3.- Derivada e integral de funciones de variable compleja.

a) Derivadas, funciones analíticas e interpretación geométrica.
b) Reglas de diferenciación.
c) Ecuaciones de Cauchy-Riemann.
d) Funciones armónicas.
e) Integración compleja.
f) Integrales de funciones de variable compleja.

Versión preliminar

a).- Derivadas, funciones analíticas e interpretación geométrica.

Definición. Sea f una función cuyo dominio de definición contenga un entorno o vecindad $|z - z_0| < \varepsilon$ de un punto z_0. La derivada de f en z_0 es el límite

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{3.1}$$

y se dice que f es **diferenciable** en z_0 cuando $f'(z_0)$ existe.

Si la derivada $f'(z)$ existe en todos los puntos z de una región R, se dice que $f(z)$ es analítica en R; como sinónimos suelen usarse también los términos regular y holomorfa.

Sea z_0 existe un punto P en el plano z y sea w_0 su imagen P' en el plano w mediante la transformación $w = f(z)$. Como se supone que la función $f(z)$ es unívoca, entonces el punto z_0 es mapeado a un sólo punto w_0.

Si se incrementa z_0 en Δz, se obtiene el punto Q, el cual tiene como imagen en el plano w al punto Q'.

De acuerdo con la figura que se muestra, se ve que el segmento $P'Q'$ representa al número complejo Δw, tal que

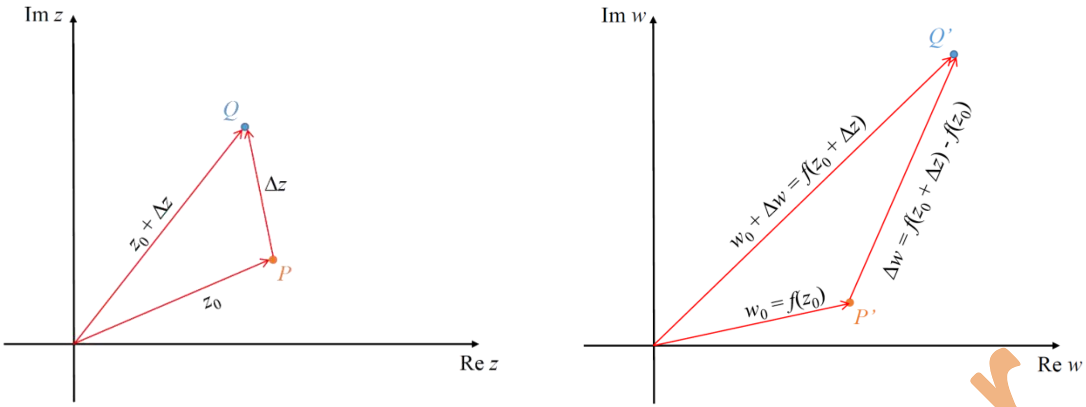
$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$

por lo que la derivada en z_0 para la función f, dada por la definición (3.1), si es que existe, se escribe como

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \tag{3.2}$$

ó

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$



En la ecuación (3.2) es evidente que, sin pérdida de generalidad, podemos eliminar el subíndice 0, y escribir

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{3.3}$$

ó

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{dw}{dz}$$

donde Δw denota el cambio en el valor $w = f(z)$ correspondiente a un cambio Δz en el punto en el que se evalúa f.

Ejemplos:

1. Considere una función f dada por $f(z) = 2z^3 + z - i$. Use la definición para mostrar que la derivada de la función f está dada por $f'(z) = 6z^2 + 1$.
2. Para la función $g(z) = 3z^2 - 2iz + 8$, (a) muestre que $g'(z) = 6z - 2i$; y (b) calcule $g'(5 - 2i)$.
3. Demuestre la **Regla de L'Hopital**, la cual establece que "si $f(z)$ y $g(z)$ son analíticas en z_0 y además $f(z_0) = g(z_0) = 0$, pero con $g'(z_0) \neq 0$, se cumple que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}."$$

b).- Reglas de diferenciación.

Suponga que $f(z)$, $g(z)$ y $h(z)$ son funciones analíticas de z, entonces son válidas las siguientes reglas de diferenciación.

1. $\dfrac{d}{dz}\left[f(z) \pm g(z)\right] = \dfrac{df(z)}{dz} \pm \dfrac{dg(z)}{dz} = f'(z) \pm g'(z)$.
2. $\dfrac{d}{dz}\left[cf(z)\right] = c\dfrac{df(z)}{dz} = cf'(z)$, donde c es una constante.

Versión preliminar

3. $\dfrac{d}{dz}\left[f(z)g(z)\right]=\dfrac{df(z)}{dz}g(z)+f(z)\dfrac{dg(z)}{dz}=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$

4. $\dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]=\dfrac{\dfrac{df(z)}{dz}g(z)-f(z)\dfrac{dg(z)}{dz}}{\left[g(z)\right]^2}=\dfrac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{\left[g(z)\right]^2}$, siempre que $g(z)\neq 0$.

5. Si $w = f(\xi)$ donde $\xi = g(z)$, entonces

$$\frac{dw}{dz}=\frac{df}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dz}=f'(\xi)\frac{d\xi}{dz}=f'\left[g(z)\right]g'(z)$$

Regla de la cadena para funciones de variable compleja

6. Si $w = f(z)$, tiene una función inversa unívoca f^{-1}, tal que $z = f^{-1}(w)$, entonces

$$f'(z)=\frac{dw}{dz} \quad \text{y} \quad \left[f^{-1}(w)\right]'=\frac{dz}{dw}$$

se relacionan mediante

$$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{dz/dw}$$

7. Si $z = f(t)$ y $w = g(t)$, donde t es un parámetro, entonces

$$\frac{dw}{dz}=\frac{dw/dt}{dz/dt}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

Las funciones elementales se derivan de manera similar a como se realizan las derivadas en el cálculo elemental (de variables reales); así que expresiones como

- $\dfrac{dc}{dz}=0$, si c es una constante
- $\dfrac{d}{dz}z^n=nz^{n-1}$
- $\dfrac{d}{dz}e^z=e^z$
- $\dfrac{d}{dz}a^z=a^z\ln a$
- $\dfrac{d}{dz}\sin z=\cos z$
- $\dfrac{d}{dz}\cos z=-\sin z$
- $\dfrac{d}{dz}\tan z=\sec^2 z$

son válidas en el cálculo de variable compleja.

Versión preliminar

Ejercicios:

1. Usando la definición de derivada calcule $f'(z)$ para
   a. $f(z) = z^3 - 2z^2 + 6iz$.
   b. $f(z) = 5/z^2$.
   c. $f(z) = (3z - 4i) / (z + i)$.
2. Usando las reglas de diferenciación enunciadas anteriormente, verifique sus resultados.
3. Encuentre la derivada $f'(z)$ y evalúela en el punto z_0 dado, considerando que
   a. $f(z) = z^2 + 5iz + 3 - i$; $z_0 = 6 - i$.
   b. $f(z) = (z^2 + 2iz) / (z - i)$; $z_0 = 4 + 2i$.
   c. $f(z) = \text{sen}(z^2 + 3iz)$; $z_0 = i\pi$.

c).- Ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Las llamadas ecuaciones de Cauchy-Riemann son dos ecuaciones que deben satisfacerse en z_0 para que la derivada de una función f exista en z_0.

Que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplan es una *condición necesaria pero no suficiente* para la existencia de $f'(z)$.

Partiendo de que la función $f(z)$ se puede separar en sus componentes real e imaginaria, tal que

$$f(z) = f(x,y) = u(x,y) + i\, v(x,y) \tag{3.4}$$

y considerando que

$$z_0 = x_0 + i\, y_0 \quad \text{con} \quad \Delta z = \Delta x + i\, \Delta y$$

podemos escribir

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$

es decir

$$\Delta w = [u(x_0 + \Delta x\, , y_0 + \Delta y) - u(x_0\, , y_0)] + i\, [v(x_0 + \Delta x\, , y_0 + \Delta y) - v(x_0\, , y_0)]. \tag{3.5}$$

Por otro lado, la derivada $f'(z_0)$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

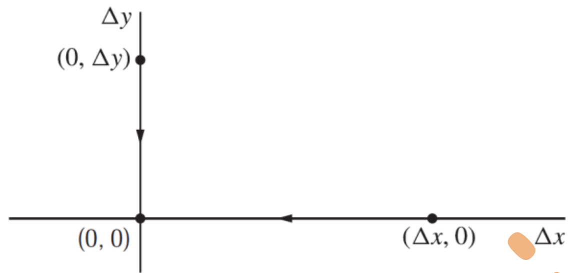
se puede escribir como

$$f'(z_0) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \text{Re}\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right) + i \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \text{Im}\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right) \tag{3.6}$$

Versión preliminar

El límite $\Delta z = (\Delta x\ ,\ \Delta y) \to (0{,}0)$ en la expresión anterior debe poder evaluarse en cualquier forma de aproximación a $(0{,}0)$; en lo que sigue consideraremos dos formas de hacerlo: (i) horizontalmente; y (ii) verticalmente.

Cuando $\Delta z \to (0{,}0)$ en dirección horizontal, consideraremos que $\Delta y = 0$; mientras que en la dirección vertical tomaremos $\Delta x = 0$, tal como se muestra a continuación.



En el recorrido horizontal ($\Delta y = 0$), usando la expresión (3.5), el cociente $\Delta w/\Delta z$ resulta

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{\left[u(x_0+\Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)\right] + i\left[v(x_0+\Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)\right]}{\Delta x}$$

así que

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \operatorname{Re}\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\left[u(x_0+\Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)\right]}{\Delta x}\right)$$

es decir

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \operatorname{Re}\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = u_x(x_0, y_0) \tag{3.7}$$

y

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \operatorname{Im}\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\left[v(x_0+\Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)\right]}{\Delta x}\right)$$

es decir

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \operatorname{Im}\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = v_x(x_0, y_0) \tag{3.8}$$

Usando las expresiones (3.7) y (3.8) la expresión para la derivada $f\,'(z_0)$, dada por (3.6), se puede escribir como

$$f\,'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0) \tag{3.9}$$

Versión preliminar

Si ahora consideramos la trayectoria vertical (Δx = 0) tenemos que el cociente $\Delta w/\Delta z$ es

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\Delta w}{i\Delta y}=\frac{\left[u(x_0,y_0+\Delta y)\ -u\left(x_0,y_0\right)\right]+i\left[v(x_0,y_0+\Delta y)\ -v\left(x_0,y_0\right)\right]}{i\Delta y}$$

ó

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\left[v(x_0,y_0+\Delta y)\ -v\left(x_0,y_0\right)\right]-i\left[u(x_0,y_0+\Delta y)\ -u\left(x_0,y_0\right)\right]}{\Delta y}$$

con lo que

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\operatorname{Re}\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)=\lim_{\Delta y\to 0}\left(\frac{\left[v(x_0,y_0+\Delta y)\ -v\left(x_0,y_0\right)\right]}{\Delta y}\right)$$

es decir

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\operatorname{Re}\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)=\frac{\partial v}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)=v_y\left(x_0,y_0\right) \tag{3.10}$$

y

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\operatorname{Im}\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)=\lim_{\Delta y\to 0}\left(\frac{-\left[u(x_0,y_0+\Delta y)\ -u\left(x_0,y_0\right)\right]}{\Delta y}\right)$$

es decir

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\operatorname{Im}\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)=-\frac{\partial u}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)=-u_y\left(x_0,y_0\right) \tag{3.11}$$

Usando las expresiones (3.10) y (3.11), ahora la expresión para la derivada dada por (3.6), se escribe como

$$f\,'(z_0)=v_y(x_0,y_0)-iu_y(x_0,y_0) \tag{3.12}$$

Las expresiones (3.9) y (3.12) no sólo nos proporcionan una forma de escribir la derivada de f en z_0 en términos de las derivadas parciales de las funciones componentes u y v, sino que también nos dan dos condiciones necesarias para la existencia de $f\,'(z_0)$.

Igualando las ecuaciones (3.9) y (3.12) tenemos que

$$f\,'(z_0)=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0)-iu_y(x_0,y_0)$$

lo que lleva (igualando partes real e imaginaria de ambos lados) a las dos ecuaciones siguientes.

$$u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0) \tag{3.13}$$

$$v_x(x_0,y_0)=-u_y(x_0,y_0) \tag{3.14}$$

Este par de ecuaciones (3.13) y (3.14) son las **Ecuaciones de Cauchy-Riemann**, llamadas así en honor del francés Augustin Louis Cauchy y del alemán Georg Friederich Bernhard Riemann.

El resultado anterior se puede resumir en el siguiente teorema.

Teorema. Suponga que la función $f(z)$ se puede escribir como

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{3.4}$$

y que $f\,'(z)$ existe en un punto $z_0 = x_0 + i\,y_0$. Entonces las derivadas parciales de primer orden de u y v deben existir en $(x_0\,, y_0)$ y además satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \tag{3.13}$$

$$v_x(x_0, y_0) = -u_y(x_0, y_0) \tag{3.14}$$

además $f\,'(z_0)$ se puede escribir como

$$f\,'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)\,. \tag{3.9}$$

Como se ha mencionado anteriormente, el que se cumplan las ecuaciones de Cauchy-Riemann no garantiza la existencia de $f\,'(z_0)$, para lograrlo se requiere extender estos resultados para incluir ciertos requisitos de continuidad.

Lo anterior se resume en el siguiente teorema.

Teorema. Sea la función $f(z)$, dada por

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{3.4}$$

definida en algún entorno o vecindad ε de un punto $z_0 = x_0 + i\,y_0$. Supongamos que las derivadas parciales de primer orden de las funciones u y v con respecto a x e y existen en todos los puntos de esa vecindad ε y además son continuas en (x_0,y_0), entonces si esas derivadas parciales satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \tag{3.13}$$

$$v_x(x_0, y_0) = -u_y(x_0, y_0) \tag{3.14}$$

la derivada $f\,'(z_0)$ existe, y se puede escribir como

$$f\,'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)\,. \tag{3.9}$$

Ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann se pueden reescribir en coordenadas polares de la siguiente manera. Partiendo de que un número complejo z se puede representar como

$$z = x + i\,y \qquad \text{ó} \qquad z = |z|e^{i\theta}, \text{ con } |z| \neq 0,$$

tenemos que

$$x = |z| \cos\,\theta = r\cos\,\theta$$

$$y = |z|\,\text{sen}\,\theta = r\,\text{sen}\,\theta$$

lo que permite separar a la función $w = f(z)$ en sus componentes real u e imaginaria v para escribir $f(z)$ como

$$f(z) = f(r,\theta) = u(r,\theta) + i\,v(r,\theta).$$

Versión preliminar

Si suponemos que las derivadas parciales de primer orden de u y de v con respecto a x e y existen en una vecindad no nula de z_0 y que son continuas en dicho punto, entonces las derivadas parciales con respecto a r y θ tienes esas propiedades; así que

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

es decir

$$u_r = u_x \cos\theta + u_y \sin\theta \tag{3.15}$$

y

$$u_\theta = r\left(-u_x \sin\theta + u_y \cos\theta\right) \tag{3.16}$$

Similarmente, para la componente imaginaria v, se tiene

$$v_r = v_x \cos\theta + v_y \sin\theta \tag{3.17}$$

y

$$v_\theta = r\left(-v_x \sin\theta + v_y \cos\theta\right) \tag{3.18}$$

Si a continuación retomamos las ecuaciones (3.13) y (3.14)

$$u_x = v_y \tag{3.13}$$

$$v_x = -u_y \tag{3.14}$$

podemos escribir a (3.17) y (3.18) como

$$v_r = -u_y \cos\theta + u_x \sin\theta \tag{3.19}$$

y

$$v_\theta = r\left(u_y \sin\theta + u_x \cos\theta\right) \tag{3.20}$$

Usando las ecuaciones (3.19) y (3.15) en las ecuaciones (3.16) y (3.20), tenemos

$$u_\theta = -r\left(-u_y \cos\theta + u_x \sin\theta\right) = -r\left(v_r\right) \tag{3.16}$$

y

$$v_\theta = r\left(u_y \sin\theta + u_x \cos\theta\right) = r\left(u_r\right) \tag{3.20}$$

Con lo anterior, las ecuaciones de Cauchy-Riemann (3.13) y (3.14) en coordenadas polares se reescriben como

$$v_r\left(r_0,\theta_0\right) = -\frac{1}{r_0}u_\theta\left(r_0,\theta_0\right) \tag{3.21}$$

y

$$u_r\left(r_0,\theta_0\right) = \frac{1}{r_0}v_\theta\left(r_0,\theta_0\right) \tag{3.22}$$

Versión preliminar

Resumiendo lo anterior, podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema. Sea la función $f(z)$, dada por

$$f(z) = f(r,\theta) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$$

definida en algún entorno o vecindad ε (alrededor) de un punto no nulo $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$. Supongamos que las primeras derivadas parciales de las funciones u y v con respecto a r y θ existen en todos los puntos de ese entorno ε y además son continuas en (r_0, θ_0), entonces si esas derivadas parciales satisfacen la forma polar de las ecuaciones de Cauchy-Riemann en (r_0, θ_0) dadas por

$$v_r\left(r_0, \theta_0\right) = -\frac{1}{r_0} u_\theta\left(r_0, \theta_0\right) \tag{3.21}$$

y

$$u_r\left(r_0, \theta_0\right) = \frac{1}{r_0} v_\theta\left(r_0, \theta_0\right) \tag{3.22}$$

la derivada $f\,'(z_0)$ existe.

Ejemplos.

1. Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, pruebe que la derivada $f\,'(z)$ no existe en ningún punto del plano-z para $f(z) = z - z^*$.
2. Verifique que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen para la función $f(z)$ definida por
    a. $f(z) = \exp(z^2)$
    b. $f(z) = \cos(2z)$
    c. $f(z) = z^2 + 5iz + 3 - i$
    d. $f(z) = z \exp(-z)$
3. Muestre que la función $g(x,y) = x^2 + iy^3$ es no analítica en cualquier punto.

d).- Funciones armónicas.

Definición. Una función real H de dos variables x e y se dice armónica en un dominio dado del plano xy si sobre ese dominio tiene derivadas parciales continuas de primer y segundo orden que satisfacen la ecuación

$$H_{xx}(x, y) + H_{yy}(x, y) = 0 \tag{3.23}$$

conocida como *Ecuación de Laplace*.

Para el cálculo de variable compleja podemos enunciar el siguiente teorema.

Versión preliminar

Teorema. Si una función $f(z) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ es analítica en un dominio D, sus funciones componentes u y v son armónicas en D.

Demostración. Supuesta $f(z)$ analítica en D, se deben cumplir las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u_x(x,y) = v_y(x,y) \tag{3.13}$$

y

$$u_y(x,y) = -v_x(x,y) \tag{3.14}$$

Derivando las ecuaciones anteriores respecto a x, tenemos

$$u_{xx}(x,y) = v_{yx}(x,y) \tag{3.24}$$

y

$$u_{yx}(x,y) = -v_{xx}(x,y) \tag{3.25}$$

Similarmente, si derivamos respecto a y tendremos

$$u_{xy}(x,y) = v_{yy}(x,y) \tag{3.26}$$

y

$$u_{yy}(x,y) = -v_{xy}(x,y) \tag{3.27}$$

Ahora, usando las ecuaciones (3.24) y (3.27), se ve que podemos escribir

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 \tag{3.28}$$

y usando (3.25) y (3.26) vemos que también podemos escribir

$$v_{xx}(x,y) + v_{yy}(x,y) = 0 \tag{3.29}$$

Con estos resultados [ecuaciones (3.28) y (3.29)] vemos que u y v son armónicas en D, con lo que se demuestra el teorema.

Definición. Si dos funciones dadas u y v son armónicas en un dominio D y sus derivadas parciales de primer orden satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el dominio D se dice que v es **armónica conjugada** de u.

Ejemplos.

1. Pruebe que la función $u(x,y)$ dada, es armónica.
2. Encuentre una función $v(x,y)$ tal que $f(z) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ sea analítica, es decir, encuentre la función armónica conjugada de $u(x,y)$.
3. Exprese f en términos de z, es decir, $f(z)$.

En los tres casos, considere que

a) $u(x,y) = 2x(1 - y)$
b) $u(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y$

Versión preliminar

e).- Integración compleja.

Antes de introducir las integrales de una función compleja de variable compleja $f(z)$, consideraremos primero derivadas e integrales de funciones complejas $w(t)$ de una variable real, es decir

$$w(t) = u(t) + iv(t) \tag{3.30}$$

donde las funciones u y v son funciones reales de t.

Con lo anterior, la derivada

$$w'(t) = \frac{d[w(t)]}{dt}$$

de la función $w(t)$ en un punto t satisface que

$$w'(t) = u'(t) + iv'(t) \tag{3.31}$$

suponiendo que $u'(t)$ y $v'(t)$ existen.

Es evidente que muchas de las reglas aprendidas en el cálculo de variable real aplican para la función $w(t)$, toda vez que $u(t)$ y $v(t)$ son funciones reales, lo que las hace verificables al aplicar las correspondientes reglas para las funciones reales.

Sin embargo, hay que hacer notar que no toda regla de derivación del cálculo es válida para funciones del tipo de $w(t)$.

En particular, el teorema del valor medio para la derivada ya no es aplicable, es decir, no es necesariamente cierto que exista un número c en el intervalo $a < t < b$ tal que

$$w'(c)(b - a) = w(b) - w(a) \tag{3.32}$$

Por ejemplo, $w(t) = \exp(it)$ en el intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$ no cumple (3.32) ya que

$$w'(t) = i \exp(it) = -\operatorname{sen} t + i \cos t$$

nunca es cero, mientras que

$$w(2\pi) = 1 \qquad \text{y} \qquad w(0) = 1$$

por lo que no se cumple la relación (3.32) ya que

$$w(2\pi) - w(0) = 0.$$

Definición. Con lo anterior en mente, podemos definir la **integral definida** de $w(t)$ en el intervalo $a \leq t \leq b$ como

$$\int_a^b w(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt \tag{3.33}$$

cuando las integrales de $u(t)$ y $v(t)$ existan.

Versión preliminar

De igual manera, podemos establecer que

$$\int_a^b w(t)dt = \int_a^c w(t)dt + \int_c^b w(t)dt \tag{3.34}$$

con lo que podemos integrar una función $w(t)$ continua a trozos o por segmentos, sin importar que sea discontinua en c, ya que sólo necesitamos que posea límites laterales que garanticen la existencia de las integrales por separado.

Definición. Si $u(t)$ y/o $v(t)$ son continuas a trozos en un intervalo $[a,b]$, entonces diremos que $w(t)$ es continua a trozos en dicho intervalo.

El teorema fundamental del cálculo sobre primitivas puede extenderse a las integrales del tipo (3.33), para lo cual supongamos que las funciones

$$w(t) = u(t) + i\, v(t)$$

y

$$W(t) = U(t) + i\, V(t)$$

son continuas en el intervalo $a \leq t \leq b$.

Si $W'(t) = w(t)$, para $a \leq t \leq b$, entonces

$$U'(t) = u(t)$$

y

$$V'(t) = v(t).$$

Por lo tanto

$$\int_a^b w(t)dt = U(t)\Big|_a^b + iV(t)\Big|_a^b$$

$$\int_a^b w(t)dt = \left[U(b) + iV(b)\right] - \left[U(a) + iV(a)\right]$$

es decir

$$\int_a^b w(t)dt = W(t)\Big|_a^b = W(b) - W(a) \tag{3.35}$$

Finalmente estableceremos una propiedad básica de los valores absolutos de las integrales; para ello, tomemos $a < b$ y supondremos que el valor de la integral definida en la ecuación (3.33) es un número complejo no nulo z_0.

Si r_0 es el módulo y θ_0 es un argumento de z_0, tenemos que

$$\int_a^b w(t)dt = z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \tag{3.36}$$

de donde

$$r_0 = \int_a^b e^{-i\theta_0} w(t)dt \tag{3.37}$$

Versión preliminar

Como r_0 es un número real, la integral (3.37) debe ser real, es decir

$$r_0 = \int_a^b e^{-i\theta_0} w(t)dt = \mathrm{Re}\int_a^b e^{-i\theta_0} w(t)dt$$

con lo que la expresión para r_0 [ecuación (3.37)] toma la forma

$$r_0 = \int_a^b \mathrm{Re}\left[e^{-i\theta_0} w(t)\right]dt \tag{3.38}$$

Por otro lado,

$$\mathrm{Re}\left[e^{-i\theta_0} w(t)\right] \le \left|e^{-i\theta_0} w(t)\right|$$
$$\mathrm{Re}\left[e^{-i\theta_0} w(t)\right] \le \left|e^{-i\theta_0}\right|\left|w(t)\right|$$

es decir

$$\mathrm{Re}\left[e^{-i\theta_0} w(t)\right] \le \left|w(t)\right| \tag{3.39}$$

Usando las ecuaciones (3.38) y (3.39) es posible escribir

$$r_0 \le \int_a^b \left|w(t)\right|dt \tag{3.40}$$

pero como

$$r_0 = \left|r_0\right| = \left|\int_a^b e^{-i\theta_0} w(t)dt\right|$$

finalmente podemos escribir la siguiente relación

$$\boxed{\left|\int_a^b w(t)dt\right| \le \int_a^b \left|w(t)\right|dt} \tag{3.41}$$

Ejemplos. Calcule las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{1}{2t}+i\right)^2 dt$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/6} e^{i3t}dt$

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-zt}dt$

Versión preliminar

f).- Integrales de funciones de variable compleja.

La integración de una función compleja de variable compleja se define sobre curvas en el plano complejo en vez de sobre intervalos de la recta real, como vimos en las secciones previas. Estas curvas se conocen como *contornos*, así que a continuación veremos con un poco más de detalle estas trayectorias. Para entender, y estar en condiciones de aplicar, estas clases de curvas (adecuadas para el estudio de las integrales de una función de variable compleja) se hace necesario que veamos algunas definiciones.

Curva. Una curva C es un conjunto de puntos $z = x + iy$ en el plano complejo tales que

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \le t \le b$$

donde $x(t)$ e $y(t)$ son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$. Los puntos de C se pueden describir mediante la ecuación

$$z(t) = x(t) + iy(t) \qquad a \le t \le b$$

y se dice que $z(t)$ es continua, ya que $x(t)$ y $y(t)$ son continuas.

Curva suave. Una curva C se llama *curva suave*, si $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ existe y es continua en el intervalo $a \le t \le b$ y si $z'(t)$ nunca se hace cero en el intervalo.

Contorno. Un contorno o curva suave a tramos, es una curva que consta de un número finito de curvas suaves unidas por sus extremos.

Contorno cerrado simple. Sea C un contorno. Se dice que C es un contorno cerrado simple si solamente los valores inicial y final de $z(t)$ son iguales, es decir, $z(b) = z(a)$.

Integrales de línea.

Sea $f(z)$ una función de variable compleja. Sea C un contorno representado por la ecuación

$$z(t) = x(t) + iy(t) \qquad a \le t \le b$$

que se extiende del punto $\alpha = z(a)$ al punto $\beta = z(b)$.

Supongamos que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es continua a trozos en C, es decir, las partes real e imaginaria,

$$u\big(x(t), y(t)\big) \quad \text{y} \quad v\big(x(t), y(t)\big)$$

de $f(z(t))$ son funciones de t continuas por tramos.

Bajo estas condiciones, se define la integral de línea de f a lo largo de C como:

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f\big(z(t)\big)\, z'(t)dt \tag{3.42}$$

donde $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

Versión preliminar

Asociado al contorno C de la ecuación (3.42), está el contorno $-C$, el cual se describe por la ecuación $z = z(-t)$ donde $-b \le t \le -a$. Por tanto,

$$\int_{-C} f(z)dz = \int_{-a}^{b} f\left(z(-t)\right) z'(-t)dt$$

donde $z'(-t)$ denota la derivada de $z(t)$ con respecto a t evaluada en $-t$.

La integral de línea definida en la ecuación (3.42) tiene algunas propiedades que nos serán útiles al calcular integrales de funciones de variable compleja.

Sean $f(z)$ y $g(z)$ funciones de variable compleja continuas a trozos sobre un contorno C descrito por la ecuación $z = z(t)$ $(a \le t \le b)$. A partir de la ecuación (3.42) se deducen fácilmente las siguientes propiedades de las integrales de línea.

i. $\int_C af(z)dz = a\int_C f(z)dz$, para toda constante compleja a.

ii. $\int_C \left[f(z)+g(z)\right]dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz$.

iii. Si C consta de una curva C_1 desde α_1 hasta β_1 y de la curva C_2 desde α_2 hasta β_2, donde $\beta_1 = \alpha_2$, se cumple que

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

iv. $\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_a^b \left|f\left(z(t)\right)z'(t)\right|dt$

Ejemplo.

Calcular $\int_{|z|=1} \frac{1}{z}dz$ donde $|z| = 1$ es la circunferencia centrada en el origen y de radio 1, recorrida en sentido positivo.

Teorema de Cauchy-Goursat

El siguiente resultado se conoce como Teorema de Cauchy-Goursat.

Teorema de Cauchy-Goursat. Sea C un contorno cerrado simple. Sea f una función analítica sobre y en el interior de C. Entonces

$$\int_C f(z)dz = 0 \tag{3.43}$$

El Teorema de Cauchy-Goursat es uno de los más importantes en la teoría de variable compleja. Una de las razones es que puede ahorrarnos una gran cantidad de trabajo al realizar cierto tipo de integraciones.

Versión preliminar

Por ejemplo, integrales como

$$\int_C \sin z dz\ ,\ \int_C \cosh z dz\ \text{ y }\ \int_C e^z dz$$

deben anularse si C es un contorno cerrado simple cualquiera. En todos estos casos, el integrando es una función entera.

Obsérvese que la dirección de integración en la ecuación (3.43) no afecta el resultado pues $\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$.

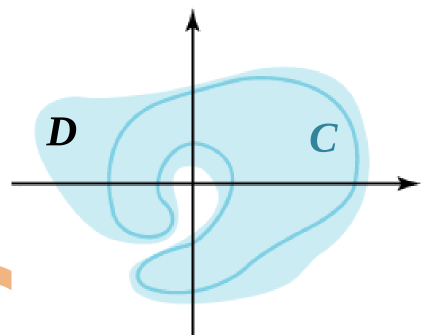
Ejemplo.

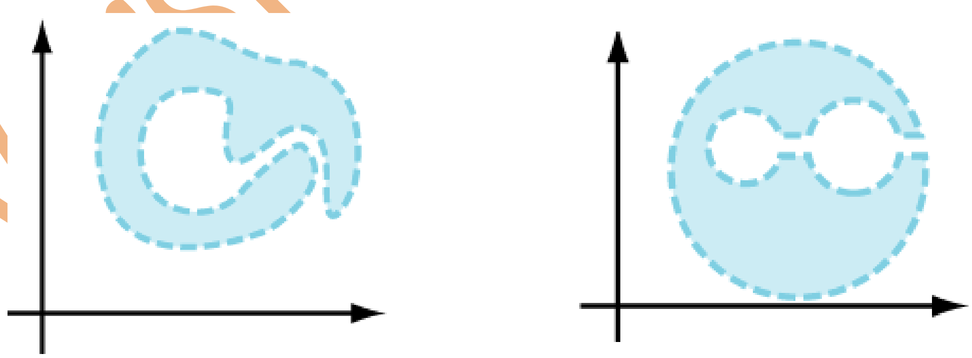
Verifique que

$$\int_C z^n dz = 0$$

donde n es un entero positivo y C es la circunferencia $|z| = r$, con $r > 0$.

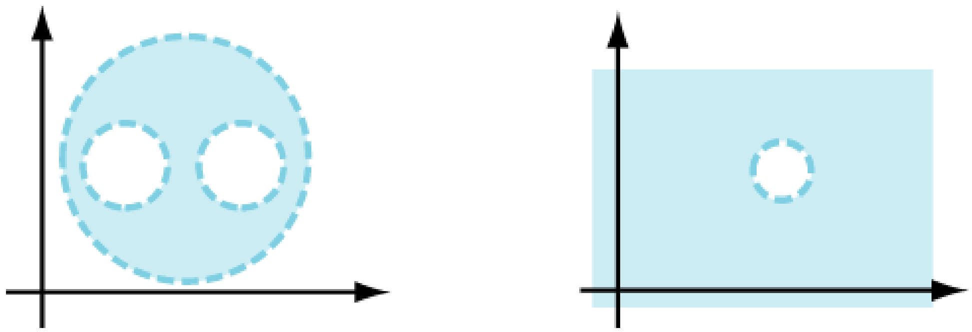
Dominio simplemente conexo. Un dominio D se dice simplemente conexo si todo contorno cerrado simple C dentro del mismo encierra sólo puntos de D.





Versión preliminar

Dominio múltiplemente conexo. Un dominio D se dice múltiplemente conexo si no es simplemente conexo.



El **Teorema de Cauchy-Goursat** se puede extender **para dominios simplemente conexos**.

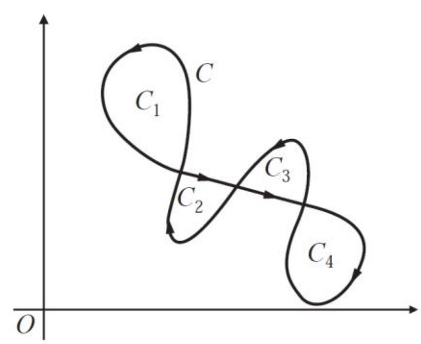
Si una función f es analítica en un dominio simplemente conexo D, entonces para todo contorno cerrado simple C, dentro de D, se cumple

$$\int_C f(z)dz = 0$$

Incluso si C es un contorno simple cerrado que intersecta consigo mismo un número finito de veces, de tal forma que consiste de un número finito de contornos simples cerrados C_k, el teorema de Cauchy-Goursat sigue siendo válido.

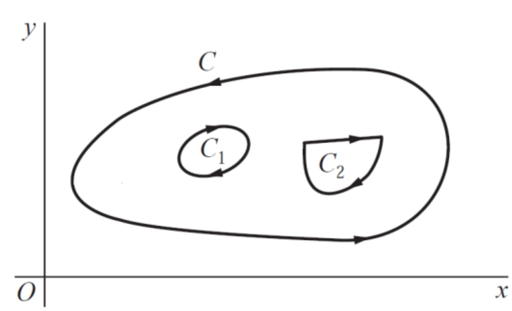
Por ejemplo, para el contorno mostrado en la figura se tiene que

$$\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{C_k} f(z)dz = 0$$



De igual forma, el **Teorema de Cauchy-Goursat** se puede extender **para dominios múltiplemente conexos**.

Se denota a C como un contorno cerrado simple y a C_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) como un número finito de contornos cerrados simples interiores a C tales que los conjuntos interiores a cada C_j no tienen puntos en común, tal como se muestra en la figura.



Versión preliminar

R es la región cerrada que consta de todos los puntos dentro y sobre C excepto los puntos interiores a cada C_j (R es un dominio múltiplemente conexo).

Se denota por B la frontera completa orientada de R que consta de C y todos los C_j, descrita en una dirección tal que los puntos de R se encuentran a la izquierda de B. En este caso, si una función f es analítica en R, entonces

$$\int_B f(z)dz = 0$$

Ejemplo. Demostrar que

$$\int_B \frac{dz}{z^2\left(z^2-1\right)} = 0$$

donde B consta de la circunferencia $|z| = 2$ descrita en la dirección positiva, y de las circunferencias $|z+1| = 1/2$, $|z| = 1/2$ y $|z-1| = 1/2$, descritas en la dirección negativa.

Integral indefinida

El Teorema de Cauchy-Goursat es una herramienta valiosa cuando se trata de integrar una función analítica alrededor de un contorno cerrado. En caso de que el contorno no sea cerrado, existen métodos que se pueden deducir a partir de dicho teorema y que facilitan el cálculo de la integral considerada.

El siguiente teorema se conoce como *principio de independencia de la trayectoria*.

Principio de independencia de la trayectoria. Sea $f(z)$ una función analítica en todo punto de un dominio simplemente conexo D y sean z_1 y z_2 dos puntos de D. Entonces, si usamos contornos contenidos en D, el valor de

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$$

no dependerá del contorno utilizado para ir de z_1 a z_2.

Demostración. Sea D un dominio simplemente conexo y C_1 y C_2 dos contornos en D sin intersección que van de z_1 a z_2. Se tiene que los contornos C_1 y $-C_2$ forman un contorno cerrado simple, que denominaremos C. Luego, por el Teorema de Cauchy-Goursat si

$$\int_C f(z)dz = 0$$

pero

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{-C_2} f(z)dz$$

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz$$

Versión preliminar

Por lo tanto,

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

lo cual indica que la integral desde z_1 hasta z_2 es así independiente del contorno seguido, en tanto ese contorno se encuentre dentro de D.

Del principio de la independencia de la trayectoria podemos definir la *primitiva de una función de variable compleja*.

Definición. Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio simplemente conexo D. Sea z_0 un punto de D. La función $F(z)$ definida en D por

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)ds + c \tag{3.44}$$

donde c es una constante compleja, se denomina **integral indefinida o primitiva** de f.

En realidad $f(z)$ posee un número infinito de primitivas. Dichas primitivas difieren en valores constantes y son analíticas en D, y satisfacen

$$F'(z) = f(z).$$

Usamos la integral indefinida $\int f(z)dz$ para indicar todas las posibles primitivas de $f(z)$. El valor de la constante correspondiente a una primitiva especifica $\int_{z_0}^{z} f(s)ds$ queda determinado por el límite de integración inferior como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo.

Encuentre las primitivas de $f(z) = z\,\mathrm{sen}(z)$ y emplee el resultado obtenido para calcular $\int_{\pi}^{z} s\sin s ds$.

Según la definición (3.44), una integral definida se puede evaluar como el cambio en el valor de la integral indefinida, tal como se hace en el cálculo elemental, es decir

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)dz = F(\beta) - F(\alpha) = F(z)\Big|_{\alpha}^{\beta}$$

Ejemplo.

Calcular la integral definida

$$\int_{\pi}^{1} z\sin z dz$$

Versión preliminar

A continuación veremos que si una función es analítica en un punto, sus derivadas de todos los órdenes existen en ese punto y son también analíticas ahí.

Previo a este resultado veremos un resultado interesante que se obtiene a través del Teorema de Cauchy-Goursat. Este resultado se conoce como *fórmula integral de Cauchy*.

Si consideramos una función analítica sobre y en el interior de un contorno cerrado simple, basta con conocer los valores que ella toma sobre ese contorno, para determinar los valores que toma en el interior del mismo.

Fórmula integral de Cauchy.

Definición. Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio simplemente conexo D. Sea C un contorno cerrado simple perteneciente a D. Sea z_0 un punto interior de C. Entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz$$

La expresión anterior se denomina *fórmula integral de Cauchy*.

El siguiente ejemplo aclara el uso de esta fórmula en la evaluación de integrales.

Ejemplo. Hallar el valor de la integral $\int_c \frac{dz}{(z^2+4)}$, donde C es la circunferencia $|z-i| = 2$.

Solución. Para resolver esta integral veamos si podemos aplicar alguno de los teoremas vistos anteriormente, para ello analicemos la posible analiticidad del integrando en el contorno C.

El integrando presenta dos puntos en los que se indefine ($z = \pm 2i$), uno de los cuales ($z = 2i$) se ubica dentro del contorno C, por lo que no es posible aplicar el Teorema de Cauchy-Goursat; para investigar la factibilidad de aplicar la fórmula integral de Cauchy, procedemos de la siguiente forma.

Factorizando el denominador, podemos escribir

$$\int_C \frac{dz}{(z^2+4)} = \int_C \frac{dz}{(z+2i)(z-2i)} = \int_C \frac{\frac{1}{(z-2i)}dz}{(z+2i)} = \int_C \frac{\frac{1}{(z+2i)}dz}{(z-2i)}$$

En la primera posibilidad, la función $f(z) = \frac{1}{(z-2i)}$ presenta la singularidad ($z = 2i$) que cae dentro del contorno C, por lo que no permite aplicar la fórmula integral de Cauchy; por otro lado, $f(z) = \frac{1}{(z+2i)}$ no presenta singularidad dentro (ni sobre) el contorno C, por lo que es factible aplicar la fórmula, así que tomamos

Versión preliminar

$$\int_C \frac{dz}{(z^2+4)} = \int_C \frac{\frac{1}{(z+2i)}dz}{(z-2i)}$$

de donde identificamos que $z_0 = 2i$, por lo que

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}dz = 2\pi i f(z_0) = 2\pi i f(2i)$$

$$= 2\pi i \frac{1}{(z_0+2i)} = \frac{2\pi i}{(2i+2i)}$$

Por lo que

$$\int_C \frac{dz}{(z^2+4)} = \frac{\pi}{2}$$

Veamos que si una función es analítica en un punto, sus derivadas de todos los órdenes existen en ese punto y son también analíticas.

Extensión de la fórmula integral de Cauchy. Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio simplemente conexo D. Sea C un contorno cerrado simple perteneciente a D. Sea z_0 un punto interior de C. Entonces f es infinitamente diferenciable en cada punto de D y la derivada n-ésima de f en z_0 es:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \tag{3.45}$$

Además, $f^{(n)}(z)$ es analítica en D para cada n.

El siguiente ejemplo aclara el uso de la ecuación (3.45) en la evaluación de integrales.

Ejemplo. Hallar el valor de la integral $\int_c \frac{dz}{(z^2+4)^2}$, donde C es la circunferencia $|z - i| = 2$.

Solución. Para resolver esta integral, al igual que en el ejemplo anterior, veamos si podemos aplicar alguno de los teoremas vistos anteriormente, para ello analicemos la posible analiticidad del integrando en el contorno C.

El integrando presenta singularidades en los puntos $z = \pm 2i$, en particular, $z = 2i$ se ubica dentro del contorno C, por lo que no es posible aplicar el Teorema de Cauchy-Goursat; para investigar la factibilidad de aplicar la extensión de la fórmula integral de Cauchy, procedemos de la siguiente forma.

Versión preliminar

Factorizando el denominador, podemos escribir

$$\int_C \frac{dz}{\left(z^2+4\right)^2} = \int_C \frac{dz}{\left(z+2i\right)^2\left(z-2i\right)^2} = \int_C \frac{\frac{1}{\left(z+2i\right)^2}dz}{\left(z-2i\right)^2}$$

En este caso advertimos que $f(z) = \frac{1}{\left(z+2i\right)^2}$ no presenta singularidad dentro (ni sobre) el contorno C, por lo que es factible aplicar la extensión de la fórmula integral de Cauchy con $z_0 = 2i$ y $n = 1$, por lo que

$$\int_C \frac{f(z)}{\left(z-z_0\right)^2}dz = \frac{2\pi i f'(z_0)}{n!} = \frac{2\pi i f'(2i)}{1!}$$

$$= 2\pi i\left(\frac{-2}{\left(z_0+2i\right)^3}\right) = \frac{-4\pi i}{\left(2i+2i\right)^3}$$

Por lo que

$$\int_C \frac{dz}{\left(z^2+4\right)^2} = \frac{\pi}{16}$$

Ejercicios sugeridos.

Repaso:

1.- Muestre que

a) $e^{(2\pm 3\pi i)} = -e^2$

b) $e^{\left(\frac{2+\pi i}{4}\right)} = \sqrt{\frac{e}{2}}(1+i)$

c) $e^{(z+\pi i)} = -e^z$

2.- Muestre que $\left|e^{z^2}\right| \leq e^{|z|^2}$.

3.- Encuentre todos los valores de z tales que

a) $e^z = -2$

b) $e^z = 1 + i\sqrt{3}$

c) $e^{(2z-1)} = 1$

RESPUESTA. a) $z = \ln 2 + (2n+1)\pi i$; b) $z = \ln 2 + \left(2n + \frac{1}{3}\right)\pi i$; c) $z = \frac{1}{2} + n\pi i$.

4.- (a) Muestre que si e^z es real, entonces $\mathrm{Im}\, z = n\pi$ (con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). (b) Si e^z es un imaginario puro, ¿qué restricción se requiere para z?

Versión preliminar

Secciones 3a y 3b:

5.- Derive la expresión $\frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}$, cuando n es un entero positivo, usando

a) inducción matemática y la expresión para la derivada del producto de dos funciones; y

b) la definición de derivada y la fórmula binomial.

6.- Usando diferentes trayectorias para evaluar el límite cuando $\Delta z \to (0,0)$, muestre que $f'(z)$ no existe en ningún punto z cuando

a) $f(z) = \bar{z}$

b) $f(z) = \operatorname{Re} z$

c) $f(z) = \operatorname{Im} z$

Sección 3c:

7.- Use el teorema de Cauchy-Riemann para mostrar que $f'(z)$ no existe en ningún punto si

a) $f(z) = \bar{z}$

b) $f(z) = f(x,y) = 2x + ixy^2$

c) $f(z) = f(x,y) = e^x e^{-iy}$

8.- Usando el Teorema de Cauchy-Riemann extendido, determine dónde existe $f'(z)$ y encuentre su valor cuando

a) $f(z) = \frac{1}{z}$

b) $f(z) = f(x,y) = x^2 + iy^2$

c) $f(z) = z \operatorname{Im} z$

RESPUESTA. a) $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$, para $z \neq 0$; b) $f'(x+iy) = 2x$; c) $f'(0) = 0$.

9.- Use las ecuaciones de Cauchy-Riemann para mostrar que las siguientes funciones son diferenciables en el dominio (de definición) indicado, y también encuentre $f'(z)$:

a) $f(z) = \frac{1}{z^4}$, para $z \neq 0$.

b) $f(z) = f(r,\theta) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$, para $r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi$.

RESPUESTA. b) $f'(z) = \frac{1}{2f(z)}$.

Sección 3d:

10.- Muestre que $u(x,y)$ es una función armónica en algún dominio y encuentre una armónica conjugada $v(x,y)$ cuando

a) $u(x,y) = 2x(1-y)$

Versión preliminar

b) $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$

c) $u(x, y) = \sinh x \sin y$

d) $u(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$

RESPUESTA. a) $v(x, y) = x^2 - y^2 + 2y$; b) $v(x, y) = 2y - 3x^2y + y^3$; c) $v(x, y) = -\cosh x \cos y$; d) $v(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

11.- Considere la función $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ analítica en un dominio D que excluye al origen. Use las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares y asumiendo la continuidad de las derivadas parciales, muestre que la función $u(r, \theta)$ satisface la ecuación diferencial parcial

$$r^2 u_{rr}(r, \theta) + r u_r(r, \theta) + u_{\theta\theta}(r, \theta) = 0$$

Que corresponde a la *forma polar de la Ecuación de Laplace*. Muestre que esto también es válido para la función $v(r, \theta)$.

12.- Determine cuáles de las siguientes funciones u son armónicas. Para cada función armónica, encuentre la función armónica conjugada v y exprese $u + iv$ como una función analítica de z.

a) $u(x, y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$

b) $u(x, y) = 2xy + 3xy^2 - 2y^3$

c) $u(x, y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y$

d) $u(x, y) = e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2)$

RESPUESTA. a) $v(x, y) = 4xy - x^3 + 3xy^2 + C$, $f(z) = 2z^2 - iz^3 + iC$; b) En este caso, $u(x, y)$ no es armónica; c) $v(x, y) = ye^x \cos y + xe^x \sin y + C$, $f(z) = ze^z + iC$; d) $v(x, y) = -e^{2xy} \cos(x^2 - y^2) + C$, $f(z) = -ie^{ix^2} + iC$.

Sección 3e:

13.- Evalúe las siguientes integrales:

a) $\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - i\right)^2 dt$

b) $\int_0^{\pi/6} e^{i2t} dt$

c) $\int_0^{\infty} e^{-zt} dt$, con $\operatorname{Re} z > 0$.

RESPUESTA. a) $-\frac{1}{2} - i \ln 4$; b) $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}$; c) $\frac{1}{z}$.

14.- Muestre que si m y n son enteros, entonces

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta}\, e^{-in\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & \text{cuando } m \neq n \\ 2\pi & \text{cuando } m = n \end{cases}$$

Versión preliminar

Sección 3f:

Para las funciones f y los contornos C dados, en los siguientes ejercicios use la representación paramétrica de C para evaluar la integral

$$\int_C f(z)dz$$

15.- $f(z) = (z+2)/z$ y C es

a) el semicírculo $z = 2e^{i\theta}$, con $0 \leq \theta \leq \pi$;

b) el semicírculo $z = 2e^{i\theta}$, con $\pi \leq \theta \leq 2\pi$;

c) el círculo $z = 2e^{i\theta}$, con $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

RESPUESTA. a) $-4+2\pi i$; b) $4+2\pi i$; c) $4\pi i$.

16.- $f(z) = z - 1$ y C es el contorno que va de $z = 0$ a $z = 2$ formado por

a) el semicírculo $z = 1 + e^{i\theta}$, con $\pi \leq \theta \leq 2\pi$;

b) el segmento $0 \leq x \leq 2$ del eje real.

RESPUESTA. a) 0; b) 0.

17.- Evalúe $\int_c (z^2+3z)dz$ a lo largo de

a) el arco $|z| = 2$ que va de $(2,0)$ a $(0,2)$;

b) la línea recta que va de $(2,0)$ a $(0,2)$;

c) las líneas rectas que van de $(2,0)$ a $(2,2)$ y luego de $(2,2)$ a $(0,2)$.

RESPUESTA. $-\frac{44}{3} - \frac{8}{3}i$, en todos los casos.

18.- Con la ayuda del resultado obtenido en el ejercicio 14, evalúe la integral

$$\int_C z^m z^{*n} dz$$

donde m y n son enteros y C es el círculo unitario $|z| = 1$, recorrida en sentido contrarreloj.

19.- Sea C el círculo $|z - z_0| = R$ recorrido en sentido contrarreloj. Use la representación paramétrica para C dada por $z = z_0 + Re^{i\theta}$, (con $-\pi \leq \theta \leq \pi$) para derivar las siguientes fórmulas de integración

a) $\int_C \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$;

b) $\int_C (z-z_0)^{n-1}dz = 0$, con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

20.- Encuentre la antiderivada para evaluar cada una de las siguientes integrales, donde la trayectoria es cualquier contorno entre los límites de integración indicados:

a) $\int_i^{i/2} e^{\pi z} dz$

b) $\int_0^{\pi+2i} \cos\left(\frac{z}{2}\right) dz$

Versión preliminar

c) $\int_1^3 (z-2)^3 dz$.

RESPUESTA. a) $\frac{1+i}{\pi}$; b) $e+\frac{1}{e}$; c) 0.

21.- Sea C la frontera orientada positivamente del cuadrado cuyos lados coinciden con las líneas $x=\pm 2$ y $y=\pm 2$. Evalúe cada una de las siguientes integrales:

a) $\int_C \frac{e^{-z}dz}{z-(\pi i/2)}$;

b) $\int_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)} dz$;

c) $\int_C \frac{z dz}{2z+1}$;

d) $\int_C \frac{\cosh z}{z^4} dz$;

d) $\int_c \frac{\tan(z/2)}{(z-x_0)^2} dz$, con $-2 < x_0 < 2$.

RESPUESTA. a) 2π; b) $\frac{\pi i}{4}$; c) $-\frac{\pi i}{2}$; d) 0; e) $i\pi \sec^2\left(\frac{x_0}{2}\right)$.

22.- Sea C el círculo $|z|=3$, descrito en sentido positivo, Muestre que si

$$g(w)=\int_C \frac{2z^2-z-2}{z-w} dz$$

con $|w| \neq 3$, entonces $g(2)=8\pi i$. ¿Cuál es el valor de $g(w)$ cuando $|w|>3$?

23.- Sea C un contorno simpre cerrado cualquiera, descrito en sentido positivo en el plano z. Considerando que

$$g(w)=\int_C \frac{z^3+2z}{(z-w)^3} dz$$

muestre que $g(w)=6\pi i w$ cuando w está dentro de C y que $g(w)=0$ cuando w está fuera de C.

24.- Muestre que si f es analítica dentro y sobre un contorno cerrado C, y z_0 no está dentro de C, entonces

$$\int_C \frac{f'(z)}{z-z_0} dz = \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$$

25.- Evalúe $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{z^2 dz}{z^2+4}$ donde C es el cuadrado con vértices en ± 2, $\pm 2+4i$ recorrido en dirección contrarreloj.

RESPUESTA. i

Versión preliminar