5.- Teoremas de Cauchy y del Residuo

a).- Introducción.

El teorema de Cauchy-Goursat, visto anteriormente, establece que si una función f es analítica en todos los puntos interiores a un contorno cerrado simple C y sobre él, entonces el valor de la integral de dicha función f es cero alrededor de dicho contorno C, a saber

$$\int_C f(z)dz = 0$$

Sin embargo, si la función falla en ser analítica para un número finito de puntos interiores a C veremos a continuación que existe un número específico llamado ***residuo***, para cada uno de los puntos donde f no es analítica, que contribuye al valor de la integral.

Así que en lo que sigue desarrollaremos la llamada *teoría de los residuos*, mediante el enunciado de algunos teoremas que nos serán de vital importancia, entre ellos, el teorema de Cauchy para el residuo.

Finalmente, veremos algunas aplicaciones de esta teoría en algunos problemas donde se requieran calcular integrales, tanto para funciones complejas como para funciones reales.

b).- Puntos singulares aislados.

Para definir qué es un punto singular aislado debemos recordar que un punto z_0 se llama **punto singular de una función *f*** si la función f es no analítica en z_0 pero sí lo es en la vecindad de z_0.

Punto Singular Aislado

Un punto z_0 se dice que es un *punto singular aislado* de una función $f(z)$, si este es singular y, además, existe una vecindad de z_0 en todo punto de la cual $f(z)$ es analítica excepto en ese punto.

Es decir, z_0 es un punto singular aislado si $f(z)$ es analítica en una vecindad $0 < |z - z_0| < \varepsilon$.

Ejemplos.

i. Encontrar los puntos singulares aislados de la función $f(z)$ definida por

$$f(z) = \frac{\sin z}{z - 4i}.$$

Solución. Se tiene que $z = 4i$ es el único punto singular de la función $f(z)$, dado que $f(z)$ es el cociente de las funciones enteras $f_1(z) = \sin z$ y $f_2(z) = z - 4i$, siendo $4i$ el único cero de $f_2(z)$. Así que $z = 4i$ es un punto singular aislado.

ii. Encontrar los puntos singulares aislados de la función $f(z)$ dada por

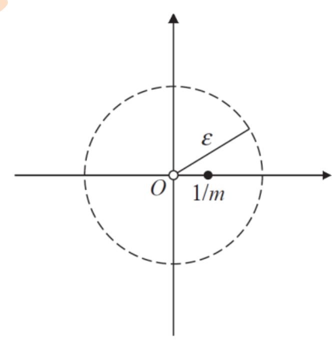
$$f(z) = \frac{z+1}{z\left(z^2+1\right)}.$$

Solución. En este caso tenemos tres puntos singulares aislados, a saber, $z_1 = 0$, $z_2 = i$ y $z_3 = -i$. Dado que $f(z)$ es el cociente de las funciones enteras $f_1(z) = z + 1$ y $f_2(z) = z(z^2 + 1)$, siendo 0 y $\pm i$ los únicos cero de $f_2(z)$. Así que estos tres puntos son singulares aislados.

iii. Encontrar los puntos singulares aislados de la función $f(z)$ definida por

$$f(z) = \frac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{z}\right)}.$$

Solución. En este caso, la función $f(z)$ tiene los puntos singulares $z = 0$ y $z = 1/n$ (con $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$), todos ubicados sobre el eje real entre $z = -1$ y $z = 1$. Todos los puntos son singulares aislados excepto $z = 0$. El punto singular $z = 0$ no es aislado porque cualquier vecindad alrededor de $z = 0$ contiene otro punto singular de la función.



Más precisamente, cuando especificamos un radio ε para la vecindad, tal como se muestra en la figura, habrá un entero positivo m tal que $m > 1/\varepsilon$. Esto lleva a que $0 < 1/m < \varepsilon$, lo que implicará que el punto $z = 1/m$ siempre queda dentro de la vecindad $|z| < \varepsilon$.

Tipos de singularidades aisladas

Antes de revisar los diferentes tipos de singularidades aisladas, vamos a definir la *parte principal* de un desarrollo de Laurent.

Definición. Sea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \tag{5.1}$$

el desarrollo de Laurent para la función $f(z)$ alrededor del punto singular aislado z_0. La parte del desarrollo de Laurent de $f(z)$ que tiene potencias negativas de $(z - z_0)$ se denomina **parte principal** de f en z_0.

En otras palabras, el término

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

es la parte principal de f en z_0.

Un ejemplo.

Determine la parte principal de $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ en cada uno de sus puntos singulares.

Solución. En este caso, los puntos singulares aislados son $z_1 = 0$ y $z_2 = 1$.

i. El desarrollo de Laurent para $f(z)$ alrededor de z_1 es

$$f(z)=-\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n+\frac{1}{z}\right)$$

de donde se deduce que la parte principal de $f(z)$ en $z_1 = 0$ es $\left(-\dfrac{1}{z}\right)$.

ii. Por otra parte, el desarrollo de Laurent para $f(z)$ alrededor de z_2 es

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-1)^n+\frac{1}{z-1}$$

de donde se deduce que la parte principal de $f(z)$ en $z_2 = 1$ es $\left(\dfrac{1}{z-1}\right)$.

En ambos casos se ha utilizado el desarrollo de Maclaurin

$$\frac{1}{1\pm w}=1\mp w+w^2\mp w^3+w^4\mp w^5+\cdots$$

el cual es válido para $|w|<1$.

Polo de orden *m*

Definición. Sea z_0 un punto singular aislado de una función $f(z)$. Se dice que z_0 es un polo de orden m de f si el desarrollo de Laurent para $f(z)$ (ecuación 5.1) toma la forma

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\frac{b_1}{(z-z_0)}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\ldots+\frac{b_m}{(z-z_0)^m} \tag{5.2}$$

donde $b_m \neq 0$ y $b_{m+1} = b_{m+2} = \ldots = 0$.

En otras palabras, la parte principal de f en z_0 posee el coeficiente $b_m \neq 0$ y los siguientes coeficientes son cero. Los coeficientes anteriores a b_m no necesariamente son nulos, pero pueden serlo. En el caso en que $m = 1$, z_0 se denomina **polo simple**.

La definición anterior nos indica que para determinar si z_0 es un polo de $f(z)$, previamente se debe tener el desarrollo de Laurent de $f(z)$ alrededor de z_0; lo anterior no es práctico, pero siempre es válido.

Existen otros procedimientos más adecuados para verificar si un punto es o no un polo. El siguiente teorema nos muestra un procedimiento para verificar si un punto es un polo sin necesidad de construir su serie de Laurent.

Teorema. Si $f(z)$ tiene un polo en z_0, entonces $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$.

Demostración. Sea $f(z)$ una función con un polo de orden m en z_0, por lo que el desarrollo de Laurent para $f(z)$ toma la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \ldots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m}$$

donde $b_m \neq 0$. Multiplicando ambos lados por $(z - z_0)^m$ tenemos

$$(z - z_0)^m f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+m} + b_1 (z - z_0)^{m-1} + b_2 (z - z_0)^{m-2} + \ldots + b_m$$

Del resultado anterior tenemos

$$\lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^m f(z) \right] = b_m$$

como

$$|(z - z_0)^m| \to 0, \text{ cuando } z \to z_0,$$

la ecuación anterior indica que

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty,$$

con lo que se demuestra el enunciado del teorema.

El teorema anterior no sólo nos permite identificar si un punto es un polo, sino también el orden del mismo. Basándose en este teorema, las siguientes reglas nos permiten identificar el orden del polo.

- **Regla I**. Sea z_0 un punto singular aislado de $f(z)$. Si existe el

  $$\lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^m f(z) \right]$$

  y si dicho límite no es cero ni infinito, entonces $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0.

- **Regla II**. Si el polo de $f(z)$ en z_0 es de orden m, entonces

  $$\lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^n f(z) \right] = \begin{cases} 0 & n > m \\ \infty & n < m \end{cases}$$

Un ejemplo.

Establezca el orden de los polos que presenta la función

$$f(z) = \frac{1}{z^2 (z - 3i)}$$

Solución. En este caso vemos que $f(z)$ presenta polos en $z = 0$ y $z = 3i$. Así que analicemos estos polos por separado.

i. Para $z=0$ se tiene que

$$\lim_{z\to 0}\left|f(z)\right|=\lim_{z\to 0}\left|\frac{1}{z^3-3iz^2}\right|=\frac{1}{0}=\infty,$$

por lo que efectivamente $z=0$ corresponde a un polo de $f(z)$. Veamos ahora de qué orden es este polo.
Sea m un entero positivo, así que

$$\lim_{z\to 0}\left[z^m f(z)\right]=\lim_{z\to 0}\left[\frac{z^{m-2}}{z-3i}\right]=\begin{cases}0 & m>2\\ \dfrac{i}{3} & m=2\\ \infty & m<2\end{cases}$$

Lo anterior significa que $z=0$ es un polo de orden 2.

ii. Para $z=3i$ se tiene que

$$\lim_{z\to 3i}\left|f(z)\right|=\lim_{z\to 3i}\left|\frac{1}{z^3-3iz^2}\right|=\frac{1}{0}=\infty,$$

por lo que efectivamente $z=3i$ corresponde a un polo de $f(z)$. Veamos ahora de qué orden es este polo.
Sea m un entero positivo, así que

$$\lim_{z\to 3i}\left[(z-3i)^m f(z)\right]=\lim_{z\to 3i}\left[\frac{(z-3i)^{m-1}}{z^2}\right]=\begin{cases}0 & m>1\\ -\dfrac{1}{9} & m=1\\ \infty & m<1\end{cases}$$

Lo anterior significa que $z=3i$ es un polo de orden 1.

En problemas relevantes de la Física es común encontrarse con situaciones en las que se requiere determinar el orden de los polos de una función de la forma

$$f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}.$$

Por lo que a continuación estableceremos un teorema que nos permite identificar si un punto es un polo, así como el orden del mismo, para una función racional $f(z)$.

Teorema. Sea z_0 un punto del plano complejo. Sea $f(z)$ una función tal que

$$f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$$

donde $p(z)$ y $q(z)$ son analíticas en z_0 y $p(z_0)\neq 0$. Entonces, z_0 es un polo de orden m de f, si y sólo si,

$$q(z_0)=q'(z_0)=\cdots=q^{(m-1)}(z_0)=0$$

y

$$q^{(m)}(z_0)\neq 0.$$

Demostración. Supongamos que $p(z_0)\neq 0$, $q(z_0)=q'(z_0)=\cdots=\ q^{(m-1)}(z_0)=0$ y $q^{(m)}(z_0)\neq 0$.

Si $p(z)$ y $q(z)$ son analíticas en z_0 con $p(z_0) \neq 0$ y $q(z_0) = 0$, entonces z_0 es un punto singular aislado de $f(z)$. Por otra parte, como $q(z)$ es analítica en z_0 y $q(z_0) = q'(z_0) = \cdots = q^{(m-1)}(z_0) = 0$ y $q^{(m)}(z_0) \neq 0$, entonces el desarrollo de Taylor de $q(z)$ alrededor de z_0 es

$$q(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

luego

$$\frac{q(z)}{(z - z_0)^m} = a_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-m}$$

por tanto,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{q(z)}{(z - z_0)^m} = a_m \neq 0$$

De esta forma,

$$\lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^m f(z) \right] = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^m \frac{p(z)}{q(z)} \right]$$

$$\lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^m f(z) \right] = \left(\lim_{z \to z_0} p(z) \right) \left(\lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)^m}{q(z)} \right)$$

$$= p(z_0) \left(\frac{1}{a_m} \right) \neq 0, \infty.$$

Lo cual indica que z_0 es un polo de orden m de $f(z)$.

Un ejemplo.

Establecer los puntos singulares aislados de la función $f(z) = \dfrac{e^z}{\sin z}$, así como el orden de los mismos.

Solución. En este caso se tiene que

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

con $p(z) = e^z$ y $q(z) = \sin z$; en ambos casos, advertimos que se trata de funciones analíticas.

Analizando los ceros de $q(z)$ encontramos que los puntos singulares aislados de $f(z)$ son

$z_n = n\pi$, con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

De esta forma, $p(z_n) \neq 0$, $q(z_n) = 0$ y $q'(z_n) \neq 0$, para todo n. Por tanto, z_n es un polo simple de $f(z)$ para todo n.

Un ejercicio.

Realice el mismo análisis para la función $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z - 3i)}$ (revisada anteriormente) y corrobore sus resultados previos.

Punto Singular Esencial

Definición. Sea z_0 un punto singular aislado de una función $f(z)$. Se dice que z_0 es un **punto singular esencial**, si la parte principal de f en z_0 tiene un número infinito de términos diferentes de cero.

De la definición de punto singular esencial, se deduce que z_0 es un punto singular esencial de $f(z)$, si y sólo si,

$$\lim_{z \to z_0} f(z)$$

no existe (ni finito ni infinito).

De esta forma, para determinar si un punto singular aislado z_0 es o no un punto singular esencial de $f(z)$, no es necesario construir el desarrollo de Laurent de $f(z)$ alrededor de z_0.

Un ejemplo.

Demostrar que $z_0 = 0$ es un punto singular esencial de $f(z) = e^{1/z}$.

Solución. De acuerdo al teorema anterior debemos verificar que

$$\lim_{z \to z_0} e^{\frac{1}{z}}$$

no existe.

Para ello, podemos ver que si nos acercamos al origen por la recta $y = 0$, $x > 0$, vemos que la función $f(z)$ crece sin límite cuando $x \to 0$; mientras que si nos acercamos al origen por la recta $y = 0$, $x < 0$, vemos que la función $f(z)$ tiende a cero cuando $x \to 0$.

Con lo anterior, podemos concluir que se satisface el teorema ya que el límite no existe, por lo que podemos afirmar que $z_0 = 0$ es un punto singular esencial de $f(z) = e^{1/z}$.

Por otro lado, si nos decidimos por utilizar la definición de punto singular esencial, es necesario recordar que el desarrollo de Laurent de $e^{1/z}$ alrededor de $z_0 = 0$ está dado por

$$e^{1/z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}$$

para todo z tal que $|z| > 0$.

Observamos que la parte principal posee infinitos coeficientes distintos de cero, por lo tanto, $z_0 = 0$ es un punto singular esencial de la función $f(z) = e^{1/z}$.

Punto Singular Removible

Definición. Sea z_0 un punto singular aislado de una función $f(z)$. Se dice que z_0 es un **punto singular removible**, si todos los coeficientes de la parte principal de f en z_0 son cero.

Si z_0 es un punto singular removible de $f(z)$, el desarrollo de Laurent (5.1) toma la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

de donde se deduce que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a_0 .$$

Por lo tanto, para determinar si un punto singular aislado z_0 es un punto singular removible de $f(z)$, basta con verificar que

$$\lim_{z\to z_0} f(z)$$

existe y es finito.

Un ejemplo.

Verificar que $z_0 = 0$ es un punto singular removible de $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$.

Solución. Para verificar lo solicitado bastará mostrar que

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\sin z}{z}$$

existe; así que aplicando la regla de L'Hopital se tiene que

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\sin z}{z}=\lim_{z\to z_0}\frac{\cos z}{1}=1$$

por lo tanto, al existir el límite, se demuestra que $z_0 = 0$ es un punto singular removible de la función $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$.

c).- Residuo.

Definición. Sea $f(z)$ una función analítica sobre un contorno cerrado simple C y en todo punto interior a C, salvo en z_0. El residuo de $f(z)$ en z_0, que se denota por $\operatorname{Res}\left[f(z)\right]_{z=z_0}$, está definido por

$$\operatorname{Res}\left[f(z)\right]_{z=z_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz$$

Cuando z_0 es un punto singular aislado de una función f, hay un número positivo R_2 tal que f es analítica en todos los puntos z para los cuales $0 < |z - z_0| < R_2$.

Consecuentemente, la función $f(z)$ tiene una representación en serie de Laurent

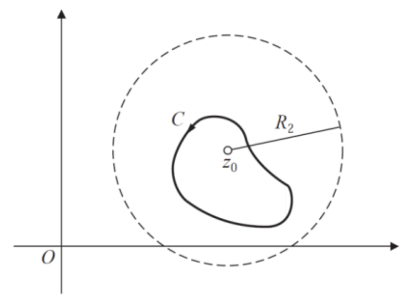
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

donde los coeficientes a_n y b_n tienen cierta representación integral vista anteriormente.

En particular, los coeficientes de la parte principal (b_n) están dados por

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{-n+1}}\quad (n=1,2,\ldots)$$

donde C es cualquier contorno simple cerrado orientado positivamente alrededor de z_0 que queda dentro del disco perforado $0 < |z - z_0| < R_2$, tal como se muestra en la figura.



Cuando $n = 1$, la expresión para b_n anterior se reescribe como

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz$$

de donde

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i b_1$$

Si se compara esta última expresión con la definición de residuo uno encuentra que el número complejo b_1, que corresponde al coeficiente de $1/(z - z_0)$ en el desarrollo de Laurent para $f(z)$, es precisamente el residuo de f en el punto singular aislado z_0, por lo que podemos escribir

$$\text{Res}\left[f(z) \right]_{z=z_0} = b_1$$

Con todo lo anterior, podemos concluir que el residuo de la función $f(z)$ en el punto singular aislado z_0 es igual al coeficiente de $(z - z_0)^{-1}$ en la serie de Laurent que representa a $f(z)$ en una región anular dada por $0 < |z - z_0| < R_2$, para cierto número real $R_2 > 0$.

Si usamos la definición de residuo, y este último resultado, encontramos una expresión muy útil para calcular ciertas integrales alrededor de contornos cerrados simples, a saber

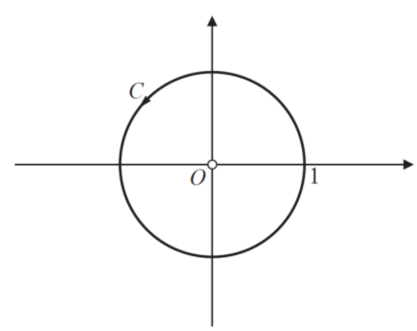
$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \text{Res}\left[f(z) \right]_{z=z_0}$$

siempre y cuando estemos en condiciones de poder evaluar $\text{Res}\left[f(z) \right]_{z=z_0}$.

Un ejemplo.

Calcule la integral

$$\int_C e^{1/z} dz$$



donde C es el círculo unitario centrado en el origen, tal como se muestra en la figura anexa.

Solución. Como el integrando $e^{1/z}$ es analítico en todo el plano complejo excepto en el origen, entonces tiene una representación en series de Laurent la cual es válida para todo z tal que $0 < |z| < \infty$; por lo que, acorde con lo visto anterior mente, el valor de la integral es $2\pi i$ veces el valor del residuo de $f(z)$ en el punto $z = 0$.

Por lo que haremos uso del desarrollo de Laurent para la función $f(z) = e^{1/z}$ alrededor del punto $z = 0$, encontrado previamente, y que está dado por

$$e^{1/z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$$

De este resultado, vemos que el residuo de $f(z)$ en el punto $z = 0$ es

$$\operatorname{Res}\left[f(z)\right]_{z=z_0} = \operatorname{Res}\left[e^{1/z}\right]_{z=0} = 1$$

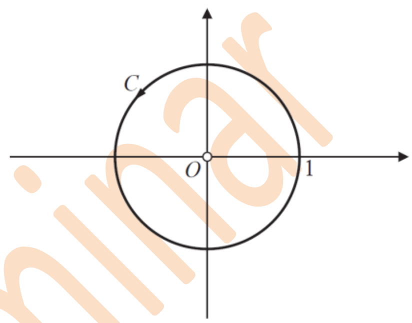
por lo que

$$\int_C e^{1/z} dz = 2\pi i$$

Otro ejemplo.

Considere la integral

$$\int_C z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$$



donde C es el círculo unitario orientado positivamente centrado en el origen, a saber, $|z| = 1$.

Solución. Para determinar el residuo, retomamos la representación en series de Maclaurin para sen z, a saber

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots \qquad \text{(Válida para } |z| < \infty)$$

y la usamos para escribir

$$z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) = z - \frac{1}{3!}\frac{1}{z} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^3} - \frac{1}{7!}\frac{1}{z^5} + \ldots \qquad \text{(Válida para } 0 < |z| < \infty)$$

Como podemos ver, el coeficiente de z^{-1}, y que corresponde al residuo del desarrollo, es $-\frac{1}{3!}$ por lo que

$$\int_C z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i\left(-\frac{1}{3!}\right) = -i\frac{\pi}{3}$$

Un ejemplo adicional.

Muestre que

$$\int_C e^{1/z^2} dz = 0$$

Solución. Considerando que la serie de Laurent para el integrando está dada por

$$e^{1/z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! z^{2n}}$$

Vemos que el coeficiente de z^{-1} es cero, ya que en la serie $n = 1$ corresponde a z^{-2}, con lo que se demuestra lo pedido.

Ejercicios.

Use las ideas anteriores para evaluar la integral de cada una de las siguientes funciones alrededor del contorno C dado por la circunferencia $\left|z-\frac{3}{2}\right|=2$ orientada positivamente:

a) $f(z)=\dfrac{z^5}{1-z^3}$

b) $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$

c) $f(z)=\dfrac{1}{z}$

Soluciones: (a) $-2\pi i/3$; (b) 0; (c) $2\pi i$.

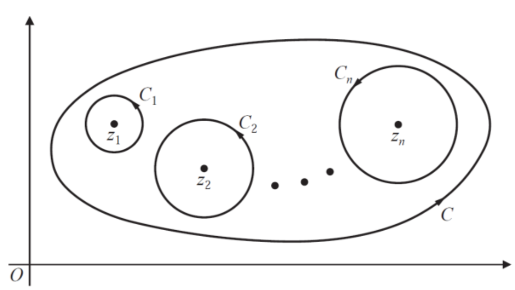
d).- Teorema de Cauchy.

Si una función f es analítica en la región interior a un contorno simple cerrado C, excepto en un número finito de puntos, estos puntos singulares son aislados, tal como lo vimos anteriormente. El siguiente teorema hace uso de este resultado y se conoce como *Teorema de los residuos de Cauchy*.

Teorema. Sea C un contorno cerrado simple orientado positivamente. Si una función f es analítica dentro y sobre C, excepto en un número finito N de puntos singulares z_k ($k = 1, 2,\ldots, \boldsymbol{N}$) interiores a C, entonces

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{N}\text{Res}\left[f(z)\right]_{z=z_k}$$

Demostración. Para probar este teorema consideremos circunferencias orientadas positivamente C_k, lo suficientemente pequeñas para que no tengan puntos en común, centradas en las singularidades z_k e interiores al contorno C, tal como se muestra en la figura.



Las circunferencias C_k, junto con el contorno C, forman el contorno de una región cerrada en la que f es analítica y cuyo interior es un dominio múltiplemente conexo. Así que, una vez aisladas las singularidades, podemos aplicar el Teorema de Cauchy-Goursat el cual establece que "si una función f es analítica en todos los puntos interiores a un contorno, entonces el valor de la integral de dicha función f es cero alrededor de dicho contorno", en este caso podemos escribir

$$\int_C f(z)dz-\sum_{k=1}^{N}\int_{C_k} f(z)dz=0$$

que se reduce a la expresión del teorema, ya que

$$\int_{C_k} f(z)dz = 2\pi i\text{Res}\left[f(z)\right]_{z=z_k}$$

con lo que queda demostrado el teorema de los residuos de Cauchy.

Un ejemplo.

Calcular la integral

$$\int_C \frac{z-2}{z(z-1)}dz$$

donde C es la circunferencia $|z| = 3$ orientada positivamente.

Solución. Sea $f(z) = \dfrac{z-2}{z(z-1)}$. Los puntos singulares de f son $z_1 = 0$ y $z_2 = 1$. Se observa que ambos son puntos interiores de C, además, z_1 y z_2 son polos simples de f. De esta forma,

$$\operatorname{Res}\left[f(z)\right]_{z=z_0} = \operatorname{Res}\left[\frac{z-2}{z(z-1)}\right]_{z=0} = 2$$

y

$$\operatorname{Res}\left[f(z)\right]_{z=z_0} = \operatorname{Res}\left[\frac{z-2}{z(z-1)}\right]_{z=1} = -1$$

Como z_1 y z_2 son puntos singulares aislados de f y f es una función analítica en C y en su interior, salvo en z_1 y z_2, entonces por el Teorema de los Residuos

$$\int_C \frac{z-2}{z(z-1)}dz = 2\pi i\left[2+(-1)\right] = 2\pi i$$

Otro ejemplo.

Calcular la integral

$$\int_C \left(1+z+z^2\right)\left(e^{1/z}+e^{1/(z-1)}+e^{1/(z-2)}\right)dz$$

donde C es un contorno cerrado simple que contiene en su interior a los puntos $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ y $z_3 = 2$.

Solución. En este caso, tenemos que

$$f(z) = \left(1+z+z^2\right)\left(e^{1/z}+e^{1/(z-1)}+e^{1/(z-2)}\right)$$

la cual puede ser reescrita como la suma de las funciones $f_1(z)$, $f_2(z)$ y $f_3(z)$ definidas, respectivamente, como

$$f_1(z) = e^{1/z}\left(1+z+z^2\right)$$

$$f_2(z) = e^{1/(z-1)}\left(1+z+z^2\right)$$

$$f_3(z) = e^{1/(z-2)}\left(1+z+z^2\right)$$

Calculemos el residuo de $f_1(z)$ en $z_1 = 0$. Se tiene que $f_2(z)$ y $f_3(z)$ son analíticas en $z_1 = 0$, luego poseen desarrollo de Taylor. De esta forma, el residuo de $f(z)$ en $z_1 = 0$ viene dado por el coeficiente de z^{-1} en el desarrollo de Laurent de $f_1(z)$ alrededor de $z_1 = 0$,

$$f_1(z) = \left(1+z+z^2\right)\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-n}\right]$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{1-n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{2-n}$$

válida para $0 < |z| < 1$. De aquí se deduce que

$$\operatorname{Res}\left[f(z)\right]_{z_1=0} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6} = \frac{10}{6}$$

Ahora calculemos el residuo de $f_2(z)$ en $z_2 = 1$. Se tiene que $f_1(z)$ y $f_3(z)$ son analíticas en $z_2 = 1$, luego poseen desarrollo de Taylor. De esta forma, el residuo de $f(z)$ en $z_2 = 1$ viene dado por el coeficiente de $(z - 1)^{-1}$ en el desarrollo de Laurent de $f_2(z)$ alrededor de $z_2 = 1$,

$$f_2(z) = e^{1/(z-1)}\left(1+z+z^2\right) = e^{1/(z-1)}\left(1+\left((z-1)+1\right)+\left((z-1)+1\right)^2\right)$$
$$f_2(z) = e^{1/(z-1)}\left(2+(z-1)+\left((z-1)+1\right)^2\right)$$
$$f_2(z) = \left(3+3(z-1)+(z-1)^2\right)\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z-1)^{-n}\right]$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{n!}(z-1)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{n!}(z-1)^{1-n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z-1)^{2-n}$$

válida para $0 < |z - 1| < 1$. De aquí se deduce que

$$\operatorname{Res}\left[f(z)\right]_{z_2=1} = 3+\frac{3}{2}+\frac{1}{6} = \frac{28}{6}$$

Finalmente, calculemos el residuo de $f_3(z)$ en $z_3 = 2$. Se tiene que $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son analíticas en $z_3 = 2$, luego poseen desarrollo de Taylor. De esta forma, el residuo de $f(z)$ en $z_3 = 2$ viene dado por el coeficiente del término $(z - 2)^{-1}$ en el desarrollo de Laurent de $f_3(z)$ alrededor de $z_3 = 2$,

$$f_3(z) = e^{1/(z-2)}\left(1+z+z^2\right) = e^{1/(z-2)}\left(1+\left((z-2)+2\right)+\left((z-2)+2\right)^2\right)$$
$$f_3(z) = \left(7+5(z-2)+(z-2)^2\right)\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z-2)^{-n}\right]$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{7}{n!}(z-2)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{n!}(z-2)^{1-n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z-2)^{2-n}$$

válida para $0 < |z - 2| < 1$. De aquí se deduce que

$$\operatorname{Res}\left[f(z)\right]_{z_3=2} = 7+\frac{5}{2}+\frac{1}{6} = \frac{58}{6}$$

Con estos resultados, y usando el teorema de los residuos de Cauchy, tenemos que

$$\int_C \left(1+z+z^2\right)\left(e^{1/z}+e^{1/(z-1)}+e^{1/(z-2)}\right)dz = 2\pi i\left[\frac{10}{6}+\frac{28}{6}+\frac{58}{6}\right] = 32\pi i$$

Ejercicios.

Use el teorema de los residuos de Cauchy para evaluar las integrales, sobre la circunferencia $|z| = 3$ recorrida en sentido positivo, de las funciones

a) $f(z) = \dfrac{e^{-z}}{z^2}$

b) $f(z) = \dfrac{e^{-z}}{(z-1)^2}$

c) $f(z) = z^2 \exp\left(\dfrac{1}{z}\right)$

d) $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2 - 2z}$

Soluciones: (a) $-2\pi i$; (b) $-2\pi i/e$; (c) $\pi i/3$; (d) $2\pi i$.

Cálculo de residuos mediante fracciones parciales

En situaciones en las que tenemos una función racional $f(z)$ de la forma

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

donde $q(z)$ es un polinomio de grado mayor al de $p(z)$, es posible usar la expansión en fracciones parciales para encontrar los valores del residuo, tal como lo establece el siguiente teorema.

Teorema. Sea $f(z)$ una función racional, con N polos simples z_k, entonces la expansión en fracciones parciales de $f(z)$ tiene la forma

$$f(z) = \frac{A_1}{(z-z_1)} + \frac{A_2}{(z-z_2)} + \frac{A_3}{(z-z_3)} + \ldots + \frac{A_N}{(z-z_N)}$$

donde los números complejos A_k, denominados coeficientes de la expansión, están dados por

$$A_k = \mathrm{Res}[f(z)]_{z=z_k} = [(z-z_k)f(z)]_{z=z_k} .$$

e).- Residuos y polos.

Hasta aquí, cuando una función $f(z)$ tiene una singularidad esencial en z_0, la única manera que tenemos para determinar el residuo en dicho punto consiste en obtener el desarrollo de Laurent alrededor de z_0 y elegir el coeficiente apropiado, correspondiente al término $(z - z_0)^{-1}$ de la parte principal de dicho desarrollo.

Pero si la función tiene un polo en z_0 no es necesario obtener todo el desarrollo de Laurent alrededor de z_0 para encontrar el coeficiente que buscamos.

Existen diversos métodos de los que podemos echar mano siempre y cuando sepamos que la singularidad es un polo, uno de ellos es el siguiente teorema que nos permite identificar si un punto z_0 es un polo de $f(z)$ y, además, nos dice cómo calcular $\mathrm{Res}\left[f(z)\right]_{z=z_0}$.

Cálculo del Residuo en un Polo

Teorema. Sea $f(z)$ una función de variable compleja. Supongamos que para cierto entero positivo m, la función

$$\phi(z) = \left(z - z_0\right)^m f(z)$$

se puede definir en z_0 de modo que sea analítica ahí y $\phi(z_0) \neq 0$. Entonces $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0, y su residuo ahí está dado por

$$\mathrm{Res}\left[f(z)\right]_{z=z_0} = \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

Vale la pena notar que en el caso en que el polo es simple ($m = 1$), la expresión anterior se reduce a

$$\mathrm{Res}\left[f(z)\right]_{z=z_0} = \phi(z_0).$$

Demostración. Considerando que $\phi(z)$ es analítica en z_0, admite un desarrollo de Taylor alrededor de z_0, tal que

$$\phi(z) = \phi(z_0) + \frac{\phi'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{\phi''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \ldots + \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}(z-z_0)^{(m-1)}$$
$$+\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\phi^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

en algún entorno $|z - z_0| < \varepsilon$.

Así que podemos escribir $f(z)$ como

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m}\left[\phi(z_0) + \frac{\phi'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{\phi''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \ldots + \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}(z-z_0)^{(m-1)}\right.$$
$$\left.+\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\phi^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n\right]$$

o

$$f(z) = \frac{\phi(z_0)}{(z-z_0)^m} + \frac{\phi'(z_0)}{1!(z-z_0)^{m-1}} + \frac{\phi''(z_0)}{2!(z-z_0)^{m-2}} + \ldots + \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!(z-z_0)}$$
$$+\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\phi^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-m}$$

cuando $0 < |z - z_0| < \varepsilon$.

Este desarrollo en serie de Laurent, junto con el hecho de que $\phi(z_0) \neq 0$, implica que

- z_0 es, en efecto, un polo de orden m de $f(z)$; y
- el coeficiente de $1/(z - z_0)$ confirma que el residuo de $f(z)$ en z_0 es

$$\mathrm{Res}\left[f(z)\right]_{z=z_0} = \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

Con lo que se demuestra el teorema.

Ejercicios.

Use el teorema anterior, donde aplique, para evaluar los residuos de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(z)=\dfrac{e^{-z}}{(z-1)^2}$

b) $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$

c) $f(z)=\dfrac{1}{z}$

d) $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2-2z}$

e) $f(z)=\dfrac{e^{-z}}{z^2}$

f) $f(z)=z^2\exp\left(\dfrac{1}{z}\right)$

g) $f(z)=\dfrac{z^5}{1-z^3}$

Residuos al infinito

Teorema. Si una función f es analítica en todo el plano finito a excepción de un número finito de puntos singulares interiores a un contorno cerrado simple C orientado positivamente, entonces

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)\right]_{z=z_0}$$

f).- Ceros de funciones analíticas.

Hay una relación estrecha entre los ceros y los polos de una función, de hecho más adelante veremos cómo los ceros pueden llevar a polos; sin embargo, previo a ello, veamos algunas ideas que nos pueden ser útiles en esto.

Anteriormente hemos visto que si f es una función analítica en un punto z_0, entonces existen todas sus derivadas $f^{(n)}(z_0)$ (para $n = 1, 2, \ldots$); lo anterior permite enunciar el siguiente teorema.

Teorema. Una función f analítica en z_0, tiene un cero de orden m en z_0 si, y solo si, existe una función g, analítica y no nula en z_0, tal que

$$f(z)=\left(z-z_0\right)^m g(z)$$

Demostración. Partiendo de que g es analítica y no nula en z_0, podemos hacer un desarrollo de Taylor para $g(z)$

$$g(z)=g(z_0)+\frac{g'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{g''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\frac{g'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^3+\cdots$$

válido en un entorno $|z - z_0| < \varepsilon$.

Con esto, podemos escribir $f(z)$ como

$$f(z)=g(z_0)(z-z_0)^m+\frac{g'(z_0)}{1!}(z-z_0)^{m+1}+\frac{g''(z_0)}{2!}(z-z_0)^{m+2}+\frac{g'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^{m+3}+\cdots$$

que al comparar con su serie de Taylor

$$\begin{aligned}f(z)= f(z_0)&+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots+\frac{f^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}(z-z_0)^{m-1}\\&+\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z-z_0)^m+\frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0)^{m+1}+\cdots\end{aligned}$$

vemos que

$$f(z_0)=f'(z_0)=f''(z_0)=f^{(m-1)}(z_0)=0$$

y

$$g(z_0)=\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}\neq 0$$

Esta última expresión nos lleva a que $f^{(m)}(z_0) = 0$, lo que implica que efectivamente z_0 es un cero de orden m de f, con lo que se demuestra en un sentido el teorema.

De manera recíproca, se puede partir de que z_0 es un cero de orden m de f, lo que implica que el desarrollo de Taylor tiene los primeros m términos son cero, de tal forma que

$$f(z)=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

$$f(z)=\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z-z_0)^m+\frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0)^{m+1}+\cdots$$

es decir,

$$f(z)=(z-z_0)^m\left[\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}+\frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0)^1+\frac{f^{(m+2)}(z_0)}{(m+2)!}(z-z_0)^2+\cdots\right]$$

de donde vemos que $g(z)$ tiene la forma

$$g(z)=\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}+\frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z-z_0)^1+\frac{f^{(m+2)}(z_0)}{(m+2)!}(z-z_0)^2+\cdots$$

con

$$g(z_0)=\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}$$

Lo que completa la demostración del teorema.

Un ejemplo.

Considerando la función $f(z) = z^2 + 4$, identifique y clasifique el (o los) cero(s).

Solución. Los ceros de $f(z)$ son $z_0 = \pm 2i$, ya que $f(z) = (z + 2i)(z - 2i)$

- Considerando $z_0 = +2i$, escribamos $g(z)$ como

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^m} = \frac{(z + 2i)(z - 2i)}{(z - 2i)^m}$$

que resulta diferente de cero en $z_0 = 2i$ cuando $m = 1$, por lo que $z_0 = +2i$ es un cero de orden 1.

- Considerando $z_0 = -2i$, escribamos $g(z)$ como

$$g(z) = \frac{(z + 2i)(z - 2i)}{(z + 2i)^m}$$

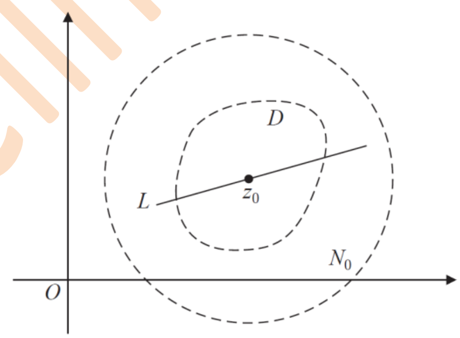
que resulta diferente de cero en $z_0 = -2i$ cuando $m = 1$, por lo que $z_0 = -2i$ es un cero de orden 1.

Para continuar, establecemos un par de teoremas útiles.

Teorema 1. Dados una función $f(z)$ y un punto z_0, supongamos que

i. f es analítica en z_0
ii. $f(z_0) = 0$, pero f no es idénticamente nula en ningún entorno de z_0.

Entonces $f(z) \neq 0$ en algún entorno perforado $0 < |z - z_0| < \varepsilon$.



Teorema 2. Dados una función $f(z)$ y un punto z_0, supongamos que

i. f es analítica en un entorno N_0 de z_0
ii. $f(z_0) = 0$ y $f(z) = 0$, en todos los puntos de un dominio D o de un segmento recto que contengan a z_0.

Entonces $f(z) \equiv 0$ en N_0; esto es, $f(z)$ es idénticamente nula en el entorno N_0.

Una vez establecidos los teoremas anteriores, vamos a ver el teorema que muestra cómo los ceros de orden m de una función f pueden producir polos de orden m.

Teorema. Supongamos que

i. $p(z)$ y $q(z)$ son funciones analíticas en el punto z_0
ii. $p(z_0) \neq 0$ y $q(z)$ tiene un cero de orden m en z_0.

Entonces el cociente $p(z)/q(z)$ tiene un polo de orden m en z_0.

Demostración. Puesto que q tiene un cero de orden m en z_0, el teorema 1 anterior implica que existe un entorno perforado de z_0 en el cual $q(z)$ es distinto de 0, con lo que z_0 es un punto singular aislado del cociente $p(z)/q(z)$.

Por otro lado, podemos escribir

$$q(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

donde g es analítica y no nula en z_0, lo que a su vez, permite escribir

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z)/g(z)}{(z - z_0)^m}$$

Como $p(z)/g(z)$ es analítica y no nula en z_0, se sigue que z_0 es un polo de orden m de $p(z)/q(z)$.

Un ejemplo.

Las funciones $p(z) = z$ y $q(z) = z^2 + 4$ son enteras, y además sabemos que $q(z)$ tiene un cero de orden $m = 1$ en el punto $z_0 = 2i$. Por lo tanto, el teorema anterior implica que la función $f(z)$ definida como

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{z}{z^2 + 4}$$

tiene un polo de orden $m = 1$.

El teorema anterior pone a nuestra disposición otro método para identificar los polos simples y calcular los residuos correspondientes que, en ocasiones, resulta más fácil de aplicar que los procedimientos vistos anteriormente.

Teorema. Sean p y q funciones analíticas en un punto z_0. Si

$$p(z_0) \neq 0,\ q(z_0) = 0 \text{ y } q'(z_0) \neq 0$$

z_0 es un polo simple del cociente $p(z)/q(z)$ con

$$\operatorname{Res}\left[\frac{p(z)}{q(z)}\right]_{z=z_0} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Demostración. Observemos que, dadas las condiciones impuestas, z_0 es un cero de orden $m = 1$ de la función q. Así pues

$$q(z) = (z - z_0)g(z)$$

donde $g(z)$ es analítica y no nula en z_0.

Además z_0 es un polo simple del cociente $p(z)/q(z)$, que puede escribirse como

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z)/g(z)}{z - z_0}$$

Ahora bien, $p(z)/g(z)$ es analítica y no nula en z_0, así que recordando el teorema para el cálculo del residuo en un polo simple, a saber

$$\operatorname{Res}[f(z)]_{z=z_0} = \phi(z_0) \text{ donde } \phi(z) = (z - z_0) f(z),$$

podemos escribir

$$\operatorname{Res}\left[\frac{p(z)}{q(z)}\right]_{z=z_0} = \frac{p(z_0)}{g(z_0)}$$

Pero como $q(z) = (z - z_0)g(z)$, podemos derivar con respecto a z y evaluar en $z = z_0$, para obtener sucesivamente

$$q'(z) = (z - z_0)'g(z) + (z - z_0)g'(z)$$

$$q'(z) = g(z) + (z - z_0)g'(z)$$

$$q'(z_0) = g(z_0) + (z_0 - z_0)g'(z)$$

con lo que, finalmente, se tiene

$$\text{Res}\left[\frac{p(z)}{q(z)}\right]_{z=z_0} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

lo que demuestra el teorema.

Un ejemplo.

Usando el teorema anterior, demostrar que el punto $z = 0$ es un polo simple de la función

$$f(z) = \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

y que su residuo es 1.

Solución. A partir de la expresión para $f(z)$, identificamos

$$p(z) = 1$$
$$q(z) = \sin z$$

A continuación verificamos las condiciones que deben cumplir $p(z)$ y $q(z)$, a saber

$$p(z_0) \neq 0,\ q(z_0) = 0 \text{ y } q'(z_0) \neq 0$$

que en este caso resultan

$$p(0) = 1 \neq 0,$$

$$q(0) = \text{sen } 0 = 0$$

y

$$q'(0) = \cos(0) = 1 \neq 0$$

Por lo que podemos concluir que z = 0 es un polo simple de csc z.

Mientras que para calcular el residuo, usamos

$$\text{Res}\left[\frac{p(z)}{q(z)}\right]_{z=z_0} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

es decir

$$\text{Res}\left[\csc z\right]_{z=0} = \frac{1}{1} = 1$$

Otro ejemplo.

Pruebe que

$$\text{Res}\left[z\sec z\right]_{z=z_n}=(-1)^{n+1}z_n$$

donde

$$z_n=\frac{\pi}{2}+n\pi$$

con $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

Solución. En este caso, aunque no vemos el cociente, este aparece cuando escribimos $f(z)$ como

$$f(z)=z\sec z=\frac{z}{\cos z}$$

de donde podemos identificar

$$p(z)=z$$
$$q(z)=\cos z$$

A continuación verificamos las condiciones que deben cumplir $p(z)$ y $q(z)$, a saber

$$p(z_0)\neq 0,\ q(z_0)=0 \text{ y } q'(z_0)\neq 0$$

que en este caso resultan

$$p\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)=\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)\neq 0$$

$$q\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(n\pi)-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(n\pi)=0$$

y

$$\begin{aligned}q'\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)&=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)\\&=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(n\pi)-\sin(n\pi)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\\&=-\cos(n\pi)=-(-1)^n=(-1)^{n+1}\end{aligned}$$

Por lo que podemos concluir que la función

$$f(z)=z\sec z=\frac{z}{\cos z}$$

tiene un polo de orden m = 1 en todos los puntos

$$z_n=\frac{\pi}{2}+n\pi \quad \text{con} \quad n=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

Para calcular el residuo, usamos $$\text{Res}\left[\frac{p(z)}{q(z)}\right]_{z=z_0}=\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

es decir

$$\mathrm{Res}\left[z\sec z\right]_{z=z_n} = \mathrm{Res}\left[\frac{z}{\cos z}\right]_{z=z_n} = \frac{\left(\dfrac{\pi}{2}+n\pi\right)}{(-1)^{n+1}} = (-1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)$$

con lo que se llega al resultado deseado.

g).- Aplicación de los residuos.

Calculo de integrales impropias.

En cálculo, la integral impropia de una función $f(x)$ sobre la semirrecta $x \geq 0$ se define como

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^{R} f(x)dx \qquad (1)$$

Cuando el límite existe se dice que la integral impropia es convergente y que converge a dicho límite.

Si $f(x)$ es continua en todo x, su integral impropia sobre la recta $-\infty < x < \infty$ se define como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R_1\to\infty}\int_{-R_1}^{0} f(x)dx + \lim_{R_2\to\infty}\int_0^{R_2} f(x)dx \qquad (2)$$

y cuando los dos límites existen se dice que la integral impropia converge a la suma de ambos límites.

Definición. Esta última integral tiene otro valor asignado conocido como **valor principal de Cauchy** (VP) que se define como el número

$$VP\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\right] = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx$$

siempre que este límite exista.

Es importante mencionar que si la integral dada por la ecuación (2) es convergente, su valor principal de Cauchy (VP) existe; sin embargo, la existencia del valor principal de Cauchy NO garantiza la convergencia de la integral (2), tal como se muestra en el ejemplo siguiente.

Un ejemplo.

Observemos que para la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} xdx$$

el valor principal es

$$VP\left[\int_{-\infty}^{\infty} xdx\right] = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} xdx = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-R}^{R} = \lim_{R\to\infty}\left[0\right] = 0$$

Mientras que usando la expresión (2) tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} xdx = \lim_{R_1\to\infty}\int_{-R_1}^{0} xdx + \lim_{R_2\to\infty}\int_{0}^{R_2} xdx$$

$$= \lim_{R_1\to\infty}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-R_1}^{0} + \lim_{R_2\to\infty}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{R_2}$$

$$= -\lim_{R_1\to\infty}\left[\frac{R_1^2}{2}\right] + \lim_{R_2\to\infty}\left[\frac{R_2^2}{2}\right]$$

y dado que estos dos últimos límites no existen, la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} xdx$$

no existe.

Valor principal para una función impar.

Supongamos que $f(x)$ es una función impar, tal que

$$f(-x) = -f(x)$$

para todo x. En este caso tenemos que

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx = 0$$

ya que el área bajo curva de $f(x)$ ubicada entre $-R$ y 0 cancela al área bajo la curva ubicada entre 0 y R.

Con lo anterior, el valor principal de Cauchy para una función impar $f(x)$ resulta

$$VP\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\right] = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx = 0$$

Valor principal para una función par.

A continuación, supongamos que $f(x)$ es una función par, tal que

$$f(-x) = f(x)$$

para todo x.

La simetría de la función nos permite escribir

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\int_{0}^{R} f(x)dx$$

lo que permite probar que para una función par, el valor principal de Cauchy existe, y está dado por

$$VP\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\right] = 2\int_{0}^{\infty} f(x)dx$$

A continuación describiremos un método basado en los residuos que permite evaluar integrales impropias de funciones racionales pares $f(x)$ de la forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

con

$$f(-x) = f(x)$$

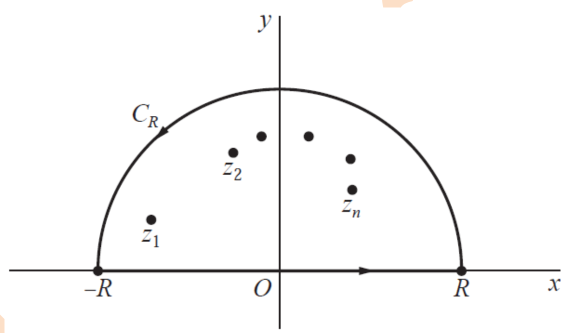
y donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios con coeficientes reales sin factores comunes.

Suponemos que $q(z)$ no tiene ceros reales y que tiene al menos un cero en el semiplano complejo superior (donde $\mathrm{Im}(z) > 0$).

El método se inicia identificando todos los ceros distintos del polinomio $q(z)$ situados en el semiplano superior, hay un número finito de ellos (dependiendo del grado del polinomio) y podemos denotarlos como $z_1, z_2, \ldots, z_n$, donde n es menor o igual que el grado N de $q(z)$.

A continuación se integra el cociente

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$



sobre el contorno semicircular formado por el segmento recto desde $z = -R$ a $z = R$ y la mitad superior de la circunferencia $|z| = R$ descrita en sentido positivo y que denotaremos por C_R, tal como se muestra en la figura.

En todo caso supondremos que R es lo suficientemente grande para que los puntos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sean todos interiores al contorno cerrado que se está considerando.

Usando el teorema de los residuos de Cauchy y la parametrización $z = x$ para el segmento recto, podemos escribir

$$\int_C f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z)]_{z=z_k}$$

de donde

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z)]_{z=z_k} - \int_{C_R} f(z)dz$$

Si

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0$$

entonces

$$VP\left[\int_{-R}^{R} f(x)dx\right] = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z)]_{z=z_k}$$

Tomando en cuenta que $f(x)$ es una función par, podemos escribir finalmente que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z)]_{z=z_k}$$

y

$$\int_0^\infty f(x)dx = \pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}[f(z)]_{z=z_k}$$

Un ejemplo.

Para evaluar la integral

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^6+1}dx$$

comenzamos observando que

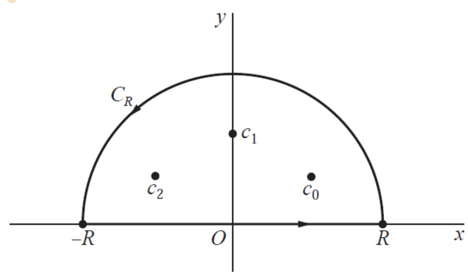
$$f(z) = \frac{z^2}{z^6+1} = \frac{p(z)}{q(z)}$$

tiene singularidades aisladas en los ceros del polinomio $q(z) = z^6 + 1$, que son las raíces sextas de -1 (= $e^{i\pi}$) y es analítica en todos los demás puntos del plano complejo.

En este caso, recordando lo visto anteriormente para el cálculo de raíces, vemos que

$$z_k = c_k = \exp\left[i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{6}\right)\right]$$

con $k = 0, 1, 2, \ldots, 5$.



Las primeras tres raíces están en el semiplano superior y las otras tres en el semiplano inferior, tal como se muestra en la figura. Cuando $R > 1$, los puntos c_k ($k = 0, 1, 2$) están en el interior de la región semicircular acotada por el contorno cerrado simple mostrado.

Así que en este caso, integrando sobre el contorno cerrado, obtenemos

$$\int_C f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i\left[B_0 + B_1 + B_2\right]$$

donde B_k es el residuo de $f(z)$ en c_k ($k = 0, 1, 2$).

Para calcular los residuos anteriores, vemos que los puntos c_k son polos simples de $f(z)$, por lo que podemos utilizar un teorema anteriormente visto que establece que

$$\text{Res}\left[\frac{p(z)}{q(z)}\right]_{z=z_0} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Si $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = 0$ y $q'(z_0) \neq 0$.

En este caso

$$B_k = \text{Res}\left[\frac{z^2}{z^6+1}\right]_{z=c_k} = \frac{c_k^2}{6c_k^5} = \frac{1}{6c_k^3}$$

Por lo que

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i\left[\frac{1}{6i} - \frac{1}{6i} + \frac{1}{6i}\right] = \frac{\pi}{3}$$

de donde

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx = \frac{\pi}{3} - \int_{C_R} f(z)dz$$

válida para toda R, tal que $R > 1$.

En este punto tenemos que considerar el cálculo de la integral del lado derecho, para ello vamos a utilizar la parametrización de C_R dada por

$$z(t) = Re^{it}$$

con $0 \leq t \leq \pi$.

A partir de lo anterior, tenemos que

$$\left|z^2\right| = \left|z\right|^2 = R^2$$

y, usando la desigualdad del triángulo para números complejos $\left(\left|z_1 + z_2\right| \geq \left\|z_1\right| - \left|z_2\right\|\right)$, podemos escribir

$$\left|z^6 + 1\right| \geq \left\|z\right|^6 - 1\right| = R^6 - 1$$

Así que si z es cualquier punto sobre el contorno C_R, entonces

$$\left|f(z)\right| = \left|\frac{z^2}{z^6 + 1}\right| \leq \frac{R^2}{R^6 - 1}$$

En este punto podemos usar un resultado que se tiene cuando evaluamos una integral sobre un contorno de longitud L en el que el módulo de la función $f(z)$ está acotado por un valor M, es decir

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq ML$$

lo cual implica que

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \leq \left(\frac{R^2}{R^6 - 1}\right)\pi R = \frac{\pi R^3}{R^6 - 1}$$

es decir

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \leq \frac{\dfrac{\pi}{R^3}}{\dfrac{R^6}{R^6} - \dfrac{1}{R^6}} = \frac{\dfrac{\pi}{R^3}}{1 - \dfrac{1}{R^6}}$$

que, en el límite cuando R → ∞, resulta cero.

Con este último resultado podemos establecer que

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{x^2}{x^6+1}dx=\frac{\pi}{3}$$

de donde, el valor principal de Cauchy está dado por

$$VP\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^6+1}dx\right]=\frac{\pi}{3}$$

Lo que permite escribir, finalmente, que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^6+1}dx=\frac{\pi}{3}$$

y como el integrando es par, también tenemos que

$$\int_{0}^{\infty}\frac{x^2}{x^6+1}dx=\frac{\pi}{6}$$

Con lo que se obtiene el resultado que se buscaba.

Ejercicios.

Utilice los residuos para calcular, en cada inciso, la integral impropia solicitada.

a) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}$

b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$

c) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}$

d) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x^2dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}$

Lema de Jordan

En la evaluación de integrales sobre el contorno C_R, cuyo integrando es de la forma $f(z)e^{iaz}$, en algunas ocasiones se hace necesario usar el llamado *Lema de Jordan*, que se enuncia a continuación.

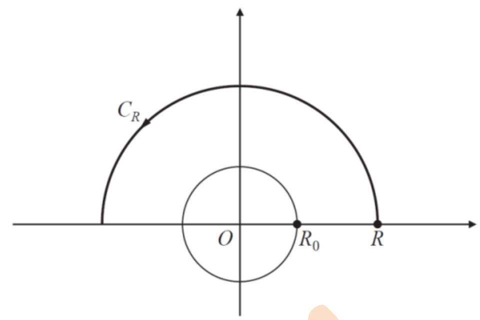
Teorema. Suponga que

(a) la función $f(z)$ es analítica en todos los puntos z del semiplano complejo superior que son exteriores a un círculo $|z| = R_0$;

(b) C_R denota el semicírculo representa-do por $z = Re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$, donde $R > R_0$;

(c) para todos los puntos z de C_R hay una constante positiva M_R tal que

$$\left| f(z) \right| \leq M_R \quad \text{y} \quad \lim_{R \to \infty} M_R = 0$$



Entonces, para toda constante positiva a,

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 0 \tag{5.17}$$

Integrales impropias en el análisis de Fourier.

Otra aplicación del teorema de los residuos aparece en el cálculo de integrales impropias convergentes de las formas

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin ax dx \qquad \text{ó} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ax dx$$

donde a es una constante positiva y, tal como lo hemos hecho, supondremos que

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios con coeficientes reales sin factores en común; además, $q(x)$ no tiene ceros reales.

Este tipo de integrales aparecen en la teoría y aplicaciones de la Integral de Fourier que veremos más adelante en este curso.

En este tipo de integrales no podemos aplicar directamente las ideas desarrolladas anteriormente para el cálculo de integrales impropias, pero aún podemos hacer algo si consideramos que

$$\int_{-R}^{R} f(x) \cos ax dx + i \int_{-R}^{R} f(x) \sin ax dx = \int_{-R}^{R} f(x) e^{iax} dx$$

es decir, en vez de calcular la integral que involucra al seno o al coseno, calculamos la integral que contiene a la exponencial y al final igualamos partes reales e imaginarias en ambos lados del resultado que se obtiene.

Lo anterior, nos conduce a que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ax dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos ax dx = \mathrm{Re}\left[2\pi i \sum_i \mathrm{Res}\left[\frac{p(z)}{q(z)} e^{iaz} \right]_{z_k} \right]$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin ax dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\sin ax dx = \operatorname{Im}\left[2\pi i\sum_i \operatorname{Res}\left[\frac{p(z)}{q(z)}e^{iaz}\right]_{z_k}\right]$$

siempre que la diferencia entre el grado de $q(x)$ y el grado de $p(x)$ sea mayor o igual a 1.

Un ejemplo.

Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin 2x}{x^4+1}dx$

Solución. En este caso identificamos

$$f(z)e^{iaz} = \frac{p(z)}{q(z)}e^{iaz} = \frac{z}{z^4+1}e^{i2z}$$

por lo que tenemos que calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin 2x}{x^4+1}dx = \operatorname{Im}\left[2\pi i\sum_i \operatorname{Res}\left[\frac{ze^{i2z}}{z^4+1}\right]_{z_k}\right]$$

Para ello advertimos que los polos z_k se ubican en los ceros de z^4+1, resultando

$$z_k = \exp\left[i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right)\right]$$

con $k = 0, 1, 2, 3$. Como los cuatro valores son distintos, podemos afirmar que corresponden a polos simples.

Para nuestro problema bastará considerar los polos ubicados en el semiplano superior, que corresponden a los valores

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1+i)$$

por lo que el cálculo del residuo se reduce a evaluar

$$\sum_k \operatorname{Res}\left[\frac{ze^{i2z}}{z^4+1}\right]_{z_k} = \sum_k \left.\frac{ze^{i2z}}{4z^3}\right|_{z_k} = \sum_k \left.\frac{e^{i2z}}{4z^2}\right|_{z_k}$$

desarrollando la sumatoria para cada polo, obtenemos

$$\sum_k \operatorname{Res}\left[\frac{ze^{i2z}}{z^4+1}\right]_{z_k} = \frac{e^{i2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right)}}{4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right)^2} + \frac{e^{i2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)\right)}}{4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)\right)^2}$$

que podemos simplificar al desarrollar las operaciones indicadas en el denominador y en el argumento de las exponenciales para llegar a

$$\sum_k \operatorname{Res}\left[\frac{ze^{i2z}}{z^4+1}\right]_{z_k} = \frac{e^{i\sqrt{2}(1+i)}}{4i} + \frac{e^{i\sqrt{2}(-1+i)}}{-4i}$$

que se reduce a

$$\sum_k \operatorname{Res}\left[\frac{ze^{i2z}}{z^4+1}\right]_{z_k} = \frac{e^{-\sqrt{2}}}{2}\left(\frac{e^{i\sqrt{2}}-e^{-i\sqrt{2}}}{2i}\right)$$

o

$$\sum_k \operatorname{Res}\left[\frac{ze^{i2z}}{z^4+1}\right]_{z_k} = \frac{e^{-\sqrt{2}}}{2}\sin\sqrt{2}$$

Así que finalmente, el resultado buscado es

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin 2x}{x^4+1}dx = \operatorname{Im}\left[2\pi i\left(\frac{e^{-\sqrt{2}}}{2}\sin\sqrt{2}\right)\right]$$

es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin 2x}{x^4+1}dx = \pi e^{-\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}$$

De hecho, una vez calculado el residuo podemos establecer un par de resultados adicionales

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos 2x}{x^4+1}dx = \operatorname{Re}\left[2\pi i\left(\frac{e^{-\sqrt{2}}}{2}\sin\sqrt{2}\right)\right] = 0$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i2x}}{x^4+1}dx = 2\pi i\left(\frac{e^{-\sqrt{2}}}{2}\sin\sqrt{2}\right) = \pi i\left(e^{-\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}\right)$$

Otro ejemplo.

Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3x}{x^2+4}dx$

Solución. En este caso identificamos

$$f(z)e^{iaz} = \frac{p(z)}{q(z)}e^{iaz} = \frac{1}{z^2+4}e^{i3z}$$

por lo que tenemos que calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3x}{x^2+4}dx = \operatorname{Re}\left[2\pi i\sum_i \operatorname{Res}\left[\frac{e^{i3z}}{z^2+4}\right]_{z_k}\right]$$

Para ello advertimos que los polos z_k se ubican en los ceros de z^2+4, resultando $z_k = \pm 2i$. Como los dos valores son distintos, podemos afirmar que corresponden a polos simples.

Para nuestro problema bastará considerar es polo ubicado en el semiplano superior, que corresponde al valor $z_k = +2i$.

Por lo que el cálculo del residuo se reduce a evaluar

$$\sum_k \operatorname{Res}\left[\frac{e^{i3z}}{z^2+4}\right]_{z_k} = \left.\frac{e^{i3z}}{2z}\right|_{z_0=2i}$$

desarrollando la sumatoria para cada polo, obtenemos

$$\sum_k \text{Res}\left[\frac{e^{i3z}}{z^2+4}\right]_{z_k} = \frac{e^{i3(2i)}}{2(2i)} = \frac{e^{-6}}{4i}$$

que se reduce a

$$\sum_k \text{Res}\left[\frac{e^{i3z}}{z^2+4}\right]_{z_k} = -i\frac{e^{-6}}{4}$$

Así que finalmente, el resultado buscado es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+4}dx = \text{Re}\left[2\pi i\left(-i\frac{e^{-6}}{4}\right)\right] = \text{Re}\left[2\pi\left(\frac{e^{-6}}{4}\right)\right]$$

es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+4}dx = \frac{\pi e^{-6}}{2}$$

De hecho, una vez calculado el residuo podemos establecer un par de resultados adicionales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3x}{x^2+4}dx = \text{Im}\left[2\pi i\left(-i\frac{e^{-6}}{4}\right)\right] = 0$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i3x}}{x^2+4}dx = 2\pi i\left(-i\frac{e^{-6}}{4}\right) = \pi\left(\frac{e^{-6}}{2}\right)$$

Integrales sobre contornos sangrados o con muescas.

Hasta este punto, en las aplicaciones de los residuos, hemos prestado atención al problema de evaluar integrales de la forma

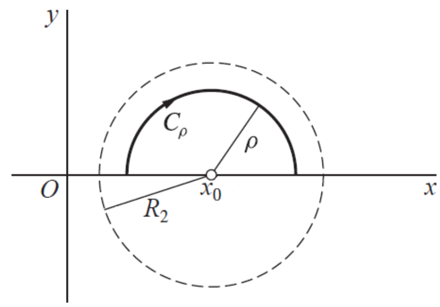
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}dx \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\sin axdx \qquad \text{ó} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\cos axdx$$

En todo momento se exigió que el denominador ($q(x)$) sea diferente de cero para todo x.

Como una última aplicación de los residuos veremos el cálculo de integrales en los que el contorno de integración pasa por singularidades, es decir, puntos en los que $q(x) = 0$; siempre que se cumplan ciertas condiciones. Este tipo de contornos se llaman *contornos sangrados o con muescas*.

Para poder trabajar con este tipo de contornos sangrados, veamos el siguiente teorema.

Teorema. Supongamos que



i. Una función $f(z)$ tiene un polo simple en un punto $z = x_0$ del eje real, con una representación en serie de Laurent en el disco perforado $0 < |z - x_0| < R_2$ y residuo B_0.

ii. C_ρ denota la mitad superior de una circunferencia $|z - x_0| = \rho$, con $\rho < R_2$, recorrida en sentido negativo (el de las agujas de un reloj).

Entonces

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{C_\rho} f(z)dz = -B_0 \pi i$$

Demostración. Suponiendo que se satisfacen las condiciones (i) y (ii) del teorema, podemos escribir las serie de Laurent de $f(z)$ como

$$f(z) = g(z) + \frac{B_0}{z - x_0} \quad \left(0 < |z - x_0| < R_2\right)$$

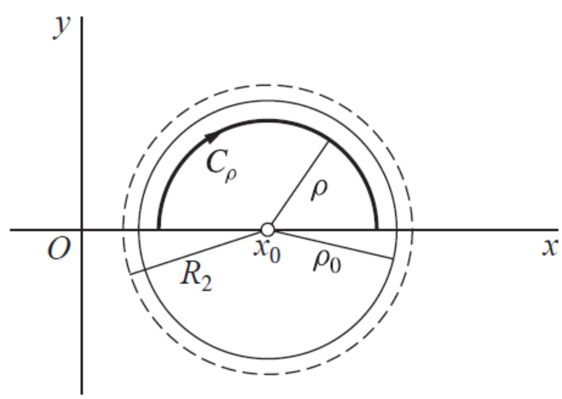
donde

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z - x_0\right)^n \quad \left(|z - x_0| < R_2\right)$$

Con esto, la integral sobre $f(z)$ se puede escribir como

$$\int_{C_\rho} f(z)dz = \int_{C_\rho} g(z)dz + B_0 \int_{C_\rho} \frac{dz}{z - x_0}$$

A continuación veamos cada una de las integrales del lado derecho de la expresión anterior, considerando el límite cuando $\rho \to 0$.



La función $g(z)$ es continua cuando $|z - x_0| < R_2$, por lo que si tomamos un número ρ_0 tal que

$$\rho < \rho_0 < R_2,$$

$g(z)$ debe estar acotada en el disco cerrado $|z - x_0| < \rho_0$, .

Así pues, existe una constante M tal que

$|g(z)| \leq M$ siempre que $|z - x_0| < \rho_0$

con lo anterior, puesto que la longitud de C_ρ es $L = \pi\rho$, se tiene

$$\left|\int_{C_\rho} g(z)dz\right| \leq ML = M\pi\rho$$

Por consiguiente

$$\lim_{\rho \to 0} \left|\int_{C_\rho} g(z)dz\right| = 0$$

Para evaluar la segunda integral, parametricemos la semicircunferencia $-C_\rho$ como

$$z = x_0 + \rho e^{i\theta} \quad 0 \le \theta \le \pi$$

así que

$$z - x_0 = \rho e^{i\theta}$$

Con lo que podemos escribir la integral como

$$\begin{aligned}
\int_{C_\rho} \frac{dz}{z - x_0} &= -\int_{-C_\rho} \frac{dz}{z - x_0} \\
&= -\int_0^{\pi} \frac{1}{\rho e^{i\theta}} \rho i e^{i\theta} d\theta \\
&= -i\int_0^{\pi} d\theta = -i\pi
\end{aligned}$$

por lo que

$$\lim_{\rho \to 0} \left(\int_{C_\rho} \frac{dz}{z - x_0} \right) = -i\pi$$

Finalmente, podemos usar los resultados anteriores, correspondientes a cada una de las integrales para escribir

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{C_\rho} f(z)dz = \lim_{\rho \to 0} \int_{C_\rho} g(z)dz + B_0 \lim_{\rho \to 0} \int_{C_\rho} \frac{dz}{z - x_0}$$

como

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{C_\rho} f(z)dz = -B_0 \pi i$$

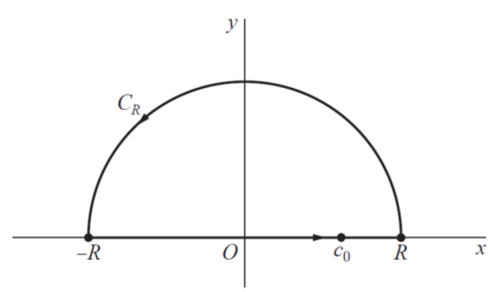
con lo que se demuestra el teorema.

Un ejemplo:

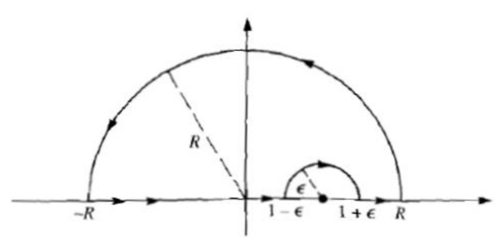
Encuentre el valor principal de Cauchy para la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x - 1} dx$$

Solución. En este caso no podemos considerar un contorno como los empleados anteriormente porque el polo de $f(x)$, $c_0 = 1$, forma parte del contorno tal como se muestra en la figura anexa.



Sin embargo, considerando la idea planteada en el teorema anterior podemos considerar el siguiente contorno sangrado, con el que rodeamos la singularidad mediante una muesca (o sangría) de radio ε centrada en c_0.



Con esto, podemos extender la función $f(x)$ al plano complejo considerando que

$$f(z) = \frac{e^{i3z}}{z - 1}$$

por lo que aplicando el teorema de Cauchy podemos escribir

$$\int_C \frac{e^{i3z}}{z-1}dz = \int_{-R}^{1-\varepsilon} \frac{e^{i3x}}{x-1}dx + \int_{C_\rho} \frac{e^{i3z}}{z-1}dz + \int_{1+\varepsilon}^{R} \frac{e^{i3x}}{x-1}dx + \int_{C_R} \frac{e^{i3z}}{z-1}dz = 0$$

Queda de tarea demostrar que la última integral, en el límite cuando $R \to \infty$, es cero.

A continuación, vamos a evaluar la segunda integral en el límite cuando $\varepsilon \to 0$ considerando que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_\rho} f(z)dz = -B_0 \pi i$$

lo que implica evaluar el residuo B_0 de

$$f(z) = \frac{e^{i3z}}{z-1}$$

En este caso, podemos usar

$$B_0 = \text{Res}\left[\frac{e^{i3z}}{z-1}\right]_{c_0=1} = \left.\frac{e^{i3z}}{1}\right|_{c_0=1} = e^{3i}$$

con lo que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_\rho} f(z)dz = -e^{3i} \pi i$$

Una vez tomados los límites $R \to \infty$ y $\varepsilon \to 0$ podemos escribir

$$\int_{-R}^{1-\varepsilon} \frac{e^{i3x}}{x-1}dx + \int_{C_\rho} \frac{e^{i3z}}{z-1}dz + \int_{1+\varepsilon}^{R} \frac{e^{i3x}}{x-1}dx + \int_{C_R} \frac{e^{i3z}}{z-1}dz = 0$$

como

$$\lim_{\substack{R \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} \left[\int_{-R}^{1-\varepsilon} \frac{e^{i3x}}{x-1}dx + \int_{1+\varepsilon}^{R} \frac{e^{i3x}}{x-1}dx\right] - i\pi e^{3i} = 0$$

En el límite indicado, la primera parte de la ecuación se reduce al valor principal de Cauchy para la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i3x}}{x-1}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x + i \sin 3x}{x-1}dx$$

Así pues,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x-1}dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3x}{x-1}dx = i\pi e^{3i} = i\pi\left[\cos 3 + i \sin 3\right]$$

con lo que igualando partes real e imaginaria por separado, nos permite escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x-1}dx = -\pi \sin 3$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3x}{x-1}\,dx = \pi \cos 3$$

Vale la pena mencionar que en este ejemplo el integrando de la integral real que hemos evaluado tenía una discontinuidad en $x = 1$. La integración se efectuó a largo de un contorno sangrado alrededor del valor de z que corresponde a este punto. Cuando el integrando tenga más de una discontinuidad es necesario emplear contornos de integración con muescas *en todos y cada uno* de los puntos de discontinuidad.

Por ejemplo, para calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2-9}\,dx$$

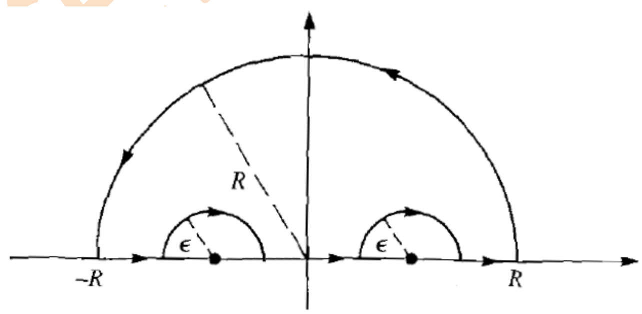
se deben considerar muescas en $z = \pm 3$.

Otro ejemplo:

Encuentre el valor principal de Cauchy para la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2-16}\,dx$$

Solución. En este caso tenemos dos polos simples en $x = \pm 4$, por lo que debemos considerar un contorno sangrado que nos permita rodear las singularidades mediante muescas (o sangrías) de radio ε centradas en $z = \pm 4$.



Con esto, podemos extender la función $f(x)$ al plano complejo considerando que

$$f(z) = \frac{e^{i2z}}{z^2-16}$$

por lo que aplicando el teorema de Cauchy podemos escribir

$$\int_{-R}^{-4-\varepsilon} \frac{e^{i2x}}{x^2-16}\,dx + \int_{C_{\rho_1}} \frac{e^{i2z}}{z^2-16}\,dz + \int_{-4+\varepsilon}^{4-\varepsilon} \frac{e^{i2x}}{x^2-16}\,dx + \int_{C_{\rho_2}} \frac{e^{i2z}}{z^2-16}\,dz + \int_{4+\varepsilon}^{R} \frac{e^{i2x}}{x^2-16}\,dx + \int_{C_R} \frac{e^{i2z}}{z^2-16}\,dz = 0$$

Queda de tarea demostrar que la última integral, en el límite cuando $R \to \infty$, es cero.

A continuación, vamos a evaluar la segunda integral en el límite cuando $\varepsilon \to 0$ considerando que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_{\rho_1}} f(z)dz = -B_0 \pi i$$

lo que implica evaluar el residuo B_0 de

$$f(z) = \frac{e^{i2z}}{z^2-16}$$

en z = -4, resultando

$$B_0 = \operatorname{Res}\left[\frac{e^{i2z}}{z^2-16}\right]_{c_0=1} = \left.\frac{e^{i2z}}{2z}\right|_{c_0=-4} = -\frac{e^{-8i}}{8}$$

con lo que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_{\rho_1}} f(z)dz = \frac{e^{-8i}}{8}\pi i$$

Procediendo de manera similar encontramos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_{\rho_2}} f(z)dz = -\frac{e^{8i}}{8}\pi i$$

Una vez tomados los límites $R\to\infty$ y $\varepsilon\to 0$ podemos escribir

$$\int_{-R}^{-4-\varepsilon}\frac{e^{i2x}}{x^2-16}dx+\int_{C_{\rho_1}}\frac{e^{i2z}}{z^2-16}dz+\int_{-4+\varepsilon}^{4-\varepsilon}\frac{e^{i2x}}{x^2-16}dx+\int_{C_{\rho_2}}\frac{e^{i2z}}{z^2-16}dz+\int_{4+\varepsilon}^{R}\frac{e^{i2x}}{x^2-16}dx+\int_{C_R}\frac{e^{i2z}}{z^2-16}dz=0$$

como

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\left[\int_{-R}^{-4-\varepsilon}\frac{e^{i2x}}{x^2-16}dx+\int_{-4+\varepsilon}^{4-\varepsilon}\frac{e^{i2x}}{x^2-16}dx+\int_{4+\varepsilon}^{R}\frac{e^{i2x}}{x^2-16}dx\right]+\frac{e^{-8i}}{8}\pi i-\frac{e^{8i}}{8}\pi i=0$$

En el límite indicado, la primera parte de la ecuación se reduce al valor principal de Cauchy para la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i2x}}{x^2-16}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x+i\sin 2x}{x^2-16}dx$$

Así pues,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x}{x^2-16}dx+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x^2-16}dx=\frac{e^{8i}}{8}\pi i-\frac{e^{-8i}}{8}\pi i$$

$$=\frac{i\pi}{8}\left[(\cos 8+i\sin 8)-(\cos 8-i\sin 8)\right]=-\frac{\pi}{4}\sin 8$$

con lo que igualando partes real e imaginaria por separado, nos permite escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x}{x^2-16}dx=-\frac{\pi}{4}\sin 8 \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x^2-16}dx=0$$

Siendo la primera de las dos integrales el resultado que buscábamos, la segunda integral nos da cero, toda vez que el integrando es impar y el límite considerado es simétrico respecto al origen al igual que las singularidades que presenta.

Las ideas discutidas en esta parte final de las aplicaciones de residuos muchas veces se pueden aplicar en situaciones en las que los límites de integración no son al infinito, por ejemplo, cuando calculamos integrales de la forma

$$\int_a^b f(x)dx$$

vemos que a veces existe entre a y b un punto p en el que $f(x)$ se hace infinita. Supongamos que $f(x)$ es continua en todos los otros puntos del intervalo $a \le x \le b$, tenemos así una integral impropia.

Las integrales impropias que ya conocemos son aquellas cuyos límites son infinitos; sin embargo, el adjetivo "impropias" se usa en ambos casos porque estas integrales no se pueden expresar como el límite de una suma.

Las siguientes expresiones son integrales impropias del tipo que hemos estudiado (funciones racionales $p(x)/q(x)$)

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}, \quad \int_{1}^{3} \frac{dx}{(x-2)} \quad \text{y} \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$$

ya que, dicho coloquialmente, los integrandos de estas expresiones "estallan" en algún punto del intervalo de integración donde el denominador toma el valor de cero.

Para evaluar este tipo de integrales necesitamos una definición adecuada del valor principal de Cauchy, que se presenta a continuación.

Definición. Sea $f(x)$ una función continua para toda x en el intervalo $a \le x \le b$, excepto en el punto p interno a dicho intervalo, y ε acercándose a cero por la derecha. Se define el valor principal de Cauchy para la integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

como el número

$$VP\left[\int_a^b f(x)dx\right] = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int_a^{p-\varepsilon} f(x)dx + \int_{p+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right]$$

siempre que este límite exista.

Un ejemplo.

Determine el valor principal de Cauchy para la integral

$$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x}$$

Solución. Usando la definición anterior, podemos escribir

$$VP\left[\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x}\right]=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-1}^{\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{\varepsilon}^{2}\frac{dx}{x}\right]$$

Lo que lleva a

$$VP\left[\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x}\right]=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln|\varepsilon|-\ln|-1|+\ln|2|-\ln|\varepsilon|\right]$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\ln|-1|+\ln|2|\right]$$

$$VP\left[\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x}\right]=\ln|2|$$

Es importante mencionar que aunque en el límite cuando $\varepsilon \to 0$ las integrales no existen por separado, cuando se considera la suma el resultado converge, por lo que podemos calcular el Valor Principal de Cauchy para esta integral.

Sin embargo, habrá integrales para las cuales no podamos calcular esta suma, de tal manera que el Valor Principal no existirá debido a la inexistencia del límite requerido por la definición.