{\cos n\pi t}{n^2\pi^2}\right]_{-1}^{1}$$

$$a_n = 0 + \frac{\cos n\pi - \cos(-n\pi)}{n^2\pi^2} = 0$$

Para terminar, calculemos el coeficiente b_n

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-1}^{1} f(t)\sin n\omega t dt = \int_{-1}^{1} t\sin n\pi t dt$$

es decir

$$\begin{aligned}
b_n &= \left[-\frac{t\cos n\pi t}{n\pi}\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\frac{\cos n\pi t}{n\pi}dt \\
&= \frac{-\cos n\pi + [-\cos(-n\pi)]}{n\pi} + \left[\frac{\sin n\pi t}{n^2\pi^2}\right]_{-1}^{1} \\
&= -\frac{2\cos n\pi}{n\pi} + \frac{\sin n\pi - \sin(-n\pi)}{n^2\pi^2} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \\
&= -\frac{2\cos n\pi}{n\pi} = -\frac{2(-1)^n}{n\pi}
\end{aligned}$$

Con lo anterior, para la función $f(t) = t$ definida en el intervalo [-1,1] y con periodo $T = 2$, la serie de Fourier resulta ser

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi t$$

o expandida en sus primeros términos

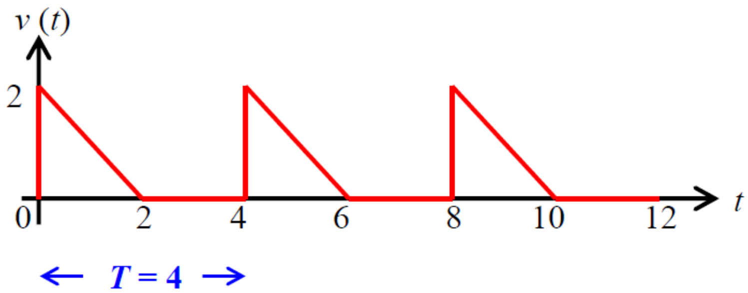
$$f(t) = \frac{2}{\pi}\sin \pi t - \frac{2}{2\pi}\sin 2\pi t + \frac{2}{3\pi}\sin 3\pi t - \dots$$

Un ejercicio.

Dada $v(t) = 2 - t$ en el intervalo [0,2], $v(t) = 0$ en el intervalo [2,4] y con periodo $T = 4$, (a) bosqueje la gráfica entre $t = 0$ y $t = 12$; y (b) calcule los coeficientes de la serie de Fourier correspondiente.

Solución.

(a) La gráfica es



(b) Los coeficientes son

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^4 v(t)dt = \frac{2}{4}(2) = 1$$

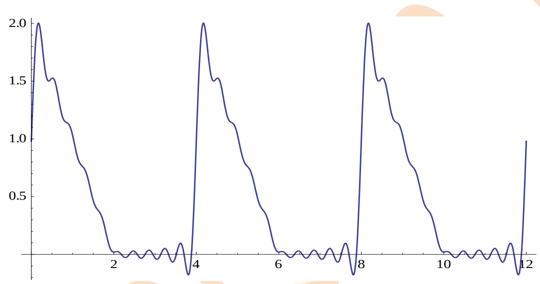
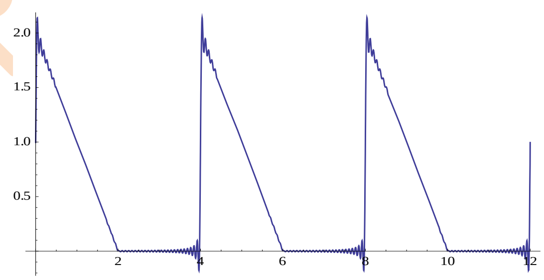
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^4 v(t)\cos n\omega t dt = \frac{2[1-(-1)^n]}{n^2\pi^2}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^4 v(t)\sin n\omega t dt = \frac{2}{n\pi}$$

Así que la serie resulta

$$v(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2[1-(-1)^n]}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right) + \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right)\right\}$$

Cuya gráfica, considerando los primeros 10 y 50 términos, es

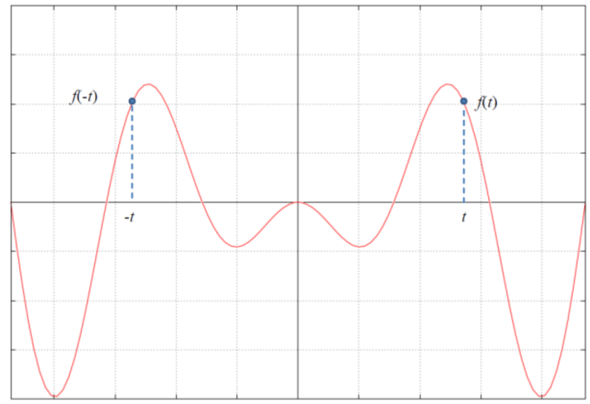



e).- Algunas consideraciones de simetría.

En muchas ocasiones, la paridad de la función $f(t)$ permite simplificar el cálculo de su serie de Fourier, para ello vale la pena identificar el tipo de simetría que presenta dicha función y obviar el cálculo de los coeficientes a_0 y a_n, o los coeficientes b_n, según sea la paridad mostrada por $f(t)$.

Función par

Una función $f(t)$ es par si su gráfica es simétrica respecto al eje vertical, tal como se muestra en la figura.

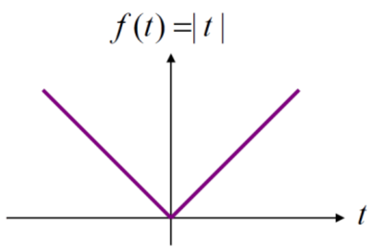


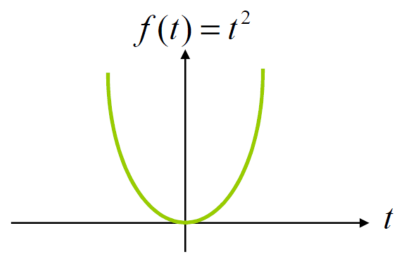
En este caso se cumple que

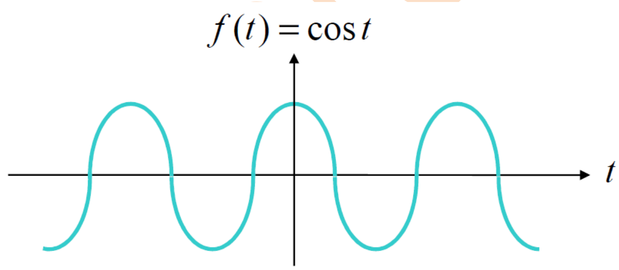
$$f(-t) = f(t)$$

para todo valor de t en el dominio de definición.

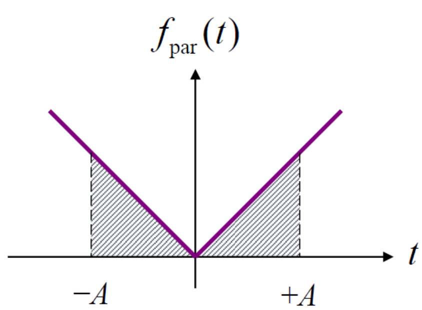
Algunos ejemplos de funciones pares son los siguientes







Evidentemente, la integral de una función par de $-A$ a $+A$

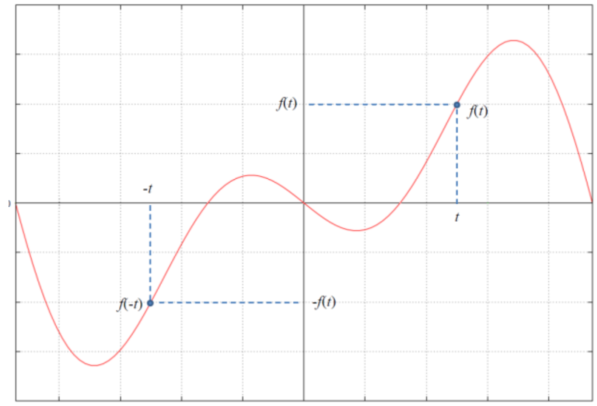


es el doble de la integral de 0 a $+A$, es decir

$$\int_{-A}^{A} f_{par}(t)dt = 2\int_{0}^{A} f_{par}(t)dt$$

Función impar

Una función $f(t)$ es impar si su gráfica es antisimétrica respecto al eje vertical, tal como se muestra en la figura.



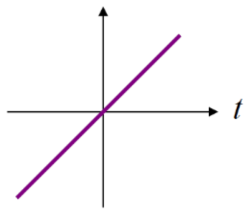
En este caso se cumple que

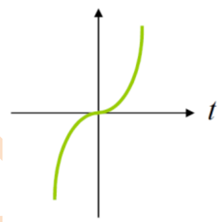
$$f(-t) = -f(t)$$

para todo valor de t en el dominio de definición.

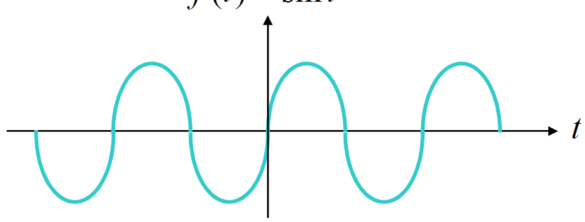
Algunos ejemplos de funciones impares son

$$f(t) = t \qquad f(t) = t^3$$



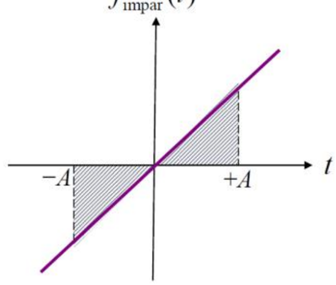


$$f(t) = \sin t$$



Evidentemente, la integral de una función impar de $-A$ a $+A$

$$f_{\text{impar}}(t)$$



se anula, es decir

$$\int_{-A}^{A} f_{impar}(t)dt = 0$$

Producto de funciones pares e impares.

De acuerdo a la clasificación presentada anteriormente, el producto de funciones satisface las siguientes propiedades:

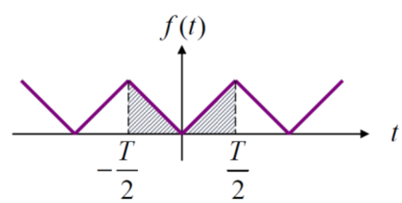
- (par) x (par) = par
- (impar) x (impar) = par
- (par) x (impar) = impar
- (impar) x (par) = impar

La simetría en los coeficientes de Fourier.

De las propiedades de las funciones pares e impares, se puede demostrar que

- para funciones pares:

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)dt \;, \quad a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega t dt \quad \text{y} \quad b_n = 0$$



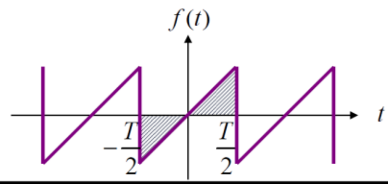
$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{\underbrace{f(t)}_{\textbf{(par)}} \times \underbrace{\cos n\omega t}_{\textbf{(par)}}}_{\textbf{(par)}} dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{\underbrace{f(t)}_{\textbf{(par)}} \times \underbrace{\sin n\omega t}_{\textbf{(impar)}}}_{\textbf{(impar)}} dt = 0$$

mientras que

- para funciones impares:

$$a_0 = a_n = 0 \quad \text{y} \quad b_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\sin n\omega t dt$$



$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{f(t)}_{\textbf{(impar)}} dt = 0$$

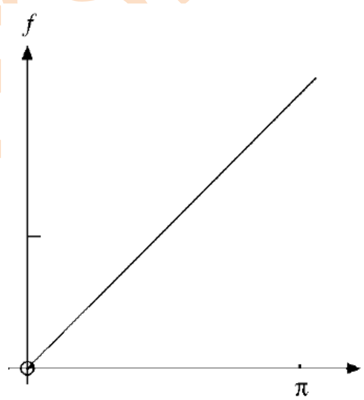
$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{\underbrace{f(t)}_{\textbf{(impar)}} \times \underbrace{\cos n\omega t}_{\textbf{(par)}}}_{\textbf{(impar)}} dt = 0$$

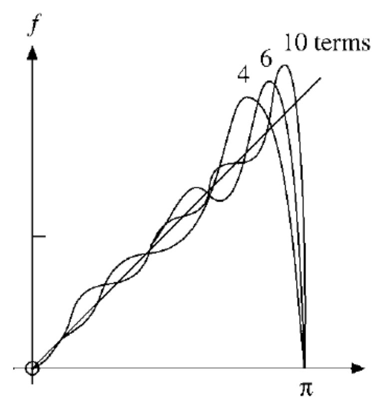
$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{\underbrace{f(t)}_{\textbf{(impar)}} \times \underbrace{\sin n\omega t}_{\textbf{(impar)}}}_{\textbf{(par)}} dt = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\sin n\omega t dt$$

f).- Funciones discontinuas. Fenómeno de Gibbs.

La expansión en Serie de Fourier usualmente funciona de manera adecuada cuando tenemos funciones que son discontinuas en el intervalo requerido. Sin embargo, en estos casos la serie no produce una función discontinua, sino que "conecta" la función original en su discontinuidad.

Por ejemplo, para la función diente de sierra definida como $f(t) = at$ (con $a > 0$) y periodo π, que se muestra en la figura de la izquierda, y que presenta una discontinuidad en $t = \pi$, encontramos que el desarrollo en Serie de Fourier existe, tal como se muestra en la figura de la derecha, el cual se ha calculado para 4, 6 y 10 términos.





En este punto mencionaremos, sin probar, que el valor de la función en términos de la Serie de Fourier en la discontinuidad será el promedio de los valores que toma $f(t)$ en la discontinuidad.

Matemáticamente, podemos expresar que en el punto de discontinuidad t_d, la serie converge al valor dado por

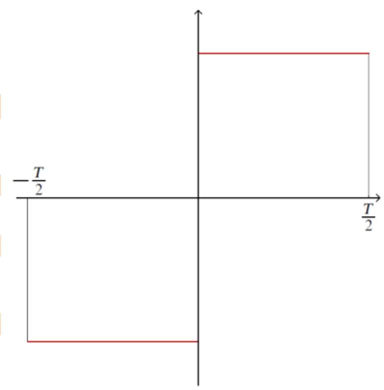
$$f_{FOURIER}(t_d) = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[f(t_d+\varepsilon) + f(t_d-\varepsilon)\right]$$

En la discontinuidad, la representación en series de Fourier de la función, $f_{FOURIER}(t)$ toma valores que rebasan los correspondientes a la función original $f(t)$.

Conforme se incluyen más términos en la representación en serie, los puntos con rebasamiento se acercan cada vez más a la discontinuidad, pero no desaparecen, incluso en el límite cuando se considera la serie completa. Este comportamiento se conoce como *fenómeno de Gibbs*.

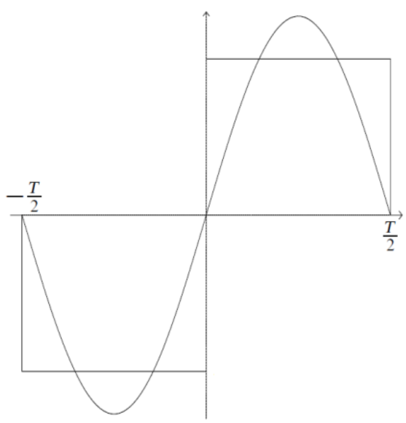
En las siguientes imágenes se muestra este fenómeno para el desarrollo en serie de Fourier de la función cuadrada, definida como

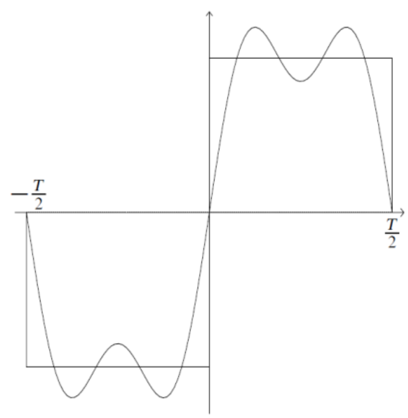
$$f(t) = \begin{cases} F_0 & \text{para} \quad -\frac{T}{2} < t < 0 \\ -F_0 & \text{para} \quad 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

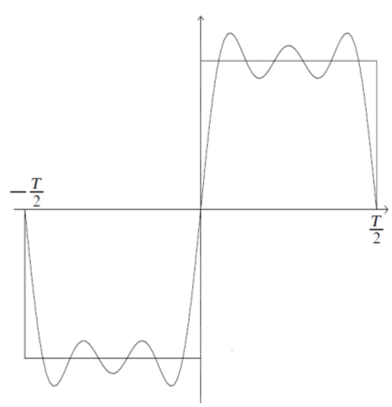


que evidentemente no es continua, tal como se aprecia en la gráfica.

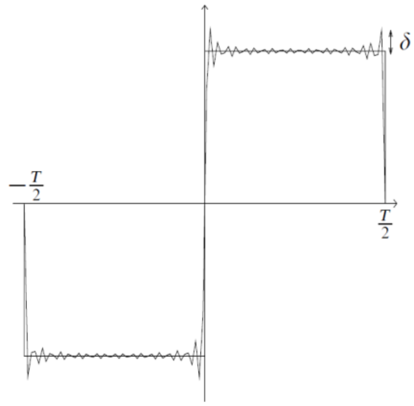
En la esquina superior izquierda se muestra la serie de Fourier compuesta por un término, a la derecha se muestra la serie con dos términos, mientras que en la parte inferior la serie consta de tres términos.







Uno puede aumentar la cantidad de términos en la serie, con la idea de que el desarrollo se va a mejorar, pero esto no termina siendo cierto, al menos, no en la parte de la discontinuidad.



En esta última gráfica se muestra el desarrollo considerando 20 términos, así como el rebasamiento δ que podemos advertir no desaparece, sino sólo se hace más cercano a la discontinuidad.

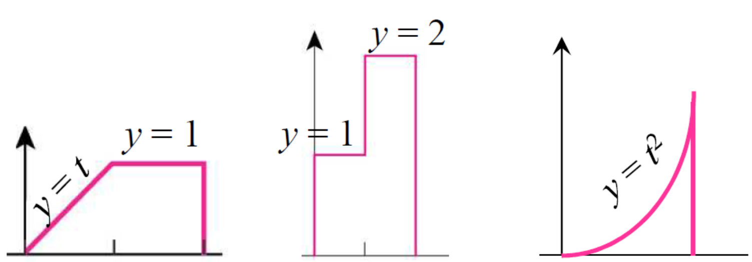
En este curso no se pretende una discusión completa de este fenómeno, pero vale la pena mencionar que el tamaño de rebasamiento δ es proporcional a la magnitud de la discontinuidad.

g).- Expansión de Fourier de medio rango.

Hasta este punto hemos considerado funciones periódicas, por lo que aplicar la teoría de Fourier para hacer un desarrollo en series de senos y cosenos ha sido directo.

Sin embargo, en muchas situaciones físicas lo que se tienen son funciones no periódicas, pero esto no debe representar mayor problema ya que (casi) siempre se pueden definir sobre un intervalo dado, considerando que en una observación o medición sobre un sistema física el tiempo involucrado es finito.

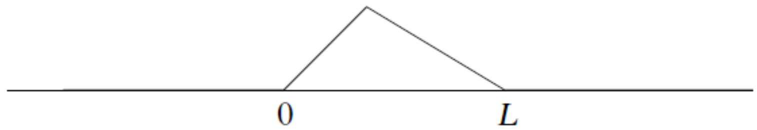
Algunos ejemplos de funciones no periódicas se muestran en las figuras siguientes, las cuales son distintas de cero en un intervalo finito.



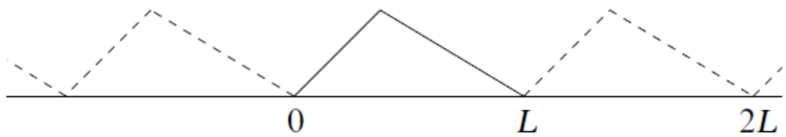
Por lo anterior, resulta muy útil extender la función no periódica en una función periódica antes de calcular su representación en serie de Fourier.

La serie de Fourier de esta función periódica representaría entonces correctamente a la función no periódica en el intervalo deseado.

Por ejemplo, si consideramos una función no periódica tal como la mostrada a continuación.

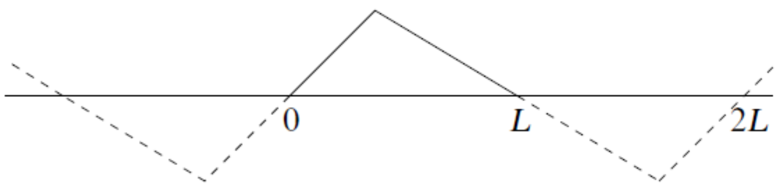


Podemos extenderla, simplemente repitiendo la función, tal como se muestra



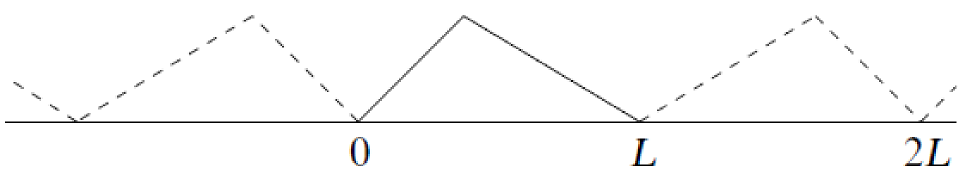
en cuyo caso no hay simetría respecto al eje y.

Otra opción puede ser



que como vemos presenta simetría impar, ya que $f(-t) = -f(t)$.

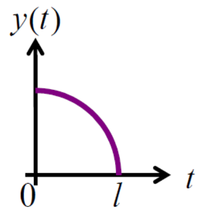
Hay otra opción de extensión, mostrada a continuación, que presenta simetría par, ya que $f(-t) = f(t)$.



Como pudimos ver en el ejemplo mostrado anteriormente, a menudo estamos en libertad de ampliar la función de varias maneras; sin embargo, normalmente es preferible usar alguna de las simetrías vistas anteriormente (par o impar) para la extensión periódica, en lugar de una extensión periódica normal; ya que el uso de una función con cierta simetría (par o impar) nos proporcionará coeficientes cero de cualquiera de los a_n o b_n de la expansión, lo que puede proporcionar una expansión más sencilla de la serie de Fourier correspondiente.

Otro ejemplo.

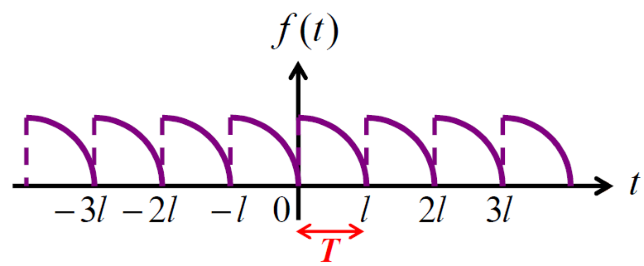
La función periódica mostrada a continuación



tiene las siguientes extensiones periódicas.

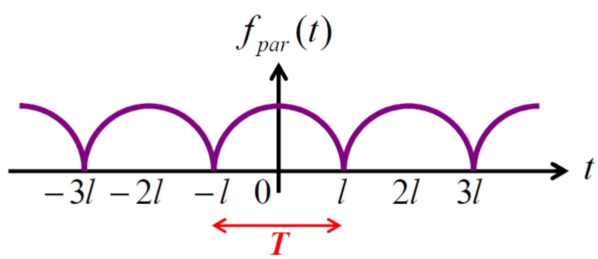
- Extensión periódica normal:

$$f(t) = y(t) \quad , \quad 0 < t < l$$
$$f(t + l) = f(t)$$
$$T = l$$



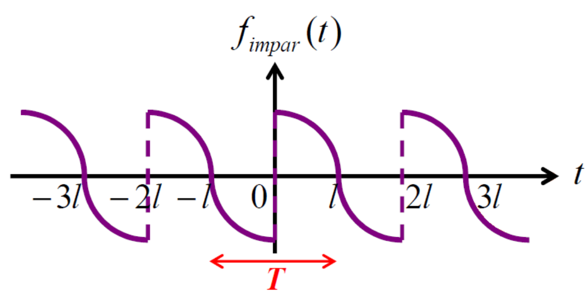
- Extensión periódica par:

$$f(t) = \begin{cases} y(t) & , \quad 0 < t < l \\ y(-t) & , \quad -l < t < 0 \end{cases}$$
$$f(t + 2l) = f(t)$$
$$T = 2l$$



- Extensión periódica impar:

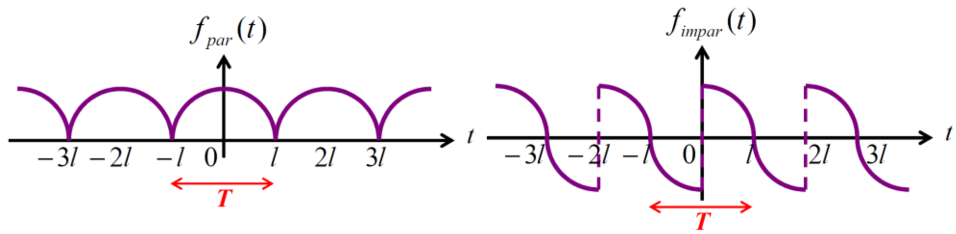
$$f(t) = \begin{cases} y(t) & , \quad 0 < t < l \\ -y(-t) & , \quad -l < t < 0 \end{cases}$$
$$f(t + 2l) = f(t)$$
$$T = 2l$$



Como puede verse, para la misma función *f*(*t*), las diferentes extensiones implican modificar el periodo, en el caso recién mostrado, un dominio inicialmente entre 0 y L, se mantiene sin cambios para una extensión normal, pero se duplicó para las extensiones par e impar.

Serie de Fourier de medio rango

Definición. La serie de Fourier de una extensión periódica par o impar de una función no periódica se le llama **serie de Fourier de medio rango**. Lo anterior se debe a que la función no periódica se considera equivalente a la mitad de la función expandida, ya sea mediante una función par, o una función impar.



Serie coseno de Fourier de medio rango

Definición. Si la función no periódica se extiende mediante una función par entonces los coeficientes b_n se anulan y, por lo tanto, el desarrollo de la función se reduce a

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t$$

que sólo contiene el desarrollo en términos de cosenos, por lo que se le conoce como *Serie coseno de Fourier de medio rango*.

Serie seno de Fourier de medio rango

Definición. Si la función no periódica se extiende mediante una función impar entonces los coeficientes a_n se anulan y, por lo tanto, el desarrollo de la función se reduce a

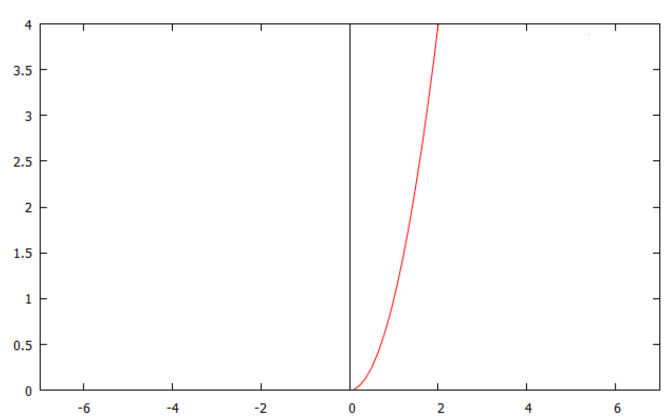
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

que sólo contiene el desarrollo en términos de senos, por lo que se le conoce como *Serie seno de Fourier de medio rango*.

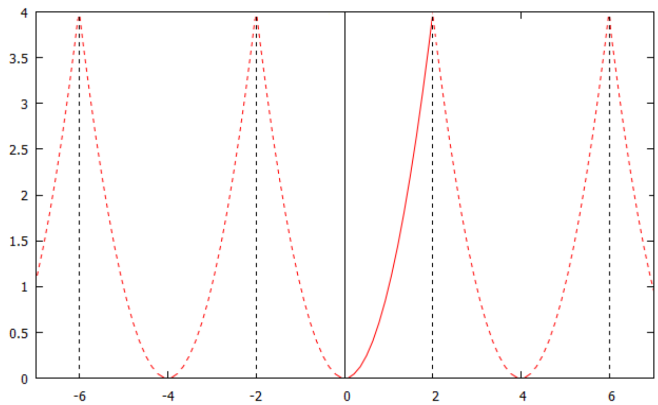
Un ejemplo.

Encuentre el desarrollo en series de Fourier para la función $f(t) = t^2$ para el intervalo $0 < t \leq 2$.

Solución. En este caso la función tiene la siguiente representación gráfica



Lo primero que tenemos que hacer es transformarla en una función periódica, así que en este caso consideraremos una expansión par, por lo que ahora tenemos una función tal como la mostrada a continuación



En este caso, hemos extendido el rango de interés de $0 < t \leq 2$, a $-2 < t \leq 2$, con lo que la función extendida satisface que

$$f(-t) = f(t)$$

además, el periodo de la función extendida es $T = 4$, tal que

$$f(t + 4k) = f(t)$$

donde k es un entero cualquiera.

Con lo anterior, la serie de Fourier que obtengamos, debe representar a $f(t)$ en el intervalo $-2 < t \leq 2$, pero no afuera.

Como la extensión que realizamos es par, podemos aplicar las condiciones de simetría presentadas anteriormente, de tal manera que los coeficientes b_n serán cero y tendremos una serie coseno de Fourier de medio rango

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t$$

así que nuestra tarea será calcular los coeficientes a_0 y a_n, lo que haremos a continuación.

De la definición

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} t^2 dt$$

$$= \frac{4}{4}\int_0^2 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}$$

Mientras que

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t dt = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)dt$$

donde hemos usado la definición de la frecuencia fundamental ω.

Así que la integral a evaluar es

$$a_n = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} t^2 \cos\left(\frac{2\pi n t}{4}\right)dt = \frac{4}{4}\int_{0}^{2} t^2 \cos\left(\frac{\pi n t}{2}\right)dt$$
$$= \int_{0}^{2} t^2 \cos\left(\frac{\pi n t}{2}\right)dt$$

que podemos resolver usando integración por partes, para obtener sucesivamente,

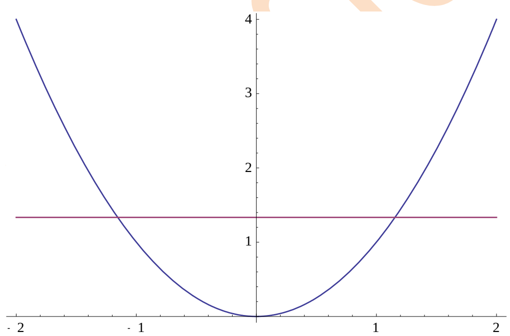
$$a_n = \left[\frac{2}{n\pi} t^2 \sin\left(\frac{\pi n t}{2}\right)\right]_0^2 - \frac{4}{n\pi}\int_0^2 t \sin\left(\frac{\pi n t}{2}\right)dt$$
$$= \frac{8}{n^2\pi^2}\left[\frac{2}{n\pi} t^2 \sin\left(\frac{\pi n t}{2}\right)\right]_0^2 - \frac{8}{n^2\pi^2}\int_0^2 \cos\left(\frac{\pi n t}{2}\right)dt$$
$$= \frac{16}{n^2\pi^2}\cos(\pi n) = \frac{16}{n^2\pi^2}(-1)^n$$

Con lo que la serie coseno de Fourier para $f(t) = t^2$ en el intervalo $-2 < t \leq 2$, se escribe como

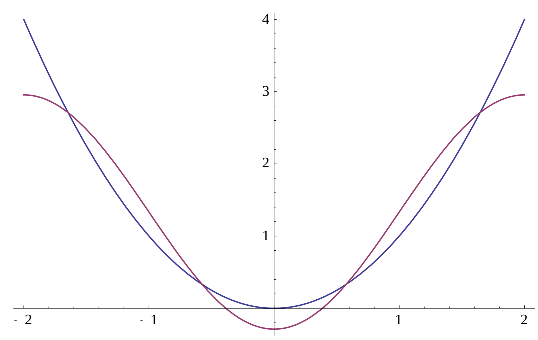
$$f(t) = \frac{4}{3} + 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{\pi n t}{2}\right)$$

Queda de tarea para el lector interesado, construir la serie seno de Fourier para esta función, mediante una extensión impar de $f(t)$.

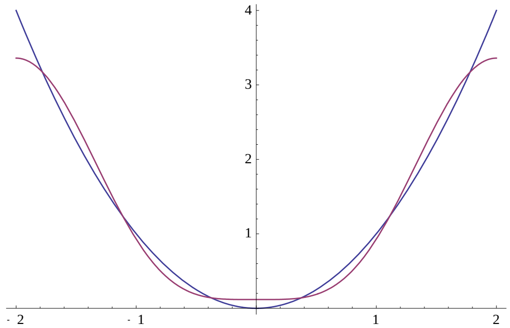
A continuación se muestran las gráficas correspondientes a la serie coseno de Fourier obtenida anteriormente, en la que se consideran series truncadas en el n-ésimo término, mostrado en cada figura.



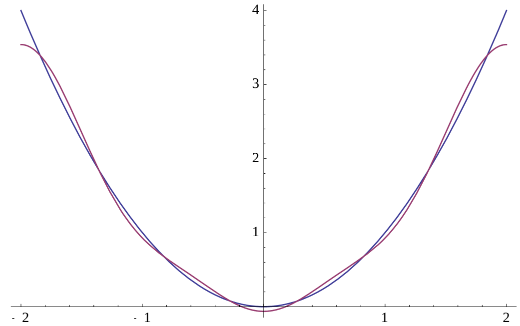
$n = 0$



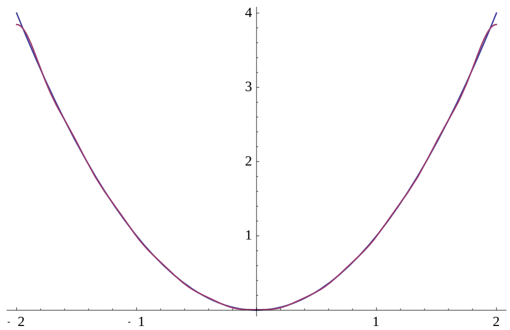
$n = 1$



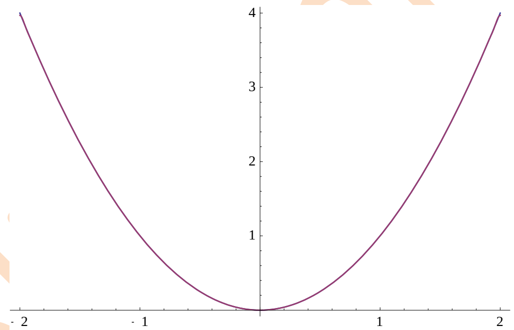
$n = 2$



$n = 3$



$n = 10$



$n = 50$

h).- Series de Fourier complejas.

Antes de concluir con este análisis de la teoría de Fourier para los desarrollos en series de Fourier reales, vamos a presentar la extensión a las series de Fourier complejas.

Dado que, en general, una expansión en series de Fourier contiene tanto senos como cosenos, se puede escribir esta expansión en una forma más compacta usando una exponencial compleja.

Esta simplificación toma en cuenta que $e^{inx} = \cos nx + i \operatorname{sen} nx$. Lo que permite escribir la expansión en series de Fourier compleja como

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(i \frac{2n\pi}{T} t \right)$$

donde los coeficientes de Fourier c_n (para $n \neq 0$) están dados por

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp\left(-i \frac{2n\pi}{T} t \right) dt$$

mientras que c_0 está dado por

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \, .$$

Esta relación se puede derivar de manera similar a como se hizo la derivación de los coeficientes reales a_n y b_n; sólo que en este caso, se debe multiplicar el desarrollo de $f(t)$ por

$$\exp\left(-i\frac{2m\pi}{T}t\right)$$

e integrar usando la relación de ortogonalidad

$$\int_0^T \exp\left(-i\frac{2m\pi}{T}t\right)\exp\left(i\frac{2n\pi}{T}t\right)dt = \begin{cases} T & \text{para} \quad m = n \\ 0 & \text{para} \quad m \neq n \end{cases}$$

Los coeficientes complejos c_n se relacionan con los coeficientes reales a_n y b_n mediante

$$c_n = \tfrac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right)$$
$$c_{-n} = \tfrac{1}{2}\left(a_n + ib_n\right)$$

Si $f(t)$ es real entonces $c_{-n} = c_n^*$, donde el asterisco (*) significa complejo conjugado.

Un ejemplo.

Encuentre una serie de Fourier compleja para $f(t) = t^3$ en el intervalo $-3 < t < 3$.

Solución. En este caso debemos escribir una serie de la forma

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(i\frac{2n\pi}{T}t\right)$$

donde los coeficientes de Fourier c_n (para n ≠ 0) estarán dados por

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp\left(-i\frac{2n\pi}{T}t\right)dt \\ &= \frac{1}{6}\int_{-3}^{3} t^3 \exp\left(-i\frac{n\pi}{3}t\right)dt \end{aligned}$$

usando integración por partes, encontramos que los coeficientes son

$$c_n = \frac{1}{6}\int_{-3}^{3} t^3 \exp\left(-i\frac{n\pi}{3}t\right)dt$$

$$c_n = \frac{1}{6}\left[i(-1)^n \frac{162\left(n^2\pi^2 - 6\right)}{n^3\pi^3}\right]$$

$$c_n = i(-1)^n \frac{27\left(n^2\pi^2 - 6\right)}{n^3\pi^3}$$

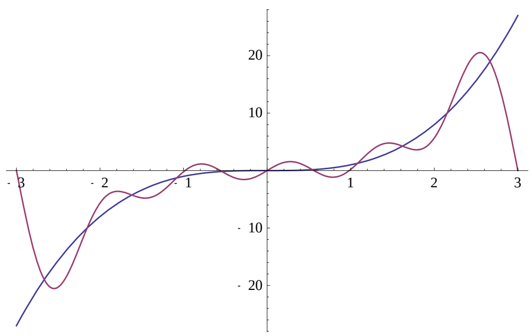
mientras que c_0 estará dado por

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \\ &= \frac{1}{6}\int_{-3}^{3} t^3 dt = 0 \end{aligned}.$$

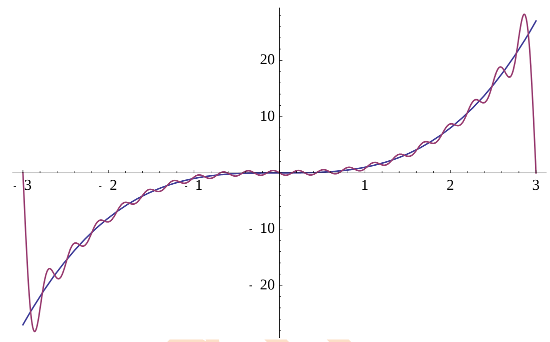
Por lo que la serie de Fourier compleja para $f(t) = t^3$ está dada por

$$f(t) = i\frac{27}{\pi^3}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(n^2\pi^2-6\right)}{n^3}\exp\left(i\frac{n\pi}{3}t\right)$$

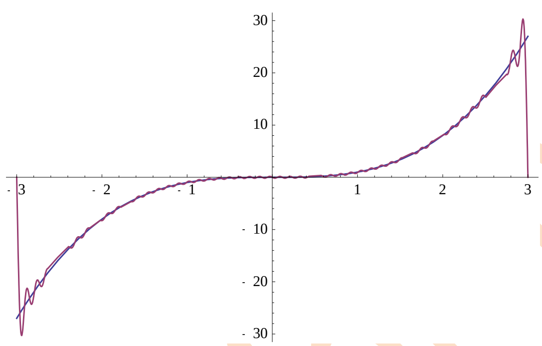
cuya gráfica, calculada considerando los valores de n indicados, junto con $f(t) = t^3$, se muestra a continuación.



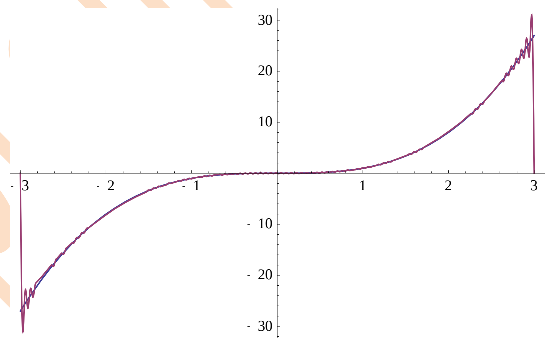
$-5 < n < 5$



$-20 < n < 20$



$-50 < n < 50$



$-100 < n < 100$