1.- Álgebra de números complejos.

a) Definición y representación geométrica.
b) Sumas y productos de números complejos.
c) Vectores y módulos en el plano complejo.
d) Representación en forma exponencial. Fórmula de Euler.
e) Potencias y raíces de números complejos.
f) Regiones en el plano complejo (o z-plano).

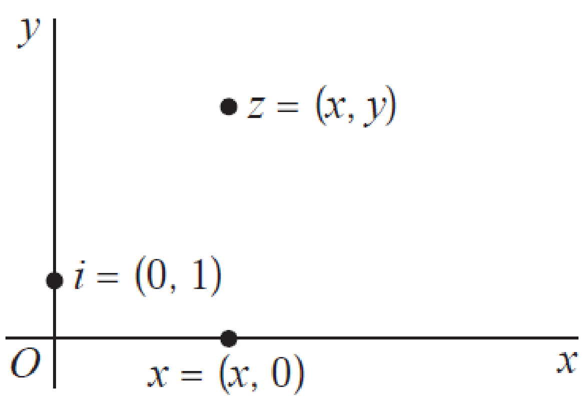
a).- Definición y representación geométrica.

En cursos previos de Matemáticas se han estudiado los números complejos, por lo que en esta parte del curso haremos una revisión de lo ya visto en dichos cursos, partiendo de la definición de número complejo.

Definición. Un número complejo, z, es un número que se expresa como $z = x + iy$ o, de manera equivalente, $z = x + yi$, donde x e y son dos reales cualesquiera. Se conoce a i como la **unidad imaginaria**, tal que $i^2 = -1$.

El número complejo z se puede representar como pares ordenados (x, y) de números reales, tal que

$$z = (x, y)$$



los cuales pueden interpretarse como puntos en el plano complejo, con coordenadas rectangulares x e y; de manera análoga a la representación de los reales x como puntos sobre el eje real.

Por lo anterior, se denotará con $x = \mathrm{Re}\, z$, a la parte real del número z; y con $y = \mathrm{Im}\, z$, a la parte imaginaria de z.

Los números complejos de la forma $z = x + i0$ se denominan **reales puros** o, simplemente, **reales**; y los números complejos de la forma $z = 0 + iy$ se denominan **imaginarios puros**.

Igualdad de números complejos

Dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$ serán iguales siempre y cuando tengan las mismas partes reales y las mismas partes imaginarias, es decir

$$x_1 = x_2 \quad \text{e} \quad y_1 = y_2.$$

Lo que significa que z_1 y z_2 corresponden al mismo punto en el plano complejo.

Es importante mencionar que **en los números complejos no existe una relación de orden**, es decir, las conocidas relaciones de orden que se usan en el caso de los números reales no son aplicables. Por ejemplo, usando números reales podemos afirmar que $3 < 8$ ó que $11 > -4$, pero al emplear números complejos no tiene sentido afirmar que $3 + i < 4 + 2i$.

b).- Sumas y productos de números complejos.

Para construir las operaciones básicas del algebra de los números complejos, como lo son sumar (o restar) y multiplicar (o dividir), es importante considerar que los números reales son un subconjunto de los números complejos, de tal forma que muchas de las propiedades ampliamente conocidas de los reales se extienden a los complejos.

Suma (o resta) de números complejos

Sean dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ se define la suma (o resta) de z_1 y z_2 como

$$z = z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2)$$

es decir

$$z = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

La definición anterior implica que para sumar (o restar) dos números complejos es suficiente sumar (o restar) por separado las partes reales e imaginarias de dichos números.

Producto de números complejos

Sean dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ se define el producto (o multiplicación) de z_1 y z_2 como

$$z = z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

$$z = x_1 x_2 + x_1 i y_2 + i y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2$$

es decir

$$z = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2)$$

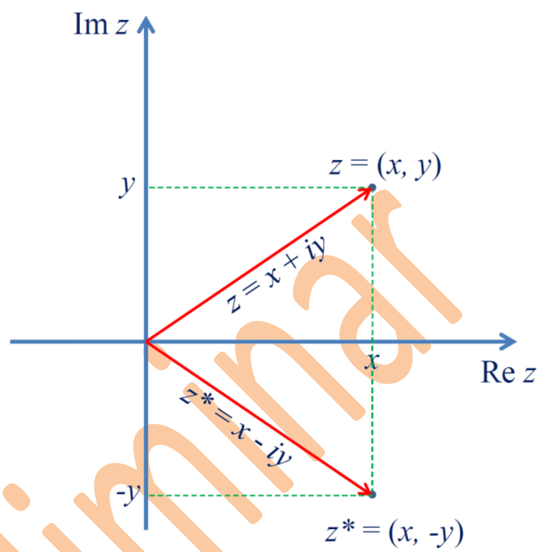
En general, el resultado del producto de dos números complejos definido anteriormente es un número complejo; sin embargo, hay un caso particular de producto que aparece en muchos campos de la física cuando requerimos tener cantidades que representen magnitudes reales (medibles) a partir de cantidades complejas.

Para ello se define el **complejo conjugado** de un número complejo z, de la siguiente manera.

Sea un número complejo $z = x + iy$, se define su complejo conjugado z^* como

$$z^* = x - iy$$

El número complejo z^* se representa por el punto $(x, -y)$, el cual es la reflexión en el eje real del punto (x, y) que representa a z, tal como se muestra en la figura anexa.



Con la definición anterior, se tiene que

$$z^* z = (x + iy)(x - iy)$$

es decir

$$z^* z = x^2 + y^2$$

Lo que significa que el producto de un número complejo z por su complejo conjugado z^* resulta siempre en una cantidad real.

División de números complejos

Sean dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ (con $z_2 \neq 0$) se define la división (o cociente) de z_1 y z_2 como

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$$

Para poder realizar la operación anterior, se hace uso del anteriormente definido complejo conjugado; en este caso, se multiplican el numerador y el denominador por el complejo conjugado del denominador, a saber

$$z = \frac{z_1}{z_2}\left(\frac{z_2^*}{z_2^*}\right) = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}\left(\frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2}\right)$$

es decir

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

de donde

$$z = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

Ejercicio. Dado el número complejo $z_1 = x_1 + iy_1$, encuentre el número complejo z_2 tal que $z_1z_2 = 1$.

Solución.

$$z_2 = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} - i\frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}$$

En este ejemplo, el número complejo z_2 representa el inverso multiplicativo de z_1., es decir

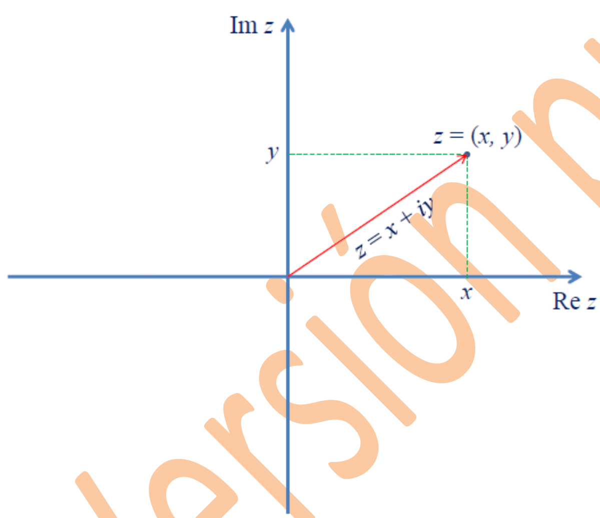
$$z_2 = (z_1)^{-1}$$

c).- Vectores y módulos en el plano complejo.

Dada la estructura de los números complejos surge de manera natural la inquietud por una representación geométrica de los mismos, para lo cual retomamos ideas de graficación empleadas anteriormente que nos permiten definir el plano complejo o z-plano.

El plano complejo o z-plano se forma por la intersección de los ejes real e imaginario, tal como lo hacen los ejes x e y de un plano cartesiano.

Con lo anterior, podemos interpretar geométricamente al número complejo z como el vector que va del origen al punto (x, y).



El vector z se puede escribir como la suma de las componentes real e imaginaria, a saber

$$z = x + iy$$

que corresponde a la representación rectangular de un número complejo.

La interpretación vectorial de un número complejo es especialmente útil para extender el concepto de valor absoluto de números reales al plano complejo.

Definición. El *módulo o valor absoluto* de un número complejo $z = x + iy$ se define como el número real no negativo $\sqrt{x^2 + y^2}$ y se denota por $|z|$, es decir

$$|z| \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$$

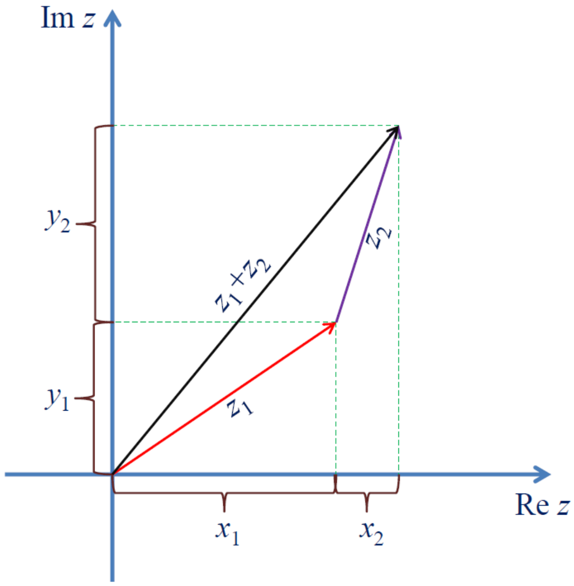
Geométricamente, el número $|z|$ es la distancia entre el punto (x, y) y el origen, o la longitud del radio vector que representa a z. Se reduce al conocido valor absoluto que se tiene en el conjunto de los reales, cuando $y = 0$.

Es importante notar que la desigualdad $z_1 < z_2$ carece de sentido, a menos que z_1 y z_2 sean reales; sin embargo, la desigualdad $|z_1|<|z_2|$ significa que el punto z_1 está más cerca al origen que lo que el punto z_2 lo está.

Cuando $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$, la suma

$$z = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

corresponde al punto (x_1+x_2, y_1+y_2), el cual representa el punto final del vector suma, tal como se muestra en la figura.

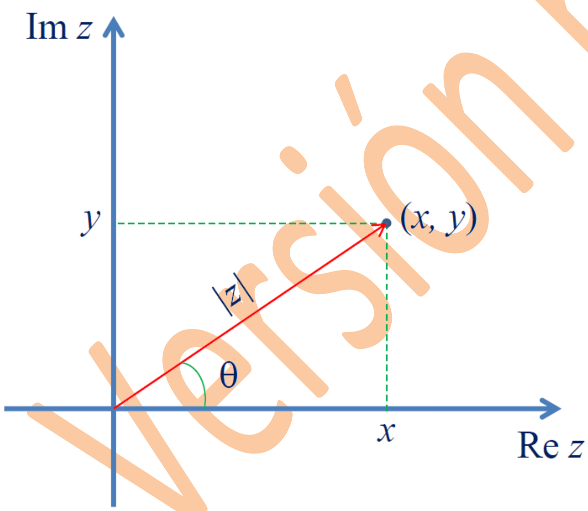


Usando esta interpretación geométrica para un número complejo cualquiera, es evidente la validez de la llamada *desigualdad del triángulo* que se escribe, en este caso, como

$$|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$$

En este caso, $|z_1 + z_2|$ representa el módulo del número complejo que resulta de la suma de z_1 y z_2, y cuyos módulos son $|z_1|$ y $|z_2|$, respectivamente.

d).- Representación en forma exponencial. Fórmula de Euler.



Como vimos anteriormente, se puede representar un número complejo (no nulo) en el z-plano como un vector, por lo que suena lógico retomar las representaciones empleadas en el estudio de vectores en dos dimensiones.

En este caso, usando coordenadas polares, podemos escribir

$$x = \operatorname{Re} z = |z| \operatorname{Cos} \theta$$
$$y = \operatorname{Im} z = |z| \operatorname{Sen} \theta$$

Con lo que podemos representar al número complejo $z = x + iy$ con la expresión

$$z = |z| \left(\cos\theta + i \sin\theta\right) \tag{1.1}$$

donde $|z|$ es el módulo del número complejo z y está dado por

$$|z| \equiv \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}\ , \tag{1.2}$$

mientras que el ángulo θ, medido en radianes, está dado por

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right) \tag{1.3}$$

o simplemente,

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Es importante asentar que cuando $z = 0$, la representación polar no es posible ya que el ángulo θ queda indefinido.

Como el cálculo del ángulo, al involucrar una función tangente, resulta en un número infinito de valores que difieren por múltiplos enteros de 2π, se hace necesaria la siguiente definición.

Definición. Cada valor de θ, dado por la ecuación (1.3), se llama *argumento de* z, y el conjunto de todos esos valores se denota por $\arg z$. El *valor principal* de $\arg z$, denotado por $\operatorname{Arg} z$, corresponde al valor del argumento ubicado entre $-\pi$ y π.

Usando esto, podemos escribir

$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2n\pi$$

donde $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

Con lo anterior, **la representación polar para el número complejo** $z = x + iy$, en su forma más general, se escribe como

$$z = |z|\left[\cos(\theta + 2n\pi) + i\sin(\theta + 2n\pi)\right] \tag{1.4}$$

con $|z|$ y θ definidos anteriormente y $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

Si ahora se considera el desarrollo en Series de Taylor para la exponencial, conocida como Fórmula de Euler, a saber

$$e^{i\theta} = \operatorname{Cos}\,\theta + i\ \operatorname{Sen}\,\theta$$

podemos escribir al número complejo z, dado por la ecuación (1.1), como

$$z = |z|\,e^{i\theta} \tag{1.5}$$

o en forma más general como

$$z = |z|\,e^{i(\theta + 2n\pi)} \tag{1.6}$$

con $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$, y $|z|$ y θ definidos previamente.

Ejemplo. Analice $\arg z$ y $\operatorname{Arg} z$ para $z_1 = i$, $z_2 = -1$ y $z_3 = -1 - i$.

Solución.

$\arg z_1 = \pi/2 + 2n\pi$, $\arg z_2 = \pi + 2n\pi$, $\arg z_3 = 5\pi/4 + 2n\pi$.

$\operatorname{Arg} z_1 = \pi/2$, $\operatorname{Arg} z_2 = \pi$, $\operatorname{Arg} z_3 = -3\pi/4$.

Ejercicio. Muestre que $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

La ecuación (1.5) se conoce como representación exponencial del número complejo z y es muy útil porque permite simplificar los cálculos al hacer uso de las propiedades inherentes a la función exponencial.

En esta representación, el complejo conjugado z^* está dado por

$$z^* = |z|e^{-i\theta} \tag{1.7}$$

La igualdad de dos números complejos z_1 y z_2 en representación polar (o exponencial) ocurre si

$$|z_1| = |z_2|$$

y

$$\theta_1 = \theta_2 + 2n\pi$$

con $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

La primera condición está relacionada con la igualdad de los módulos, mientras que la segunda condición toma en cuenta la multiplicidad de los valores angulares.

Antes de pasar a ver la última operación aritmética pendiente: la potenciación, veamos un último aspecto (por el momento) de la representación exponencial, la generación de regiones circulares en el plano complejo.

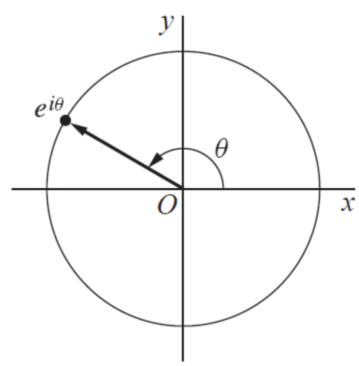
Si uno retoma la representación exponencial (o polar) de un número complejo tenemos

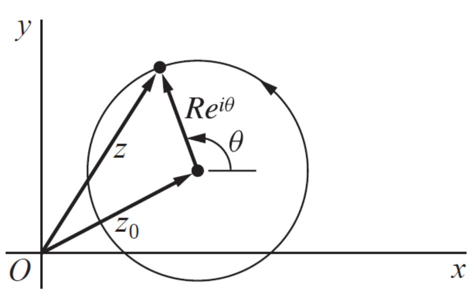
$$z = |z|e^{i\theta}$$

a continuación podemos llamar $|z| = R$ para tener

$$z = Re^{i\theta} \tag{1.8}$$

Si ahora consideramos el ángulo como un parámetro que toma valores entre 0 y 2π, la expresión (1.8) se convierte en una representación paramétrica de una circunferencia de radio R, centrada en el origen. Conforme el parámetro θ se incrementa de $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$, el punto z inicia en el eje real positivo y sigue un recorrido en dirección contrarreloj.





De manera más general, la circunferencia $|z - z_0| = R$, cuyo centro se ubica en z_0 y con un radio R, tiene la representación paramétrica

$$z = z_0 + Re^{i\theta} \tag{1.9}$$

Con $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

e).- Potencias y raíces de números complejos.

Considerando simple trigonometría, podemos ver que la exponencial compleja $e^{i\theta}$ tiene la siguiente propiedad para el producto $e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$.

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} &= \left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right) \\ &= \left(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\right) + i\left(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2\right) \\ &= \cos\left(\theta_1+\theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1+\theta_2\right) \end{aligned}$$

es decir

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

Con esto, podemos obtener rápidamente el producto z_1z_2 como

$$z_1z_2 = |z_1|e^{i\theta_1}|z_2|e^{i\theta_2} = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{1.10}$$

y el cociente z_1/z_2 como

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|e^{i\theta_1}}{|z_2|e^{i\theta_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1-\theta_2)} \tag{1.11}$$

Un caso particular de este último resultado es el relacionado con el inverso multiplicativo z^{-1} de un número complejo no nulo $z = |z|e^{i\theta}$; en tal caso se tiene

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{|1|e^{i0}}{|z|e^{i\theta}} = \frac{1}{|z|}e^{i(0-\theta)} = \frac{1}{|z|}e^{-i\theta}$$

Retomando la ecuación (1.5) podemos escribir una expresión para la potencia n-ésima de z, z^n, de la siguiente forma

$$z^n = \left(|z|e^{i\theta}\right)^n$$

es decir

$$z^n = |z|^n e^{in\theta} \tag{1.12}$$

para $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

Desarrollando la exponencial compleja en senos y cosenos, podemos escribir la expresión (1.12) como

$$z^n = |z|^n \left(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\, n\theta\right) \tag{1.13}$$

Las ecuaciones (1.12) y (1.13) son equivalentes y nos dan la forma más sencilla de calcular la potencia n-ésima de un número complejo z, con la única condición de que este debe estar escrito previamente en forma exponencial.

Ejemplos. Usando el desarrollo del binomio y, por otro lado, la representación exponencial calcule lo expresado y compruebe que se obtiene el mismo resultado.

1. $(2 + 3i)^4$
2. $(5 - 6i)^2$

Antes de continuar con el cálculo de la raíz n-ésima de un número complejo veamos la utilidad de la representación exponencial para encontrar relaciones para los argumentos de productos y cocientes.

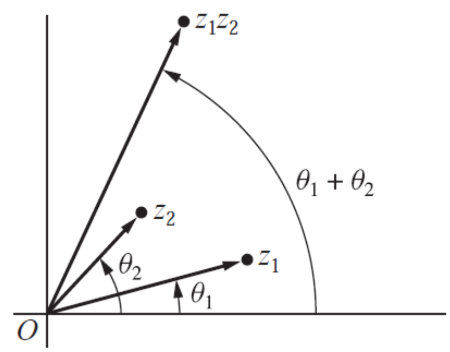
Si retomamos la ecuación (1.10)

$$z_1 z_2 = |z_1| e^{i\theta_1} |z_2| e^{i\theta_2} = |z_1||z_2| e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

vemos inmediatamente que

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \tag{1.14}$$

Lo anterior permite ilustrar el producto de dos números complejos tal como se muestra en la figura siguiente.



De manera similar, podemos retomar la ecuación (1.11)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| e^{i\theta_1}}{|z_2| e^{i\theta_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

de donde vemos que

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \tag{1.15}$$

Ambas ecuaciones son muy útiles en el producto o cociente de dos números complejos, ya que pueden utilizarse para encontrar uno de los argumentos, conocidos los otros dos.

A continuación vamos a revisar la operación pendiente: el cálculo de la raíz de un número complejo.

Para ello vale la pena resolver primero la ecuación

$$z^n = 1 \tag{1.16}$$

es decir, encontrar la raíz n-ésima de la unidad.

La ecuación anterior se puede escribir como

$$\left(|z| e^{i\theta}\right)^n = e^{i(0+2\pi k)} \quad \text{con} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

es decir

$$|z|^n e^{in\theta} = 1 e^{i2\pi k}$$

Separando la ecuación anterior en sus partes real e imaginaria podemos escribir las siguientes igualdades

$$|z|^n = 1$$
$$n\theta = 2\pi k \quad \text{con } k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

de donde

$$|z| = 1 \tag{1.17}$$

y

$$\theta = \frac{2\pi k}{n} \tag{1.18}$$

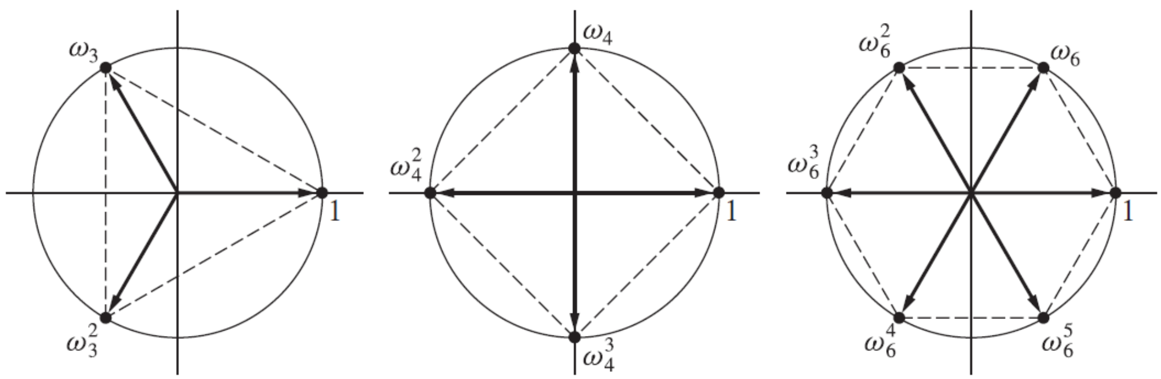
Con lo que la solución para la ecuación (1.16) se puede escribir como

$$z = e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}\right)} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \tag{1.19}$$

Para tener soluciones distintas, y recordando que el Argumento de un número complejo toma valores entre $-\pi$ y π, se debe considerar que

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{1.20}$$

Gráficamente podemos representar las raíces n-ésimas de la unidad como un polígono circunscrito en un círculo de radio 1 con n aristas.



Extendiendo la idea anterior, pero aplicada a la ecuación

$$z^n = z_0 \tag{1.21}$$

se encuentra que la raíz n-ésima de dicha ecuación está conformada por el conjunto de números complejos c_k dados por

$$c_k = |z_0|^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \tag{1.22}$$

donde

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{1.23}$$

El valor obtenido cuando $k = 0$ se le llama ***raíz principal*** del número complejo z_0.

Ejercicios.

1. Calcule
   a) $(3+4i)^{\frac{1}{2}}$
   b) $(4-4i)^{\frac{1}{5}}$
2. Resuelva la ecuación $z^6+1=i\sqrt{3}$

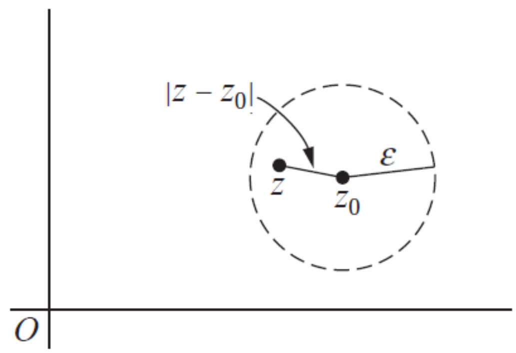
f).- Regiones en el plano complejo (o z-plano).

Antes de terminar con esta introducción a los números complejos vamos a establecer una serie de conceptos y definiciones que nos serán de gran utilidad en el estudio de las funciones de variable compleja que realizaremos más adelante.

Una de estas definiciones es la vecindad o entorno ε de un número complejo z.

Definición. La ***vecindad o entorno ε*** del número complejo z_0 se define como el conjunto de puntos z tales que

$$|z-z_0|<\varepsilon$$

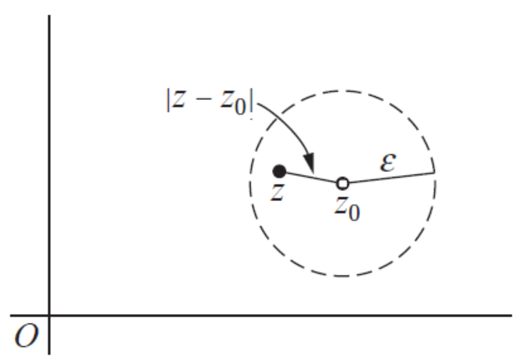


Gráficamente, el entorno está formado por el conjunto de puntos que forman parte del círculo de radio ε centrado en z_0 dejando fuera a los puntos de la circunferencia, tal como se muestra en la figura.

En ocasiones se tiene que trabajar con entornos en los que se excluye a z_0, en tal caso se habla de un entorno punteado o perforado.

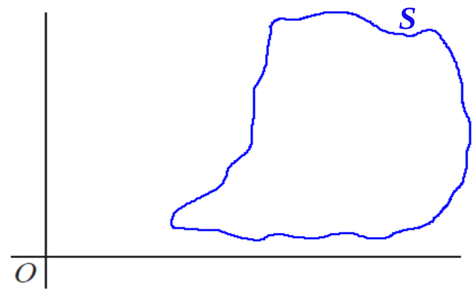
Definición. Se define como ***entorno punteado o perforado*** del número complejo z_0 al conjunto de números complejos z tales que

$$0<|z-z_0|<\varepsilon$$

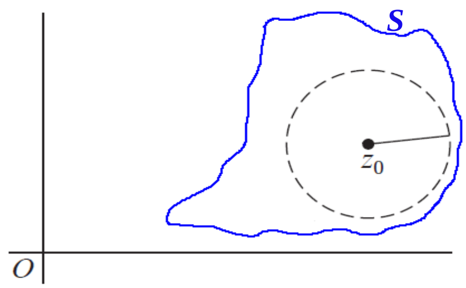


Gráficamente, el entorno perforado es similar al anterior, solo que ahora se ha eliminado el punto z_0, tal como lo muestra el esquema.

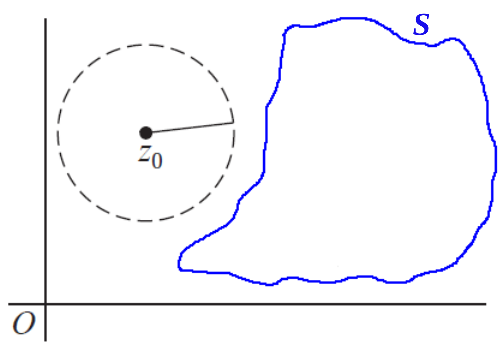
Continuando con los conceptos que usaremos más adelante, consideremos el siguiente conjunto de números complejos S para definir tres tipos de puntos: interior, exterior y frontera.



Definición. Se dice que un número complejo z_0 es un ***punto interior*** del conjunto S si todos los elementos de su entorno son elementos de S.

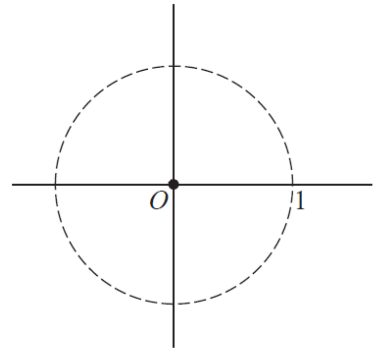


Definición. Se dice que un número complejo z_0 es un ***punto exterior*** al conjunto S si todos los elementos de su entorno no pertenecen a S.



Definición. Los puntos que no entran en ninguna de las dos definiciones anteriores se llaman ***puntos frontera***, y al conjunto de todos los puntos frontera se le llama simplemente la frontera de S.

Por ejemplo, si consideramos el círculo unitario $|z| < 1$ mostrado en el esquema, la frontera de S son los puntos z que satisfacen la expresión $|z| = 1$, los puntos exteriores satisfacen la expresión $|z| > 1$, mientras que los puntos interiores satisfacen la relación $|z| < 1$.



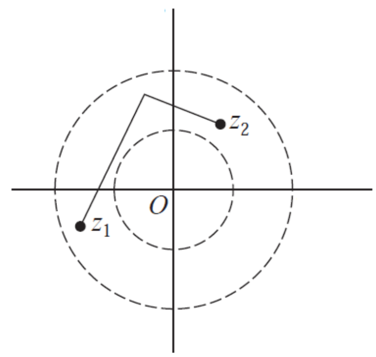
Definición. Un conjunto S es un ***conjunto abierto*** si no contiene a su frontera, es decir, a todos sus puntos frontera.

El ejemplo anterior es un conjunto abierto.

Definición. Un conjunto S es un ***conjunto cerrado*** si contiene a todos sus puntos frontera.

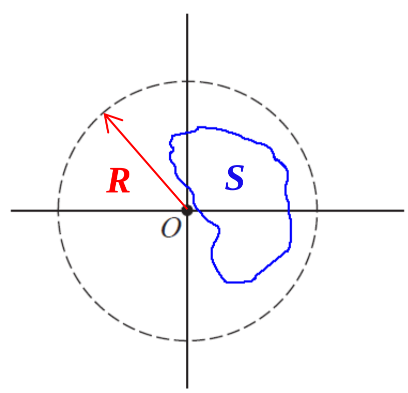
Si consideramos un ejemplo similar al anterior, pero definido por $|z| \leq 1$ se tendrá un conjunto cerrado.

Definición. Un ***conjunto*** abierto es ***conexo*** si para cualquier par de puntos z_1 y z_2 pertenecientes a dicho conjunto estos se pueden unir por una línea poligonal que esté completamente contenida en el conjunto. Si no satisface esta condición, entonces se dice que es un ***conjunto no conexo***.



Definición. Un conjunto con estas características: abierto y conexo, se llama ***dominio*** y si incluye a todos los puntos frontera se llama ***región***.

Definición. Un ***conjunto*** S es ***acotado*** si todos los puntos de S están dentro de un círculo de radio finito R, es decir que todos los puntos z de S satisfagan la relación $|z| < R$, en caso contrario será un ***conjunto no acotado***.



Ejercicios sugeridos.

Secciones 1a y 1b:

1. Verifique que

(a) $\left(\sqrt{2}-i\right)-i\left(1-\sqrt{2}i\right)=-2i$;

(b) $(2,-3)(-2,1)=(-1,8)$;

(c) $(3,1)(3,-1)\left(\frac{1}{5},\frac{1}{10}\right)=(2,1)$.

2. Muestre que $(1+z)^2=1+2z+z^2$.

3. Verifique que cada uno de los dos números $z=1\pm i$ satisfacen la ecuación $z^2-2z+2=0$.

4. Verifique

(a) la ley asociativa para la suma de números complejos, la cual establece que $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$;

(b) la ley distributiva para números complejos, que se enuncia como $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.

5. Resuelva la ecuación $z^2+z+1=0$ para $z=(x,y)$ escribiéndola como

$$(x,y)(x,y)+(x,y)+(1,0)=(0,0)$$

y luego resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas para x e y que resulta.

RESPUESTA. $z=\left(-\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

6. Reduzca cada una de las siguientes cantidades a un número real:

(a) $\frac{1+2i}{3-4i}+\frac{2-i}{5i}$;

(b) $\frac{5i}{(1-i)(2-i)(3-i)}$;

(c) $(1-i)^4$

RESPUESTA. (a) $-2/5$; (b) $-1/2$; (c) -4.

7. Localiza vectorialmente los números z_1+z_2 y z_1-z_2 cuando

(a) $z_1=2i,\ z_2=\frac{2}{3}-i$;

(b) $z_1=\left(-\sqrt{3},1\right),\ z_2=\left(\sqrt{3},0\right)$;

(c) $z_1=(-3,1),\ z_2=(1,4)$;

(d) $z_1=x_1+iy_1,\ z_2=x_1-iy_1$.

8. Considerando los números complejos $z_1=3+4i$ y $z_2=2-i$, represéntelos en un Diagrama de Argand junto al número w tal que

(a) $w=z_1+z_2$;

(b) $w=z_1-z_2$;

(c) $w = z_1 z_2$;

(d) $w = \frac{z_1}{z_2}$;

(e) $w = z_1 z_1$;

Sección 1c:

9. Verifique que $\sqrt{2}|z| \geq |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$.

10. En cada caso, bosqueje el conjunto de puntos determinados por la condición dada:

(a) $|z - 1 + i| = 1$;

(b) $|z + i| \leq 3$;

(c) $|3z - 5 + i| > 6$;

(d) $|2z - 4i| \geq 7$.

11. Use las propiedades de conjugados y módulos para mostrar que

(a) $\overline{\bar{z} + 3i} = z - 3i$;

(b) $\overline{iz} = -i\bar{z}$;

(c) $\overline{(2 + i)^2} = 3 - 4i$;

(d) $\left|(2\bar{z} + 5)\left(\sqrt{2} - i\right)\right| = \sqrt{3}|2z + 5|$.

12. Bosqueje el conjunto de puntos determinados por la condición

(a) $\mathrm{Re}(\bar{z} - i) = 2$;

(b) $|2\bar{z} + i| = 4$.

13. Pruebe que

(a) z es real si y sólo si $\bar{z} = z$;

(b) z es ya sea real o imaginario puro si y sólo si $\bar{z}^2 = z^2$.

14. Usando las expresiones

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{z + \bar{z}}{2} \ \text{ e } \ \mathrm{Im}\, z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

muestre que la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ se puede escribir como $z^2 + \bar{z}^2 = 2$.

Sección 1d:

15. Encuentre el argumento principal $\mathrm{Arg}\, z$ cuando

(a) $z = \frac{i}{-2-2i}$;

(b) $z = \left(\sqrt{3} - i\right)^6$.

RESPUESTA. (a) $-3\pi/4$; (b) π.

16. Use la fórmula de Moivre para derivar las siguientes identidades trigonométricas:

(a) $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$;

(b) $\sin 3\theta = 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta$.

17. Considerando que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, use el desarrollo de $e^{i\frac{\pi}{12}}$ para evaluar $\cot\frac{\pi}{12}$.

RESPUESTA. $2+\sqrt{3}$.

18. Sean z un número complejo no nulo y n un entero negativo ($n = -1, -2, \cdots$). Considere escribir $z = re^{i\theta}$ y $m = -n = 1, 2, \cdots$. Usando las expresiones

$$z^m = r^m e^{im\theta} \quad \text{y} \quad z^{-1} = \left(\frac{1}{r}\right)e^{-i\theta}$$

verifique que $(z^m)^{-1} = (z^{-1})^m$ y entonces la definición $z^n = (z^{-1})^m$ puede escribirse de manera alterna como $z^n = (z^m)^{-1}$.

19. Pruebe que dos números complejos no nulos z_1 y z_2 tienen los mismo módulos si y sólo si hay dos números complejos c_1 y c_2 tales que $z_1 = c_1c_2$ y $z_2 = c_1\overline{c_2}$.

SUGERENCIA: Note que

$$\exp\left(i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\exp\left(i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right) = \exp(i\theta_1)$$

y

$$\exp\left(i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\overline{\exp\left(i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)} = \exp(i\theta_2)$$

20. Evalúe las siguientes expresiones:

(a) $\operatorname{Re} e^{2iz}$

(b) $\left|e^{\sqrt{i}}\right|$

(c) e^{i^3}

(d) i^i

RESPUESTA. (a) $e^{-2y}\cos 2x$; (b) $e^{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$; (c) $\cos 1 - i\sin 1$; (d) $e^{-\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}$.

Sección 1e:

21. En cada caso, encuentre todas las raíces en notación rectangular, muéstrelas como los vértices de ciertos cuadrados e indique cuál de ellas es la raíz principal:

(a) $(-16)^{1/4}$;

(b) $\left(-8-8\sqrt{3}i\right)^{1/4}$.

RESPUESTAS: (a) $\pm\sqrt{2}(1+i)$, $\pm\sqrt{2}(1-i)$; (b) $\pm\left(\sqrt{3}-i\right)$, $\pm\left(1+\sqrt{3}i\right)$.

22. En cada caso, encuentre todas las raíces en notación rectangular, muéstrelas como los vértices de ciertos polígonos regulares e identifique la raíz principal:

(a) $(-1)^{1/3}$;

(b) $8^{1/6}$.

RESPUESTAS: (b) $\pm\sqrt{2}$, $\pm\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}}$, $\pm\frac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}}$.

23. (a) Sea a cualquier número real fijo y muestre que las dos raíces cuadradas de $a+i$ son

$$\pm\sqrt{A}\exp\left(i\frac{\alpha}{2}\right)$$

donde $A=\sqrt{a^2+1}$ y $\alpha=\operatorname{Arg}(a+i)$.

(b) Con la ayuda de las identidades trigonométricas

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1+\cos\alpha}{2} \text{ y } \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

muestre que las raíces cuadradas obtenidas en la parte (a) se pueden escribir como

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{A+a}+i\sqrt{A-a}\right)$$

24. Encuentre los cuatro ceros (raíces) del polinomio z^4+4, siendo uno de ellos

$$z_0=\sqrt{2}e^{i\pi/4}=1+i$$

Luego use estos ceros para factorizar z^4+4 en factores cuadráticos con coeficientes reales.

RESPUESTA: $(z^2+2z+2)(z^2-2z+2)$.

25. Encuentre cada una de las raíces indicadas, localícelas gráficamente e identifique a la raíz principal.

(a) $\left(2\sqrt{3}-2i\right)^{1/2}$;

(b) $(-4+4i)^{1/5}$;

(c) $\left(2+2\sqrt{3}i\right)^{1/3}$;

(d) $(-16i)^{1/4}$;

(e) $(64)^{1/6}$;

(f) $(i)^{2/3}$.

26. Encuentre todas las raíces indicadas, localícelas en el plano complejo e identifique a la raíz principal.

(a) Raíz cúbica de 8;

(b) Raíz cuadrada de $4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$;

(c) Raíz quinta de $-16+16\sqrt{3}i$;

(d) Raíz sexta de $-27i$.

27. Encuentre las raíces cuadradas de (a) $5-12i$, (b) $8+4\sqrt{5}i$.

RESPUESTA: (a) $3-2i, -3+2i$; (b) $\sqrt{10}+\sqrt{2}i, -\sqrt{10}-\sqrt{2}i$.

Sección 1f:

28. Bosqueje los siguientes conjuntos y determine cuáles son dominios:

(a) $|z-2+i| \leq 1$;

(b) $|2z+3| > 4$;

(c) $\operatorname{Im} z > 1$;

(d) $\operatorname{Im} z = 1$;

(e) $0 \leq \arg z \leq \pi/4 \ (z \neq 0)$;

(f) $|z-4| \geq |z|$.

RESPUESTA: (b), (c) son dominios.