2.- Funciones de variable compleja.

a) Introducción. Definición de función de variable compleja.
b) Mapeos o transformaciones.
c) Límites y continuidad de una función.
d) Límites y punto al infinito. La esfera de Riemann.

a).- Introducción. Definición de función de variable compleja.

En el estudio de números reales, una función f asigna a un elemento de su dominio un elemento de su rango acorde a una expresión de la forma

$$x \to y = f(x)$$

Por ejemplo, la función $y = f(x) = 2x + 3$ realiza las siguientes asociaciones $x \to y$:

$$0 \to 3$$

$$2 \to 7$$

$$-1 \to 1$$

mientras que su inversa $x = f^{-1}(y) = (y - 3)/2$ realiza las asociaciones $y \to x$.

Para el caso de los números complejos, podemos construir una herramienta similar de asociación entre dos números complejos z y w.

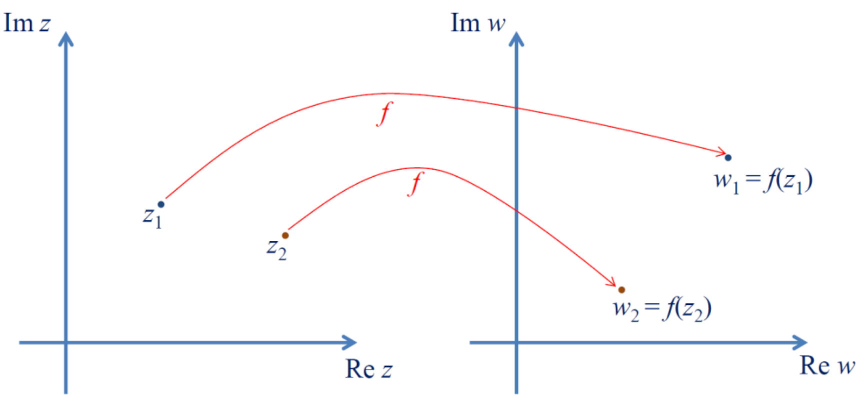
Definición. Sea S un conjunto de números complejos. Una función f de variable compleja definida en S es una regla que asigna a cada número complejo $z = x + iy$ de S, algún número complejo $w = u + iv$.

El número complejo w se llama valor de f en z y se denota por $f(z)$, es decir

$$w = f(z), \tag{2.1}$$

y el conjunto S donde está definida la función $f(z)$ se llama **dominio de *f***.

Para representar gráficamente esta asignación o mapeo, se requieren 2 planos complejos: el plano *z* y el plano *w*, tal como se muestra en la figura anexa.



Dado que z y w son números complejos, relacionados por la función f, es posible escribir

$$w = f(z)$$

$$u + iv = f(x + iy)$$

donde hemos considerado que

$$w = u + iv$$

y

$$z = x + iy.$$

Lo anterior permite expresar a la función de variable compleja $f(z)$ como la suma

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{2.2}$$

cuando usamos la representación rectangular; mientras que en la representación exponencial podemos escribir

$$f(z) = f(r, \theta) = u(r, \theta) + iv(r, \theta) \tag{2.3}$$

donde se ha considerado que

$$z = re^{i\theta}.$$

Ejemplo. Encuentre las partes real e imaginaria de la función $f(z) = 2z^2 - 8z$ y expréselas en forma rectangular [$u(x, y)$ y $v(x, y)$] y forma exponencial [$u(r, \theta)$ y $v(r, \theta)$].

Ejercicios. Encuentre las partes real e imaginaria de las funciones indicadas y expréselas en representación rectangular ($u(x, y)$ y $v(x, y)$) y representación exponencial ($u(r, \theta)$ y $v(r, \theta)$).

1. $f(z) = 3z^2 - 5iz$
2. $f(z) = 1 / z$
3. $f(z) = (2z - 8)/(z^2 + 1)$

Si al realizar esta separación, en cualquiera de sus representaciones, resulta que la función v es siempre cero, entonces decimos que la función $f(z)$ es una **función real de variable compleja**. Un ejemplo de tales funciones es la función $f(z) = zz^*$.

b).- Mapeos o transformaciones.

Como vimos anteriormente, una función compleja de variable compleja $f(z)$ asigna a cada punto $z = (x, y)$ un punto $w = (u, v)$; este tipo de asignación unívoca recibe el nombre de mapeo o transformación.

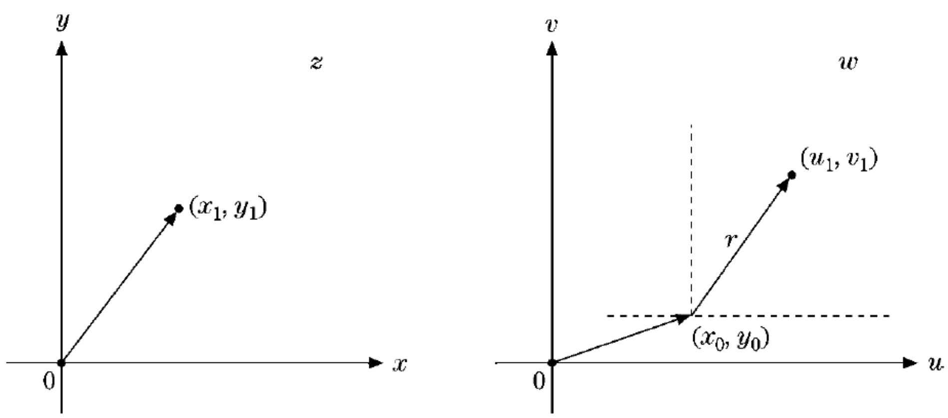
En lo que sigue veremos algunos casos particulares de mapeos que, al aplicarse sobre un conjunto de puntos z_k en el plano complejo (ya sean líneas o áreas), nos permite hablar de traslación, rotación, inversión y reflexión.

Traslación

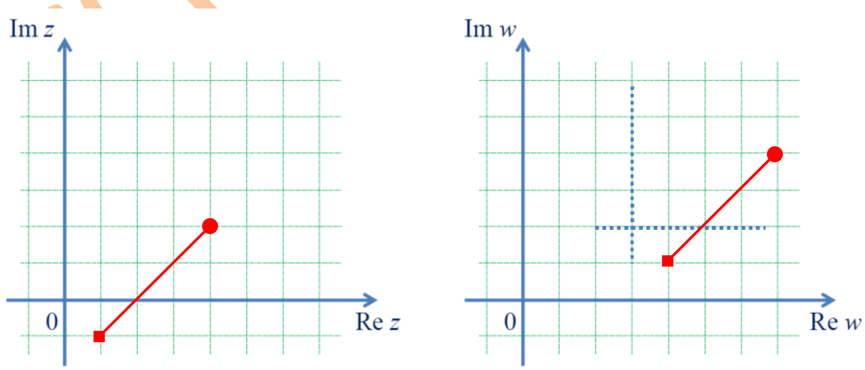
La función

$$w = f(z) = z + z_0 \tag{2.4}$$

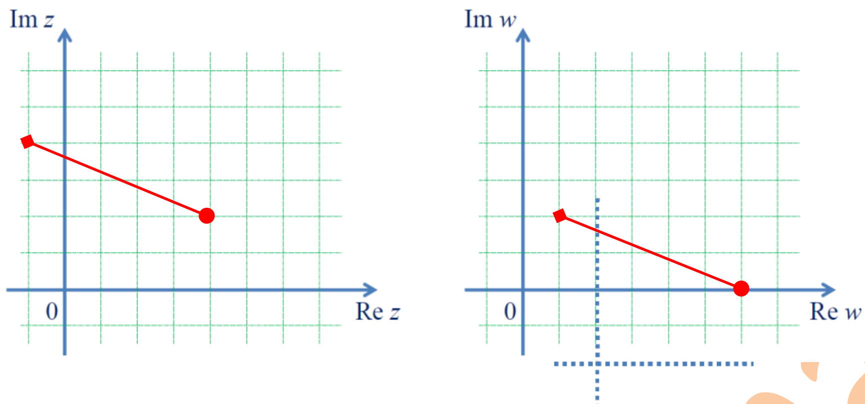
corresponde a una transformación o mapeo que representa una traslación pura del eje de coordenadas, es decir, que traslada al conjunto de puntos z como si el origen se ubicase en z_0, tal como se muestra en la figura.



Por ejemplo, $f(z) = z + 3 + 2i$ traslada al segmento de recta que une los puntos $z_1 = 1 - i$ y $z_2 = 4 + 2i$ tal como se muestra.



Mientras que $g(z) = z + 2 - 2i$ traslada al segmento de recta que une los puntos $z_1 = -1 + 4i$ y $z_2 = 4 + 2i$ tal como se muestra.

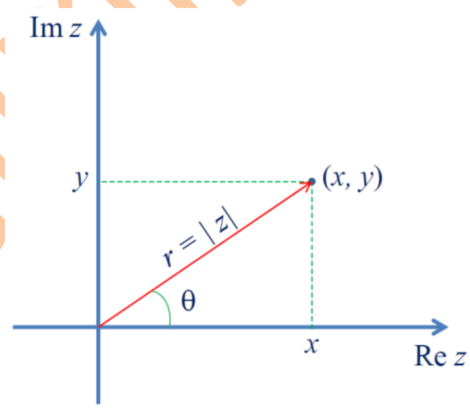


Rotación

Para analizar la rotación es conveniente retomar la representación exponencial del número complejo z, a saber

$$z = re^{i\theta}$$

Tal como se puede inferir de la figura, rotar al número z un ángulo θ_0 es equivalente a sumar θ_0 al argumento de z.



Con lo anterior, podemos afirmar que la función

$$w = f(z) = ze^{i\theta_0} \qquad (2.5)$$

corresponde a una transformación o mapeo que representa una rotación pura del eje de coordenadas, es decir, que rota los ejes real e imaginario un ángulo θ_0.

Si a continuación consideramos el producto

$$w = zz_0$$

podemos usar la siguiente representación polar de dichos números

$$w = \rho e^{i\phi},\ z = re^{i\theta} \text{ y } z_0 = r_0e^{i\theta_0}$$

para tener

$$\rho e^{i\phi} = (re^{i\theta})(r_0e^{i\theta_0})$$

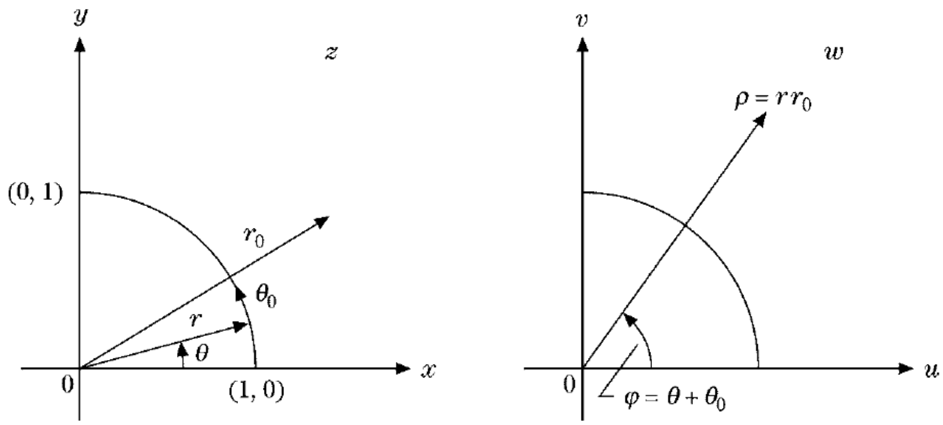
de donde vemos que

$$\rho = rr_0$$

y

$$\phi = \theta + \theta_0$$

Aquí vemos que han ocurrido dos cosas: por una parte, el módulo de z se ha modificado por un factor r_0; y por otra parte, el ángulo se ha incrementado una constante θ_0, tal como se muestra en la figura.

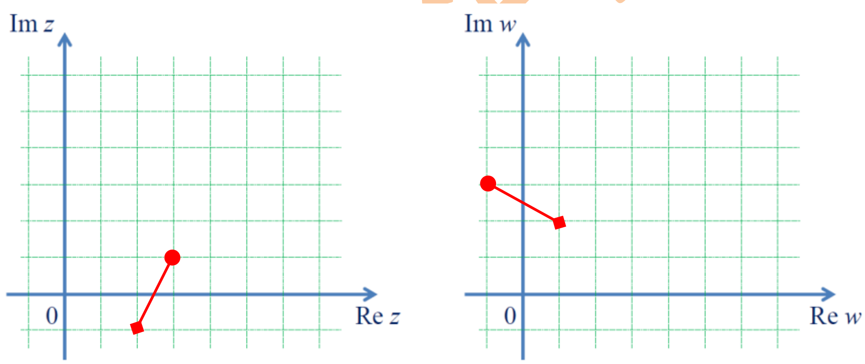


Con lo anterior, podemos afirmar que la función

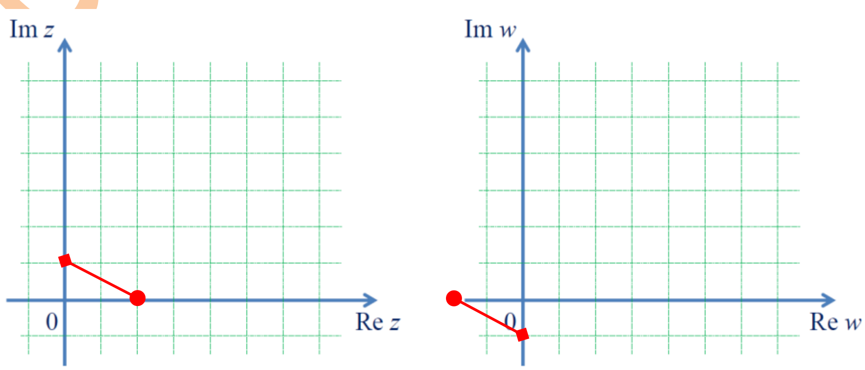
$$w = f(z) = zz_0 \tag{2.6}$$

corresponde a una transformación o mapeo que representa, al mismo tiempo, una rotación por un ángulo θ_0 y una modificación del módulo por un factor r_0; en este caso, la transformación dada por la ecuación (2.5) es un caso particular en el que $r_0 = 1$.

Por ejemplo, $f(z) = iz = e^{i\pi/2}z$ rota $\pi/2$ al segmento de recta que une los puntos $z_1 = 2 - i$ y $z_2 = 3 + i$, tal como se muestra.



Otro caso interesante es $f(z) = -z = (-1)z = e^{i\pi}z$. En este caso, se tiene una rotación de π alrededor del origen, tal como se muestra para el segmento que va de $z_1 = 2$ a $z_2 = i$.



Reflexión

Un caso particular de mapeo corresponde a la reflexión del número complejo z, con respecto al eje real, el cual está dado por la función

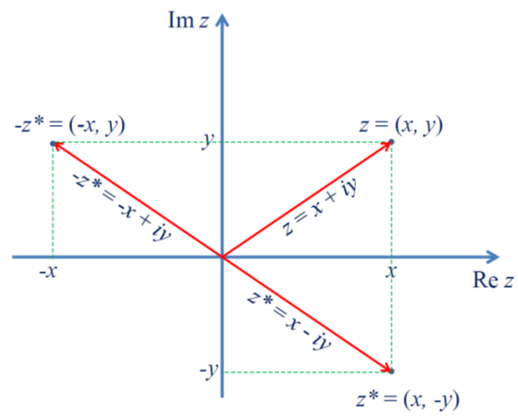
$$f(z) = z^* \tag{2.7}$$

es decir, la función que asigna a un número z su complejo conjugado representa una reflexión en el eje real; mientras que la función

$$f(z) = -z^* \tag{2.8}$$

la cual asigna a un número z el inverso aditivo de su complejo conjugado, representa una reflexión en el eje imaginario.

Lo mencionado anteriormente puede visualizarse en la figura adjunta.



Ejercicio. Represente el mapeo correspondiente a la función $f(z) = z^* + 4i$ para el segmento que va del origen al punto $z = 3 - 5i$.

Inversión

Antes de concluir con esta parte del curso, vamos a considerar la función $f(z)$ dada por

$$w = f(z) = 1 / z \tag{2.9}$$

De nueva cuenta, retomamos la representación polar de los números complejos w y z

$$w = \rho e^{i\phi} \text{ y } z = re^{i\theta}$$

para escribir la expresión (2.9) como

$$\rho e^{i\phi} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

de donde vemos que

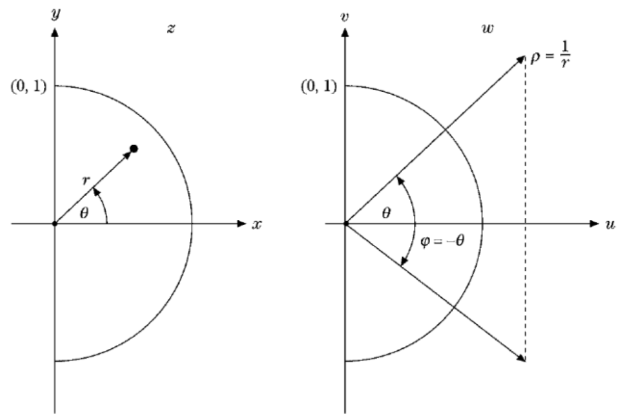
$$\rho = 1/r$$

y

$$\phi = -\theta$$

La primera de las dos últimas expresiones muestra claramente la inversión, el interior de un círculo se mapea en el exterior y el exterior en el interior; mientras que la segunda de ellas muestra que el ángulo se invierte, tal como ocurre con el complejo conjugado.

Gráficamente podemos considerar un semicírculo unitario para mostrar las propiedades de este mapeo, tal como se presenta en la figura.



Ejemplo. Encuentre la imagen o mapeo del segmento de recta que une los puntos $z_1 = 1 + 2i$ y $z_2 = 3$, bajo la transformación

(a) $f(z) = 3z + 2$; y
(b) $f(z) = z^2$.

Solución.

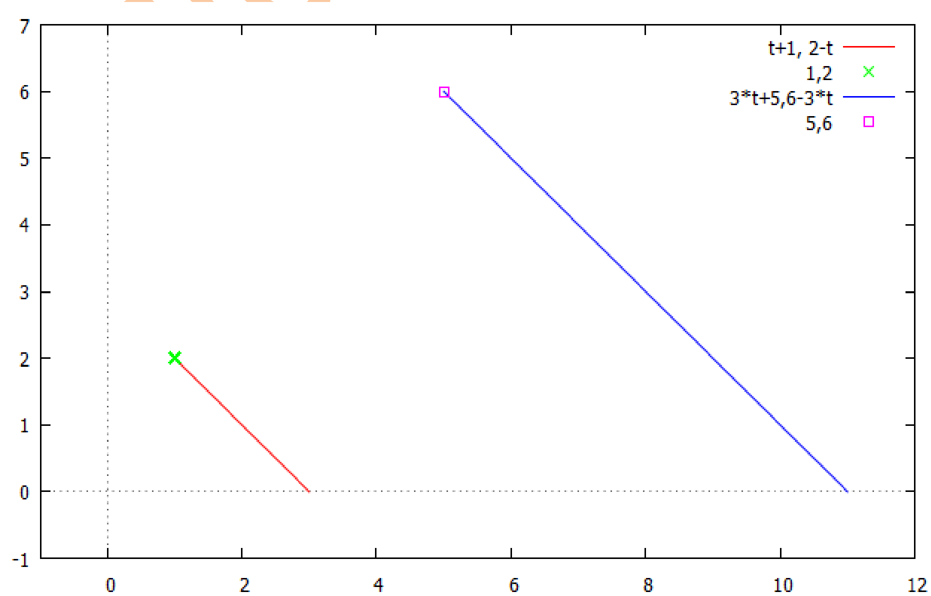
Una posible parametrización del segmento considerado es

$$z(t) = (t + 1) + i(2 - t), \text{ con } 0 \le t \le 2$$

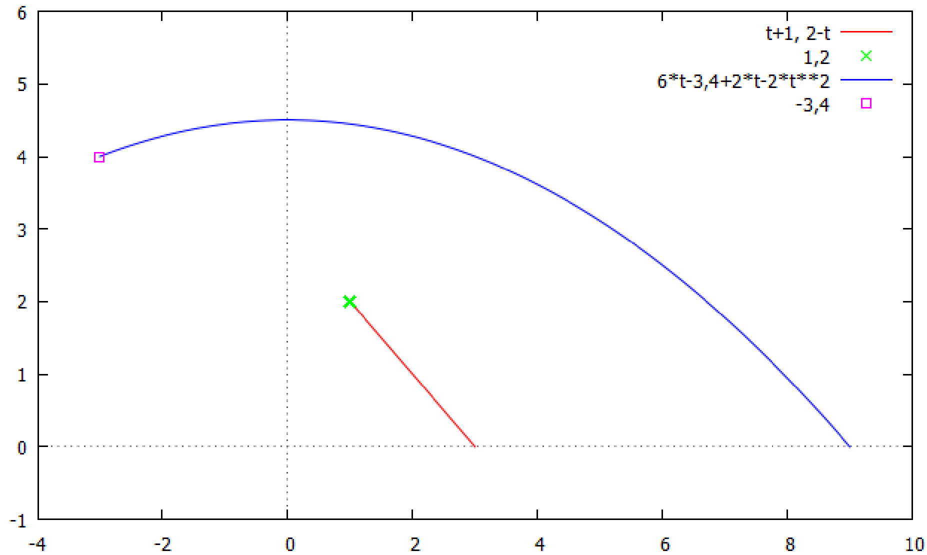
así que procedemos a evaluar, para cada inciso, la correspondiente función $f(z)$.

(a) $f[z(t)] = 3[(t + 1) + i(2 - t)] + 2 = (3t + 5) + i(6 - 3t)$
(b) $f[z(t)] = [(t + 1) + i(2 - t)]^2 = (6t - 3) + i(4 + 2t - 2t^2)$

En la figura siguiente se muestran, en un mismo Diagrama de Argand, las gráficas correspondientes al segmento de recta en el plano z y su mapeo en el plano w, para la función $f(z) = 3z + 2$



Mientras que en la figura siguiente se muestran las gráficas correspondientes al segmento de recta en el plano z y su mapeo en el plano w, para la función $f(z) = z^2$.



Ejercicios.

1. Para el segmento de recta que va del punto $z_1 = x_1 + iy_1$ al punto $z_2 = x_2 + iy_2$, encuentre el mapeo de dicho segmento bajo las siguientes transformaciones:
   a) $f(z) = e^z$; y
   b) $f(z) = 1 / (z + 1)$.
2. Usando los resultados del problema anterior, bosqueje la región del plano w en la que se mapea el rectángulo con vértices en (0,0), (2,0), (2,1) y (0,1) del plano z.

Solución.

1. Para este problema, la expresión que parametriza al segmento de recta es

$$z(t) = ((x_2 - x_1)t + x_1) + i((y_2 - y_1)t + y_1),\ \text{con } 0 \le t \le 1$$

por lo que las expresiones para el mapeo en el plano w son

$$w = f(z) = e^{x(t)}\left(\cos\left[y(t)\right] + i\sin\left[y(t)\right]\right)$$

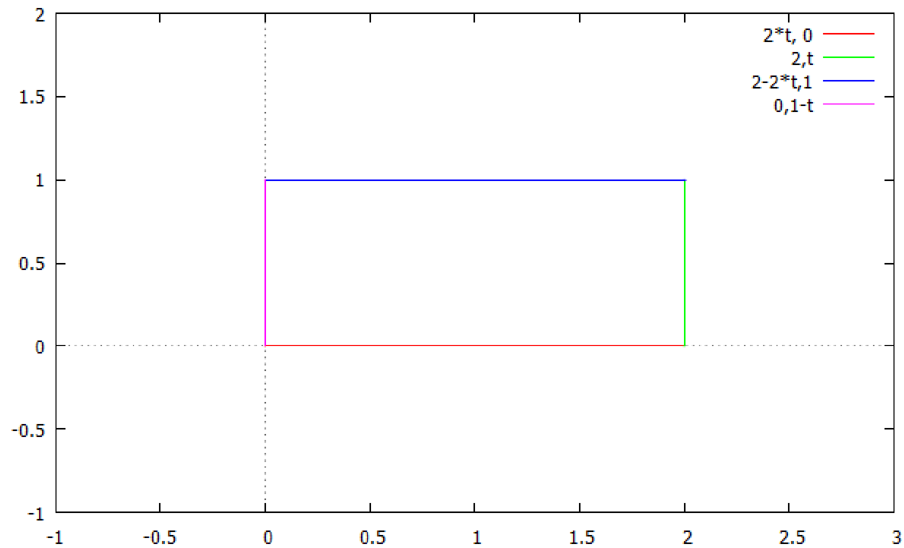
y

$$w = f(z) = \left(\frac{x(t)+1}{\left(x(t)+1\right)^2 + \left(y(t)\right)^2}\right) - i\left(\frac{y(t)}{\left(x(t)+1\right)^2 + \left(y(t)\right)^2}\right)$$

2. En este caso, lo segmentos son

- De (0,0) a (2,0): $x(t) = 2t$, $y(t) = 0$.
- De (2,0) a (2,1): $x(t) = 2$, $y(t) = t$.
- De (2,1) a (0,1): $x(t) = 2 - 2t$, $y(t) = 1$.
- De (0,1) a (0,0): $x(t) = 0$, $y(t) = 1 - t$.

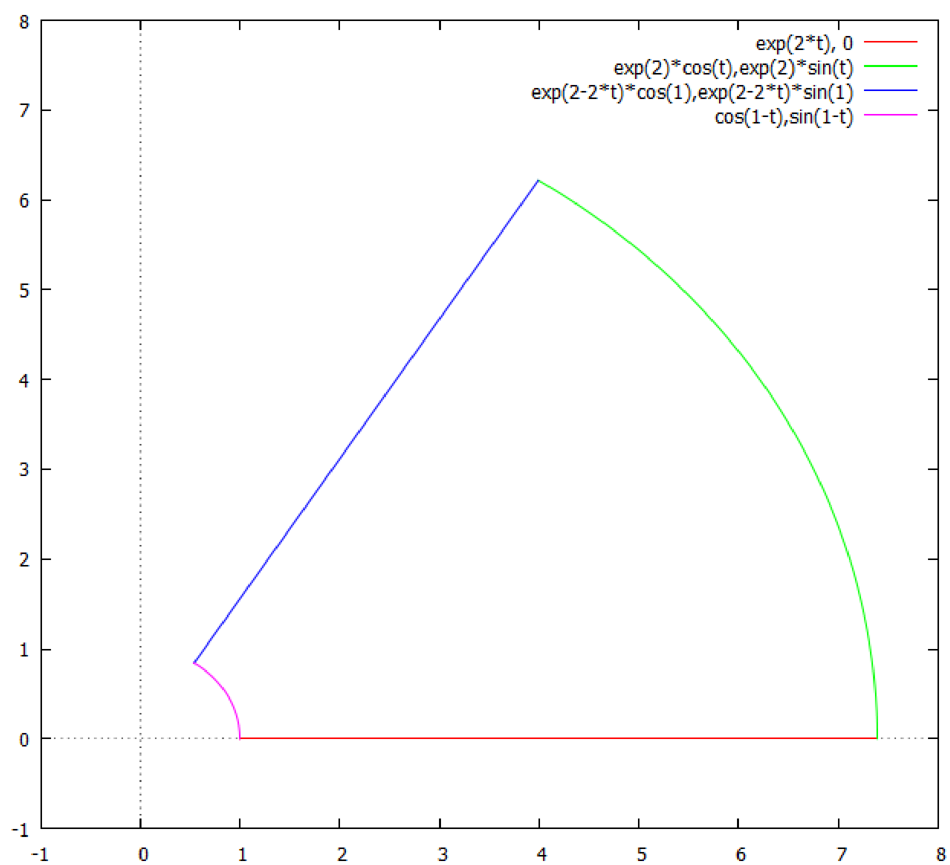
Los cuales se muestran a continuación.



Así que para $f(z) = e^z$, estos segmentos nos llevan al mapeo

- $w = e^{2t}[\cos 0 + i \text{ sen } 0] = (e^{2t}, 0)$
- $w = e^2[\cos t + i \text{ sen } t] = (e^2 \cos t, e^2 \text{ sen } t)$
- $w = e^{2\text{-}2t}[\cos 1 + i \text{ sen } 1] = (e^{2\text{-}2t} \cos 1, e^{2\text{-}2t} \text{ sen } 1)$
- $w = e^0[\cos(1\text{-}t) + i \text{ sen}(1\text{-}t)] = (\cos(1\text{-}t), \text{sen}(1\text{-}t))$

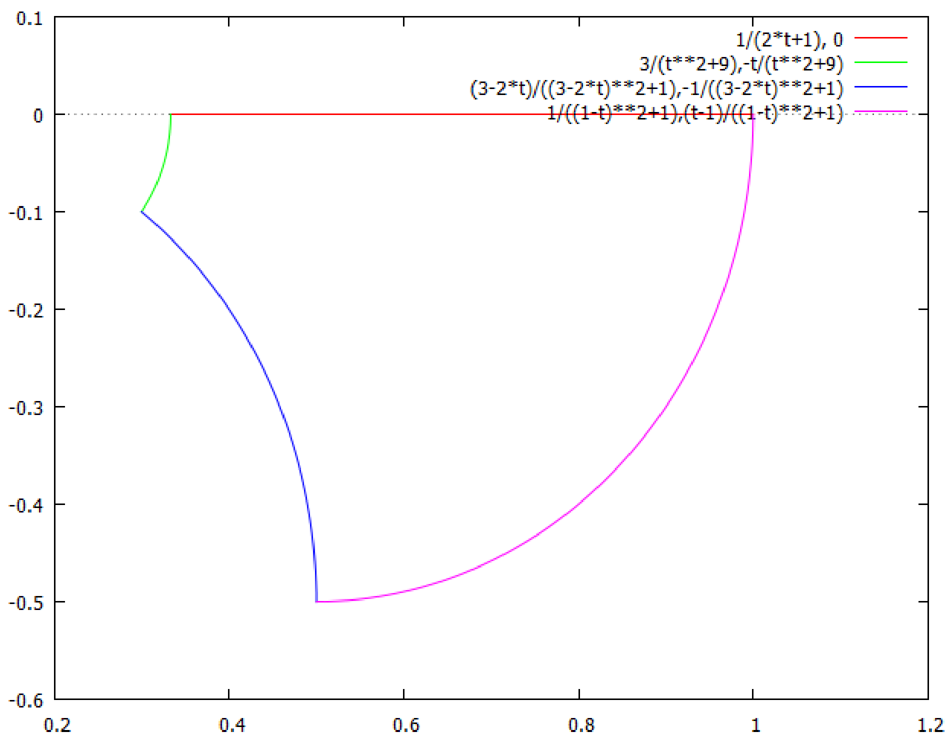
El mapeo anterior se muestra en la figura siguiente.



Mientras que para $f(z) = 1 / (z + 1)$, los segmentos considerados previamente, nos llevan a

- $w = \left(\dfrac{1}{(2t+1)}, 0 \right)$
- $w = \left(\dfrac{3}{(t^2+9)}, \dfrac{-t}{(t^2+9)} \right)$
- $w = \left(\dfrac{3-2t}{(3-2t)^2+1}, \dfrac{-1}{(3-2t)^2+1} \right)$
- $w = \left(\dfrac{1}{1+(1-t)^2}, \dfrac{t-1}{1+(1-t)^2} \right)$

Este mapeo se muestra en la figura siguiente.



c).- Límite y continuidad de una función.

Para introducir los conceptos de límite y continuidad de una función vamos a considerar que la función $f(z)$ está definida en un dominio D y que z_0 es un punto de D.

A continuación, vamos a ver que el límite y la continuidad de la función $f(z)$ se definen de la misma manera que en el caso de variable real.

Definición. Sea $f(z)$ una función definida en todos los puntos de cierta vecindad de z_0, excepto, posiblemente en el mismo z_0. Se dice que w_0 es el límite de $w = f(z)$, si para cualquier número positivo ε, existe un número positivo δ tal que

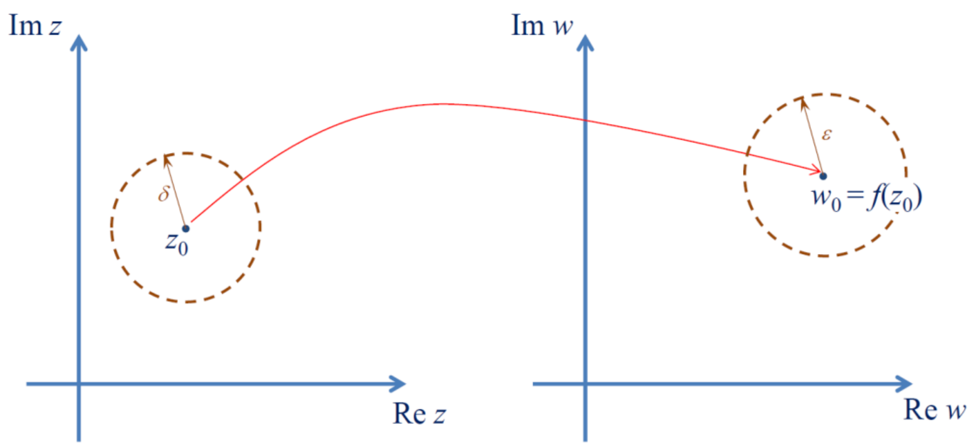
$$\left| f(z) - w_0 \right| < \varepsilon \text{, siempre que } \left| z - z_0 \right| < \delta .$$

Se denota el límite de $f(z)$ con la expresión

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \qquad (2.10)$$

cuando w_0 corresponde al límite de la función $f(z)$ cuando z se aproxima a z_0; y significa que la región alrededor de w_0 puede hacerse arbitrariamente pequeña conforme z se aproxima a z_0 sin importar la forma en que lo hace.

La definición anterior puede visualizarse en el siguiente esquema.



Ejemplo. Demuestre que si $f(z) = z / z^*$, entonces $\lim_{z \to 0} f(z)$ no existe.

Solución. En este caso, basta mostrar que $\lim_{z \to 0} f(z) = 1$ cuando nos acercamos al origen recorriendo el eje real, mientras que $\lim_{z \to 0} f(z) = -1$ cuando lo hacemos recorriendo el eje imaginario.

Lo anterior muestra que hay dos valores para el límite, pero debido a que el límite debe ser único podemos concluir con la aseveración de que el límite planteado NO existe.

A continuación se enuncian una serie de teoremas sobre límites que pueden ser fácilmente demostrado (quedando esto para los estudiantes interesados en tales demostraciones).

Separabilidad de las partes real e imaginaria

Suponga que $f(z) = u(z) + i\, v(z)$ y que $z = x + i\, y$, entonces

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(z) = u_0$$

y

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(z) = v_0$$

con lo que

$$w_0 = u_0 + i v_0$$

Teoremas útiles sobre límites

Supongamos que

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A \qquad \text{y} \qquad \lim_{z\to z_0} g(z) = B$$

entonces

i. $\lim_{z\to z_0}\left[f(z) \pm g(z)\right] = A \pm B$ (Suma de límites)

ii. $\lim_{z\to z_0}\left[f(z) g(z)\right] = AB$ (Producto de límites)

iii. $\lim_{z\to z_0}\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right] = \dfrac{A}{B}$, siempre que $B \neq 0$ (Cociente de límites)

Continuidad de una función

La condición de continuidad para una función de variable compleja $w = f(z)$, en analogía con el caso de funciones reales, se enuncia de la siguiente manera.

Definición. La función $f(z)$ *es continua* en el punto z_0 si se cumple que

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

lo que implica que $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existe, y que $f(z_0)$ también existe.

Función polinomial $P_n(z)$

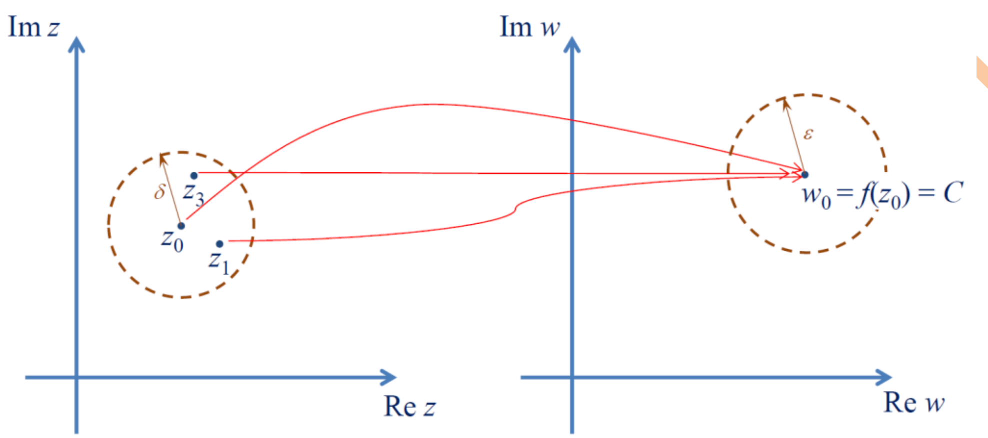
Las ideas anteriormente desarrolladas nos permiten concluir que una función polinomial $P_n(z)$ es continua para todo z, donde $P_n(z)$ está definido como

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \ldots + a_1 z + a_0$$

donde n es un entero positivo.

Para justificar lo anterior notemos que

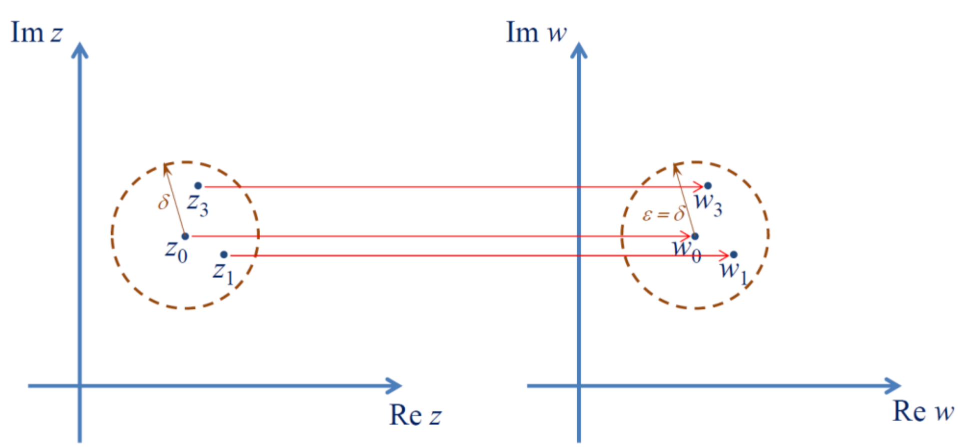
i. Para toda función constante $f(z) = C$, el mapeo que se tiene es el siguiente



De aquí vemos que es evidente que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} C = C$$

ii. Para la función identidad $f(z) = z$, el mapeo que se tiene es el siguiente



En este caso, la definición de límite se cumple cuando $\delta = \varepsilon$, con lo que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} z = z_0$$

iii. Para los términos z^n con $n > 1$, basta aplicar los dos resultados anteriores, junto con el límite de un producto, de manera recursiva, para mostrar que los términos $a_n z^n$ son continuos.

Con todo esto, podemos escribir que

$$\lim_{z \to z_0} P_n(z) = P_n(z_0)$$

Límite absoluto

Otro resultado de aplicar la definición de límite establece que si

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

entonces

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = |w_0|$$

d).- Límites y el punto al infinito.

Plano complejo extendido

Hasta el momento el plano complejo, como lo hemos visto, no tiene claramente definido el infinito.

Sin embargo, en muchas situaciones es necesario considerar un punto al infinito; cuando esto ocurre, y el plano complejo incluye al infinito, hablamos del *plano complejo extendido*.

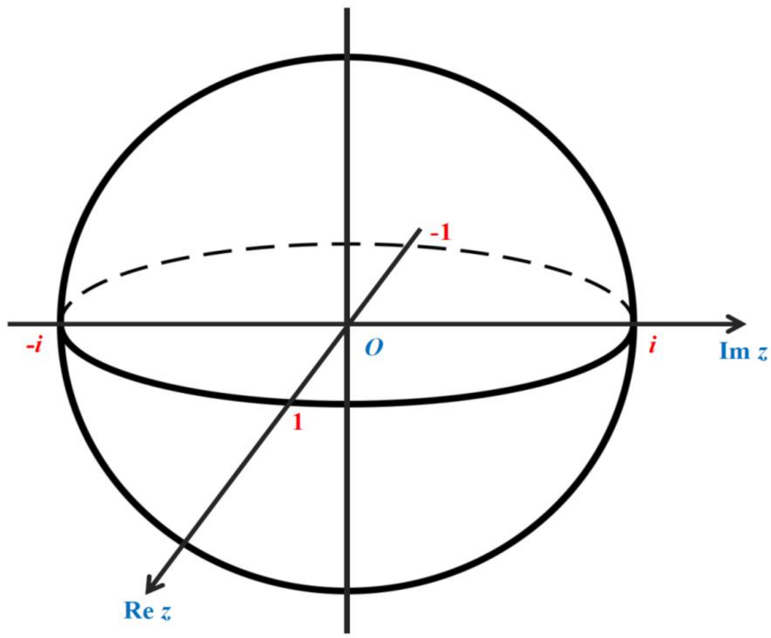
En el caso de variables reales, el infinito consta de dos puntos ubicados en los extremos negativo y positivo del eje real, en ambos casos el valor absoluto es el mismo: infinito. Para el caso de los números complejos, si queremos extender la idea nos encontramos con un problema, ya que existe un número infinito de números complejos z tales que su módulo (el análogo al valor absoluto) es infinito, para evitar esta situación trataremos con el llamado punto al infinito.

Para visualizar este punto al infinito se utiliza la siguiente idea.

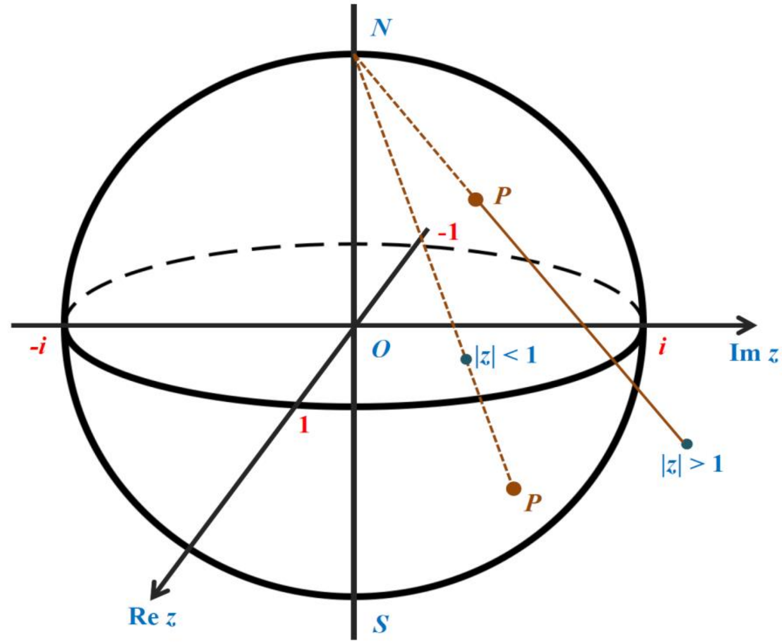
Consideremos que el plano complejo pasa por el ecuador de una esfera unitaria centrada en el origen O, tal como se muestra.

A cada punto z del plano le corresponde un punto P en la superficie de la esfera.

El punto P se determina por la intersección de la recta que va del polo norte N al punto z sobre el plano.



Para puntos z tales que $|z| > 1$ el punto P se ubica sobre el hemisferio Norte, para puntos tales que $|z| = 1$, el punto P está sobre el ecuador, mientras que para puntos z tales que $|z| < 1$ el punto P está sobre el hemisferio Sur; tal como se muestra en la siguiente figura.



Al punto P ubicado en el polo Norte le corresponde el **punto al infinito** representado por ∞.

A la esfera unitaria utilizada para desarrollar la idea del punto al infinito se le conoce como **esfera de Riemann** y a la correspondencia entre puntos P de la esfera y puntos z del plano se le llama **proyección estereográfica**.

Con lo anterior, todos los puntos P de la esfera corresponden con puntos z en el plano complejo extendido, es importante notar que esta correspondencia entre puntos es uno a uno.

Límites y punto al infinito

Con el esquema anterior, podemos ver que conforme aumenta $|z|$, el punto P sobre la esfera se acerca a N, lo que nos permite decir que para ε positivo y pequeño, los puntos en el plano complejo exteriores al círculo $|z| = 1/\varepsilon$ corresponden a puntos sobre la esfera próximos al punto N, con lo que podemos afirmar que el conjunto $|z| > 1/\varepsilon$ es un entorno de infinito (∞).

Usando la idea anterior, podemos interpretar la expresión

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$$

En este caso, se tiene que para cada número positivo ε existe un número positivo δ tal que

$$|f(z)| > 1/\varepsilon$$

siempre que

$$0 < |z - z_0| < \delta,$$

es decir, si z está en el entorno de z_0, entonces $f(z)$ está en el entorno $|z| > 1/\varepsilon$ para infinito.

Finalmente, con las ideas desarrolladas anteriormente, resulta válido establecer que si z_0 y w_0 son puntos en los planos complejos z y w, respectivamente, entonces

i. $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$, si y sólo si $\lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$

ii. $\lim_{z \to \infty} f(z) = w_0$, si y sólo si $\lim_{z \to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0$

iii. $\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$, si y sólo si $\lim_{z \to 0} \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} = 0$

Ejercicios sugeridos.

Sección 2a:

1.- Escribe la función $f(z) = z^3 + z + 1$ en la forma $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$.

RESPUESTA: $f(x, y) = (x^3 - 3xy^2 + x + 1) + i(3x^2y - y^3 + y)$.

2.- Suponga que $f(z) = f(x, y) = x^2 - y^2 - 2y + i(2x - 2xy)$, donde $z = x + iy$. Use las expresiones

$$x = \frac{z+z^*}{2} \quad \text{y} \quad y = \frac{z-z^*}{2i}$$

para escribir $f(z)$ en términos de z, y simplifique el resultado.

RESPUESTA. $f(z) = {z^*}^2 + 2iz$.

3.- Escriba la función $f(z) = z + \frac{1}{z}$ con $(z \neq 0)$ en la forma $f(z) = f(r, \theta) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$.

RESPUESTA. $f(z) = f(r, \theta) = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta$.

4.- Separe cada una de las siguientes funciones $f(z)$ en sus componentes real e imaginaria, es decir, encuentre $u(x, y)$ y $v(x, y)$ tales que $f(z) = u + iv$.

(a) $f(z) = 2z^2 - 3iz$;

(b) $f(z) = z + 1/z$;

(c) $f(z) = \frac{1-z}{1+z}$;

(d) $f(z) = z^{1/2}$;

(e) $f(z) = z + \bar{z}^2 + 5i$.

Sección 2b:

5.- Bosqueje la región en la que se mapea el sector $r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/4$ considerando las transformaciones (a) $w = z^2$; (b) $w = z^3$; (c) $w = z^4$.

6.- Muestre que las líneas $ay = x$ con $a \neq 0$ se mapea en las espirales $\rho = \exp a\varphi$ bajo la transformación $f(z) = \exp z$, donde $w = \rho \exp i\varphi$.

7.- Encuentre la imagen de la tira semiinfinita $x \geq 0$, $0 \leq y \leq \pi$ bajo la transformación $w = \exp z$, e identifique los segmentos correspondientes de las fronteras.

8.- La transformación $f(z) = \frac{1}{z}$, mapea el interior del círculo unitario $|z| = 1$ en su exterior, y viceversa. Bajo esta transformación, ¿en qué se mapea la línea $\arg z = constante$?

Sección 2c:

9.- Considerando que a, b y c denotan constantes complejas, use la definición de límite para mostrar que

(a) $\lim_{z \to z_0} (az + b) = az_0 + b$;

(b) $\lim_{z \to z_0} (z^2 + c) = z_0^2 + c$;

10.- Considerando que n es un entero positivo, y $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios tales que $Q(z_0) \neq 0$. Use los teoremas sobre límites que apliquen, haciendo mención explícita de ellos, para encontrar

(a) $\lim_{z \to z_0} \frac{1}{z^n}$, con $z_0 \neq 0$;

(b) $\lim_{z \to i} \frac{iz^3 - 1}{z + i}$;

(c) $\lim_{z \to z_0} \frac{P(z)}{Q(z)}$.

RESPUESTA. (a) $\frac{1}{z_0^n}$; (b) 0 ; (c) $\frac{P(z_0)}{Q(z_0)}$.

11.- Evalúe los siguientes límites usando los teoremas que apliquen. En cada caso, enuncie precisamente que teorema(s) usó.

(a) $\lim_{z \to 2i} (iz^4 + 3z^2 - 10i)$

(b) $\lim_{z \to e^{\pi i/4}} \frac{z^2}{z^4 + z + 1}$

(c) $\lim_{z \to i/2} \frac{(2z-3)(4z+i)}{(iz-1)^2}$

(d) $\lim_{z \to i} \frac{z^2+1}{z^6+1}$

(e) $\lim_{z \to 1+i} \left(\frac{z-1-i}{z^2-2z+2}\right)^2$

12.- Demuestre que $\lim_{z \to 1+i} \frac{z^2-z+1-i}{z^2-2z+2} = 1 - \frac{1}{2}i$.

Sección 2d:

13.- Use los teoremas sobre límites al infinito para mostrar que

(a) $\lim_{z\to\infty} \frac{4z^2}{(z-1)^2} = 4;$

(b) $\lim_{z\to 1} \frac{1}{(z-1)^3} = \infty;$

(c) $\lim_{z\to\infty} \frac{z^2+1}{z-1} = \infty.$

14.- Con la ayuda de los teoremas sobre límites al infinito, muestre que cuando

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

con $ad - bc \neq 0$, se cumple que

(a) $\lim_{z\to\infty} T(z) = \infty$, si $c = 0$;

(b) $\lim_{z\to\infty} T(z) = \frac{a}{c}$ y $\lim_{z\to -d/c} T(z) = \infty$, si $c \neq 0$.

15.- Demuestre que $\lim_{z\to\infty} \frac{z^3-3z+2}{z^4+z^2-3z+5} = 0.$