Universidad de Sonora
Departamento de Física

“El saber de mis hijos hará mi grandeza”

Mecánica II

Dr. Roberto Pedro Duarte Zamorano

Temario

1) Cinemática rotacional.
2) Dinámica rotacional.
3) Las leyes de Newton en sistemas de referencia acelerados.
4) La ley de la gravitación de Newton.
5) Oscilaciones.
6) Movimiento ondulatorio.
7) Ondas sonoras.

Temario

6. Movimiento ondulatorio y sonido.
    1. Características del movimiento ondulatorio. Tipos de ondas.
    2. Ondas viajeras y velocidad de onda.
    3. Velocidad de onda en una cuerda.
    4. Ondas senoidales o armónicas.
    5. Energía transportada por una onda.
    6. Potencia e intensidad de las ondas sonoras. Decibeles.

Temario

6. Movimiento ondulatorio y sonido.
    7. El principio de superposición. Interferencia de ondas.
    8. Ondas estacionarias. Cuerdas vibrantes y columnas de aire.
    9. Efecto Doppler.
    10. La ecuación de onda.

1.- Características del movimiento ondulatorio. Tipos de ondas.

¿Qué es una onda?

Una onda mecánica es una perturbación de un medio que permite transmitir energía de un punto a otro, sin desplazamiento longitudinal del medio.

Para la existencia de una onda mecánica se requiere:

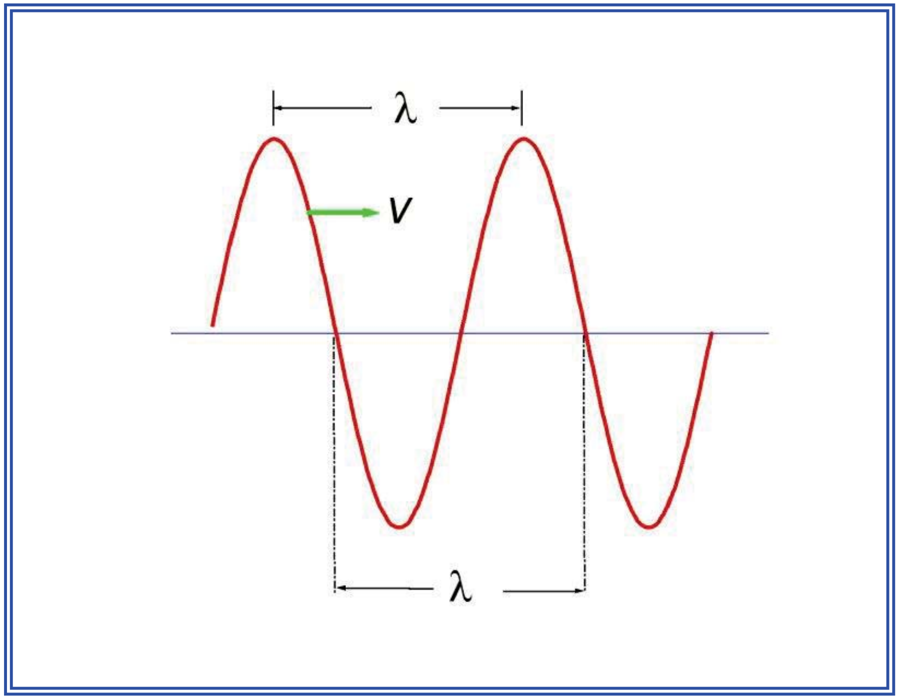
- Una fuente (de perturbación);
- Un medio (que pueda perturbarse);
- Cierta conexión física por medio de la cual partes adyacentes del medio puedan afectarse entre sí.

La cantidad de energía transmitida por un medio y el mecanismo responsable de ese transporte difiere de un caso a otro.

1.- Características del movimiento ondulatorio. Tipos de ondas.

Las características físicas en la descripción de una onda son:

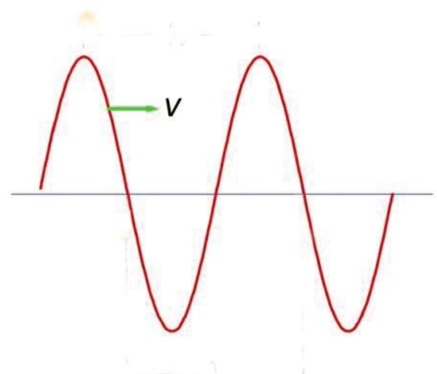
- La longitud de onda (λ). Distancia mínima entre dos puntos cualesquiera sobre una onda que se comportan idénticamente, como pueden ser los valles o las crestas.
- La frecuencia (*f*). Tasa en el tiempo a la cual la perturbación se repite a si misma.
- La velocidad de onda (*v*). Rapidez con la que se propaga la perturbación y que depende del medio.

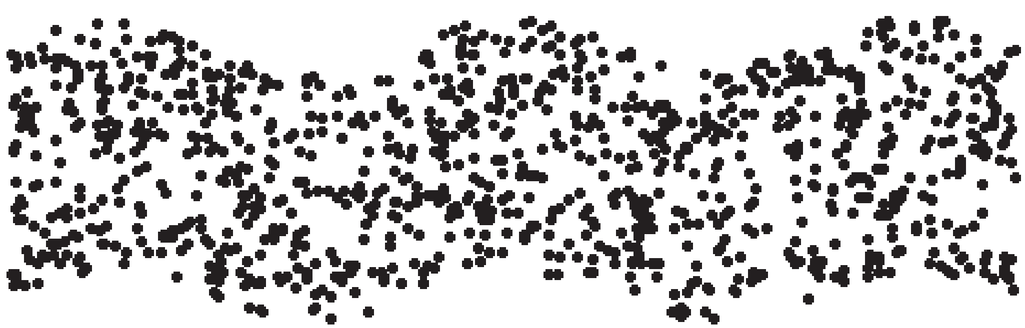


1.- Características del movimiento ondulatorio. Tipos de ondas.

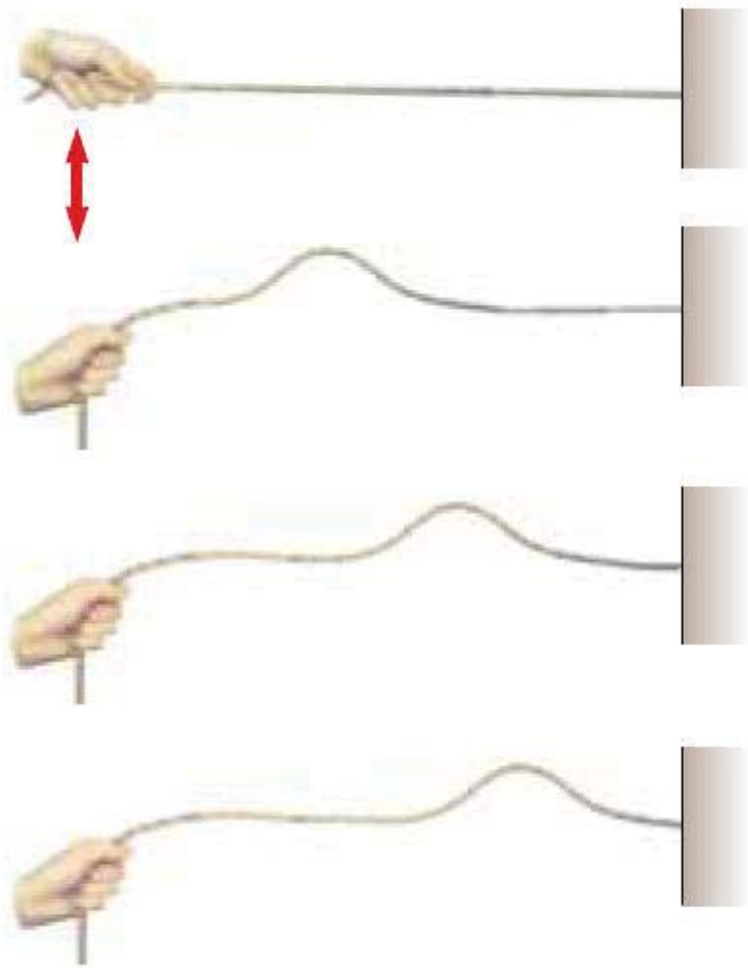
Por la forma de propagación de una onda se clasifican en:

- Ondas transversales. Onda viajera en la que las partículas del medio perturbado se mueven perpendiculares al movimiento de la onda; por ejemplo: las olas en el mar, una onda en una cuerda, etc.

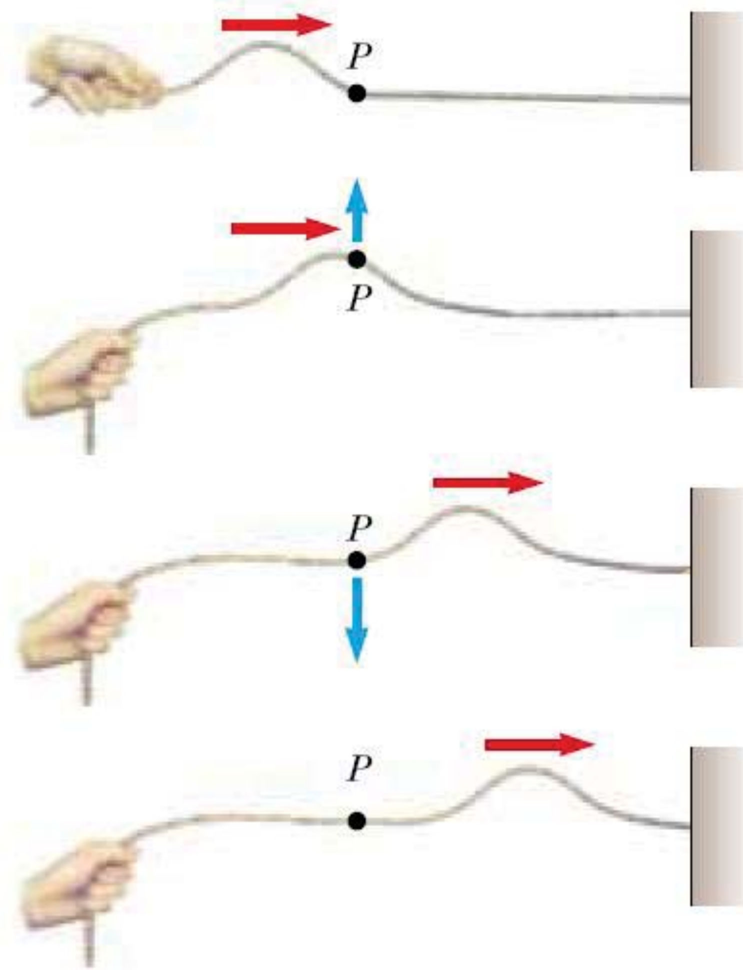




1.- Características del movimiento ondulatorio. Tipos de ondas.



En un pulso que viaja por una cuerda extendida, la forma permanece casi sin cambio mientras viaja a lo largo de la cuerda.

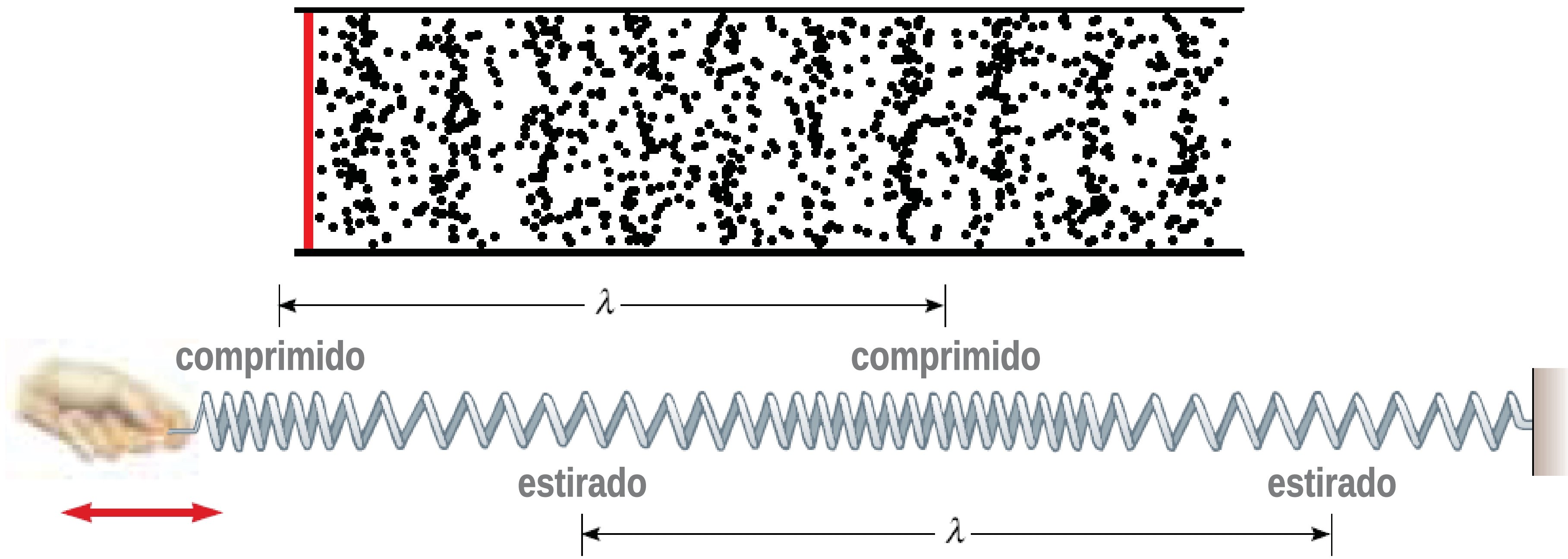


Un pulso que viaja en una cuerda es una onda transversal.

1.- Características del movimiento ondulatorio. Tipos de ondas.

Por la forma de propagación de una onda se clasifican en:

- Ondas longitudinales. Onda viajera en la que las partículas del medio se mueven paralelas al movimiento de la onda; por ejemplo: las ondas sonoras, ondas es un resorte, etc.



En una onda longitudinal a lo largo de un resorte estirado, las espiras se desplazan en dirección del movimiento ondulatorio, de tal forma que cada región comprimida es seguida por una región alargada.

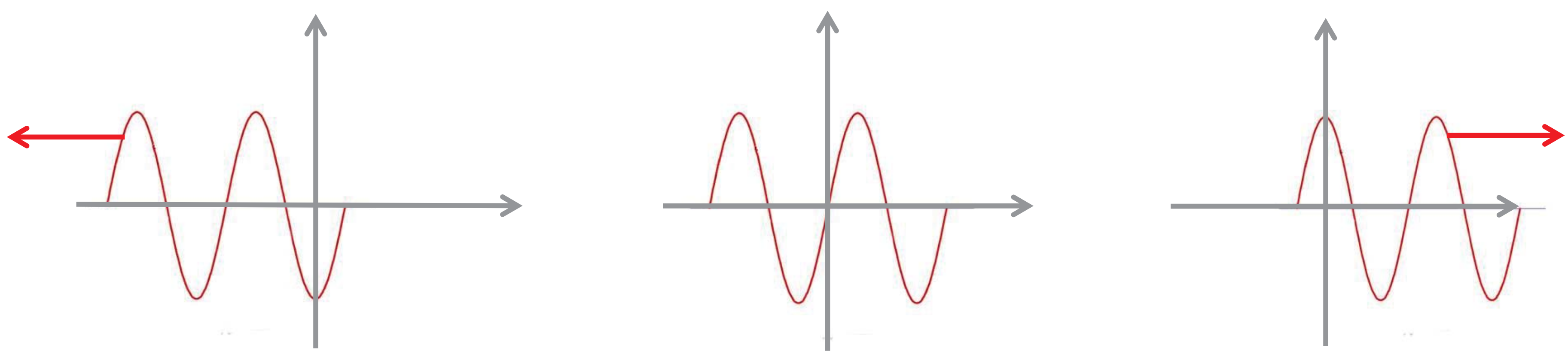
2.- Ondas viajeras y velocidad de onda.

Una onda viajera se describe matemáticamente, en el caso unidimensional, mediante la expresión

$$\boxed{y = f(x \pm vt)}$$

La dirección del movimiento de la onda está dado por el signo que antecede al término *vt*:

- si el signo es "+" la onda se mueve a la izquierda; y
- si el signo es "-" se mueve a la derecha.

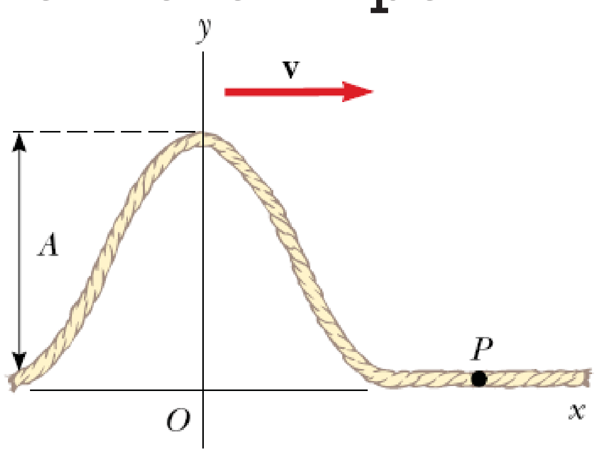


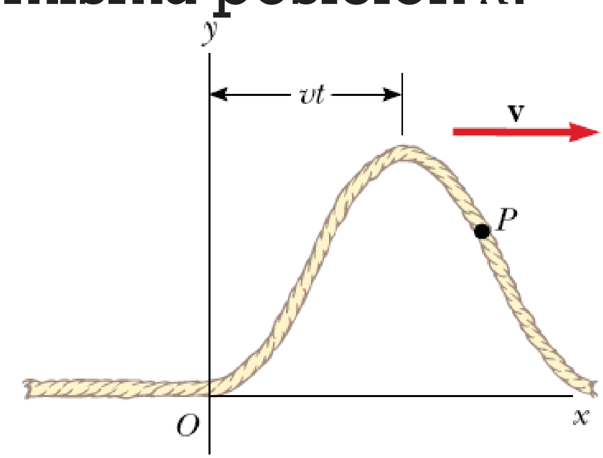
2.- Ondas viajeras y velocidad de onda.

Consideremos una onda propagándose a la derecha en una cuerda tensada, con una velocidad v, tal como se muestra en la figura.

A la expresión $y(x,0) = f(x)$, que describe a la posición transversal y de cada elemento de la cuerda en la posición x se le llama **pulso de la onda**, y corresponde a "la foto" de la onda al tiempo $t = 0$.

A un tiempo t la onda ha viajado una distancia vt, de tal forma que la perturbación se ha movido, pero cada uno de los puntos de la cuerda permanece en la misma posición x.

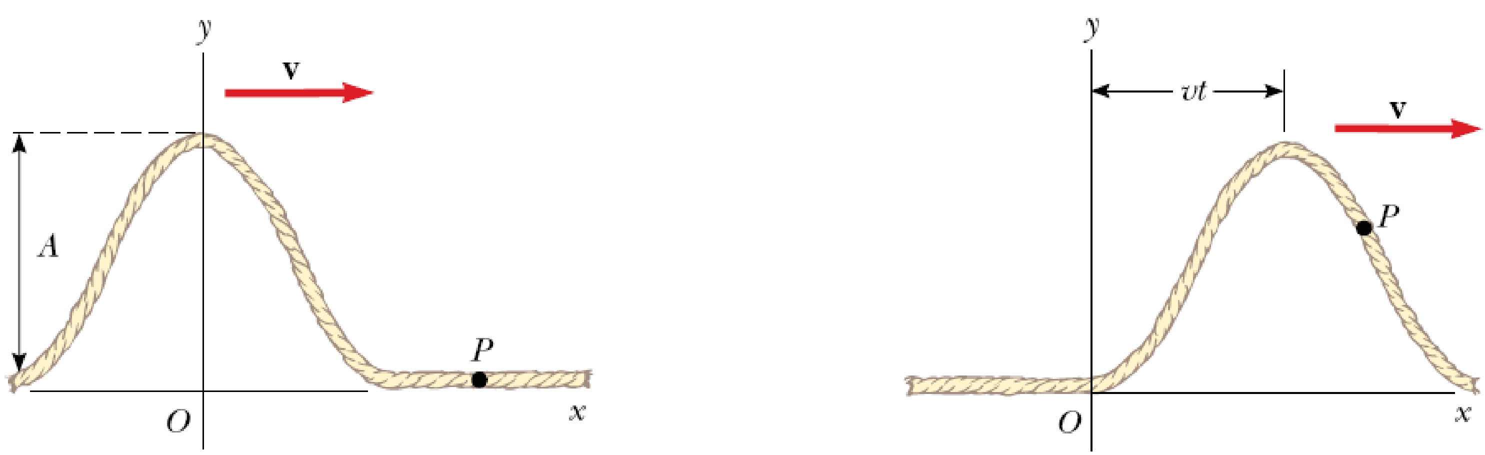




2.- Ondas viajeras y velocidad de onda.

Es importante entender el significado de y, para ello consideremos un elemento de la cuerda en el punto P, conforme el pulso pasa a través de P, la coordenada y de este elemento aumenta, alcanza un máximo, y luego decrece a cero.

La función de onda $y(x,t)$ representa entonces la coordenada y, es decir, la posición transversal, de cualquier elemento ubicado en la posición x a cualquier tiempo t.



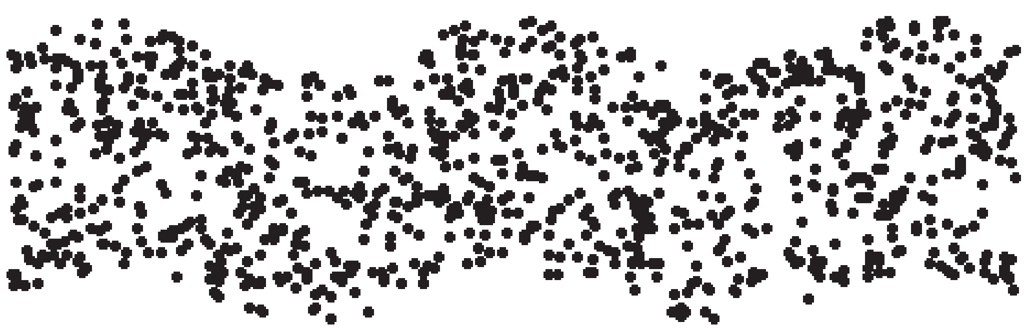
2.- Ondas viajeras y velocidad de onda.

En el desarrollo previo, la velocidad v que aparece en la expresión para la onda viajera se conoce como velocidad de onda, dada por

$$v = \frac{dx}{dt}$$

que, en general, es diferente a la rapidez con que se mueve el medio.

Por ejemplo, para una onda transversal, la velocidad de onda es diferente de la rapidez con que se mueve cada uno de los elementos del medio, en este caso, perpendicular a la propagación (y que corresponde al movimiento periódico del medio).



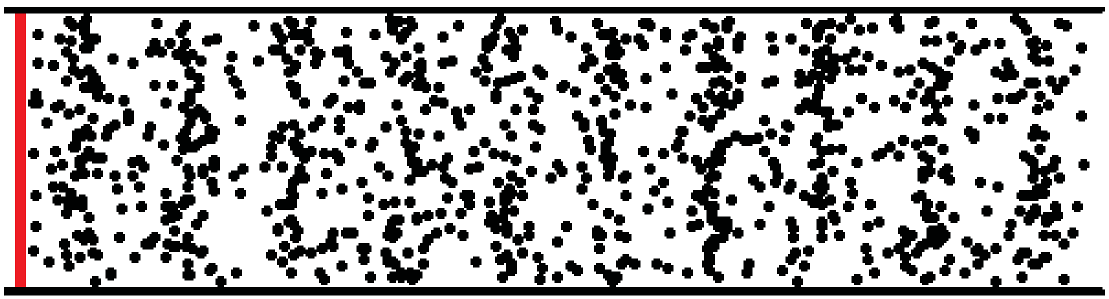
2.- Ondas viajeras y velocidad de onda.

En el desarrollo previo, la velocidad v que aparece en la expresión para la onda viajera se conoce como velocidad de onda, dada por

$$v = \frac{dx}{dt}$$

que, en general, es diferente a la rapidez con que se mueve el medio.

De manera similar, para una onda longitudinal, la velocidad de onda es diferente de la rapidez con que se mueve cada uno de los elementos del medio, en este caso, paralela a la propagación (movimiento periódico del medio).



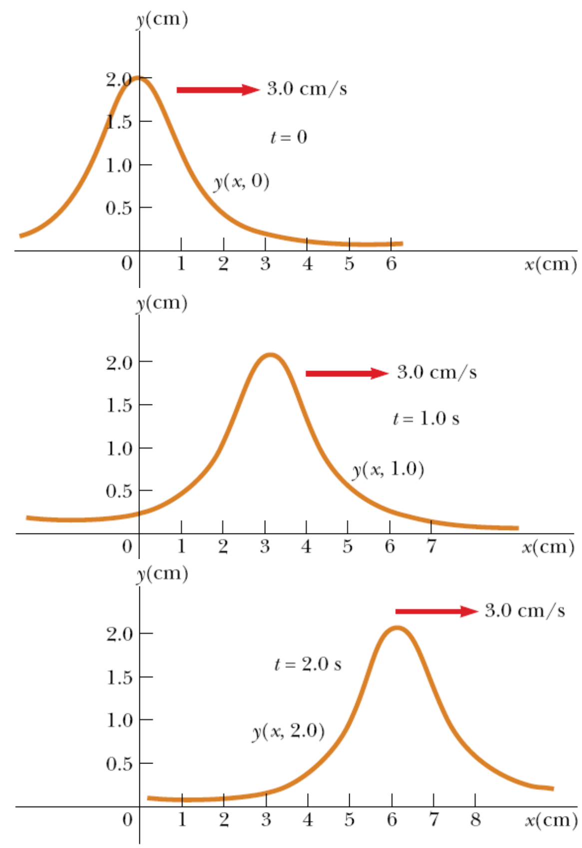
2.- Ondas viajeras y velocidad de onda. Un ejemplo.

Consideremos la onda representada por la función

$$y(x,t)=\frac{2}{\left(x-3.0t\right)^2+1}$$

Grafique la onda a $t=0s$, $t=1s$ y $t=2s$.

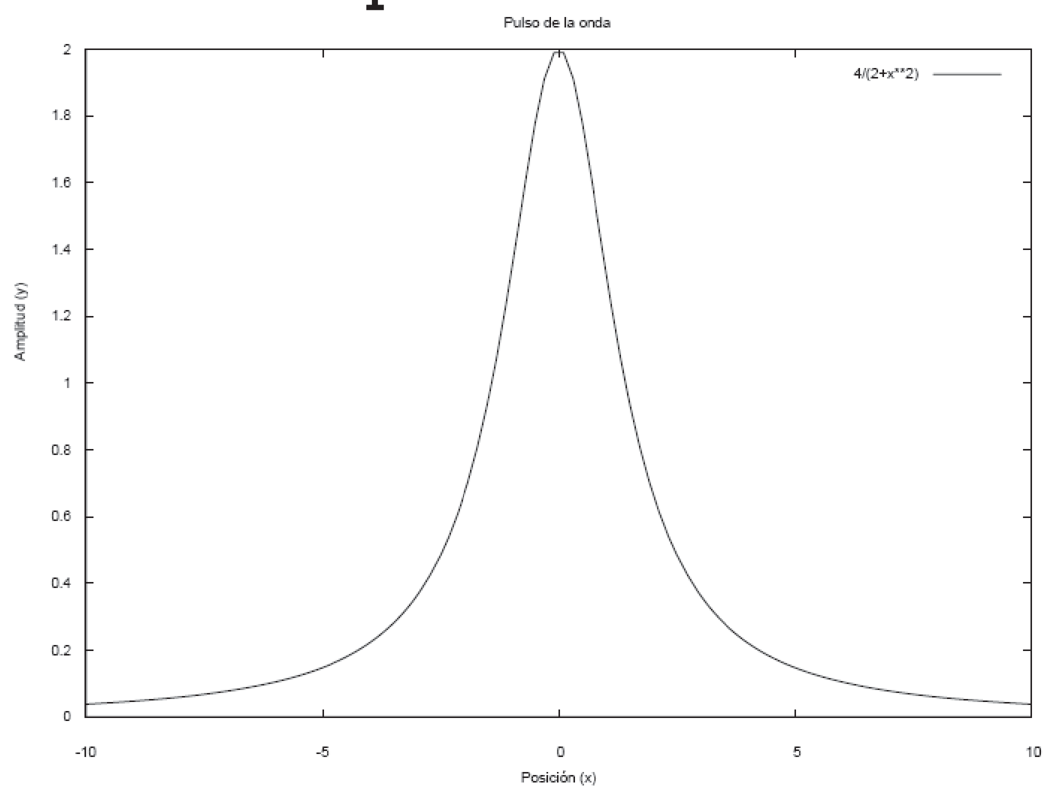
- En $t=0s$ $$y(x,t)=\frac{2}{x^2+1}$$
- En $t=1s$ $$y(x,t)=\frac{2}{\left(x-3.0\right)^2+1}$$
- En $t=2s$ $$y(x,t)=\frac{2}{\left(x-6.0\right)^2+1}$$



2.- Ondas viajeras y velocidad de onda. Otro ejemplo.

La ecuación de onda que representa a un pulso viajero en una cuerda está dada por $y(x,t) = 4/[2 + (x - 4t)^2]$, donde x y y están en cm y t en s. (a) Grafique el pulso (b) ¿En qué dirección viaja el pulso? (c) ¿Cuál es la rapidez del pulso? (d) ¿Que distancia ha recorrido en un tiempo de 7s?

a) El pulso para esta onda está dado por $y(x,t) = 4/[2 + x^2]$.
b) En la dirección positiva del eje x.
c) 4 cm/s.
d) 28 cm.

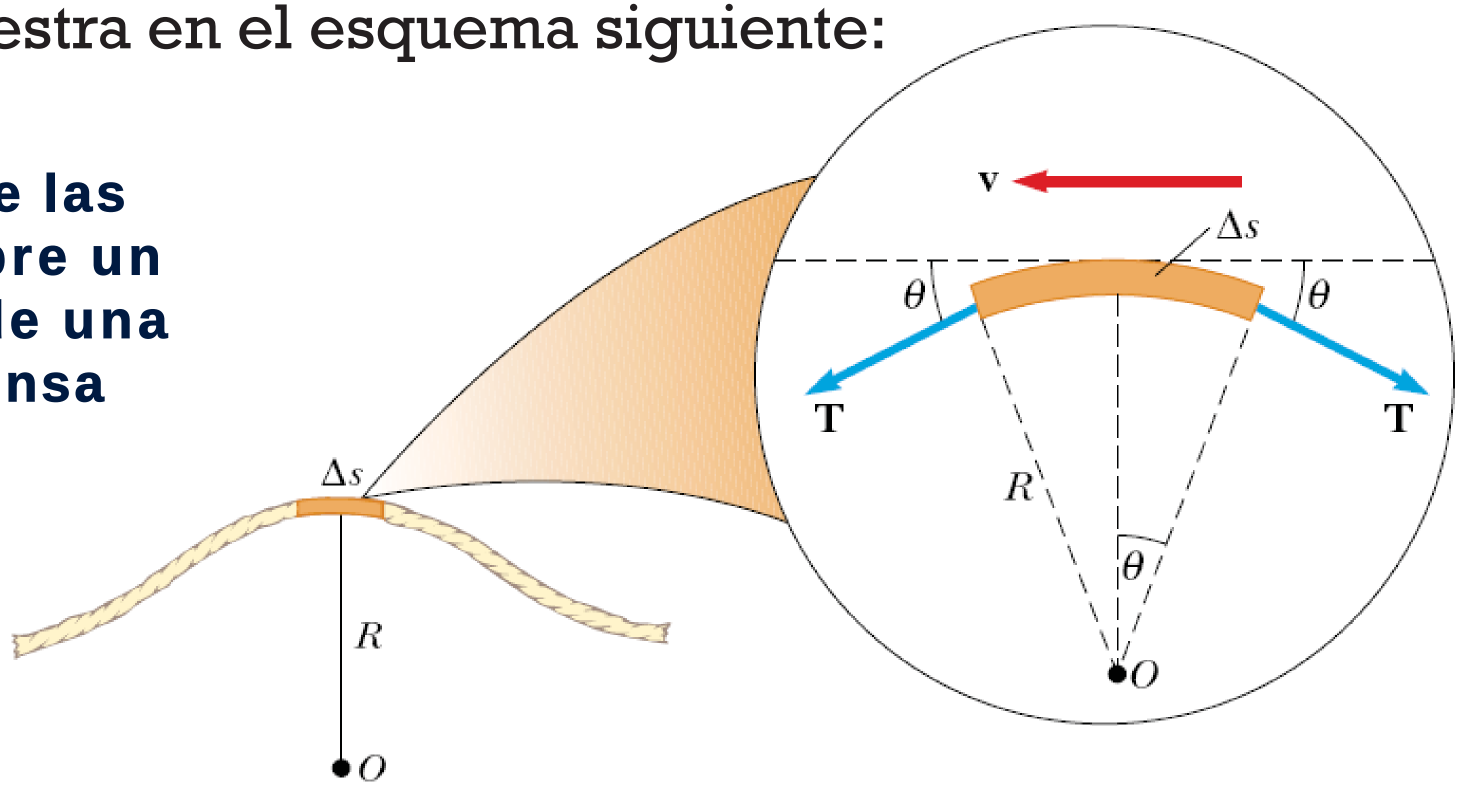


3.- Velocidad de onda en una cuerda.

Consideremos un pulso que se mueve a la derecha, con rapidez constante v respecto a un sistema de referencia fijo, en una cuerda bajo una tensión T.

Visto desde un sistema de referencia montado sobre el pulso, un elemento de la cuerda se mueve a la izquierda, tal como se muestra en el esquema siguiente:

Análisis de las fuerzas sobre un segmento de una cuerda tensa



3.- Velocidad de onda en una cuerda.

El elemento Δs mostrado en el esquema forma (aproximadamente) un arco de radio R, con una aceleración centrípeta igual a v^2/R.

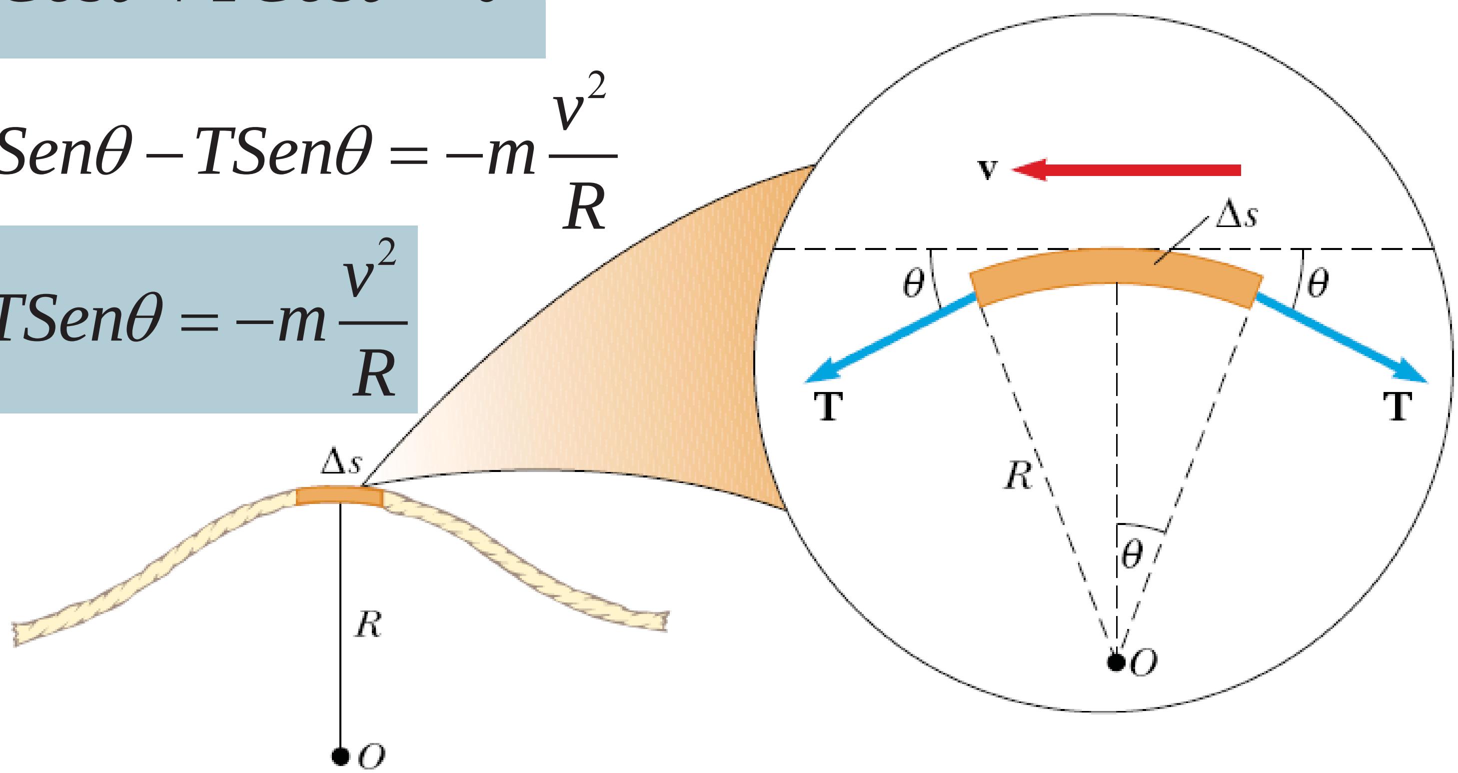
La aplicación de la segunda ley de Newton conduce a

$$\sum F_x = -TCos\theta + TCos\theta = 0$$

y

$$\sum F_y = -TSen\theta - TSen\theta = -m\frac{v^2}{R}$$

$$\sum F_y = -2TSen\theta = -m\frac{v^2}{R}$$



3.- Velocidad de onda en una cuerda.

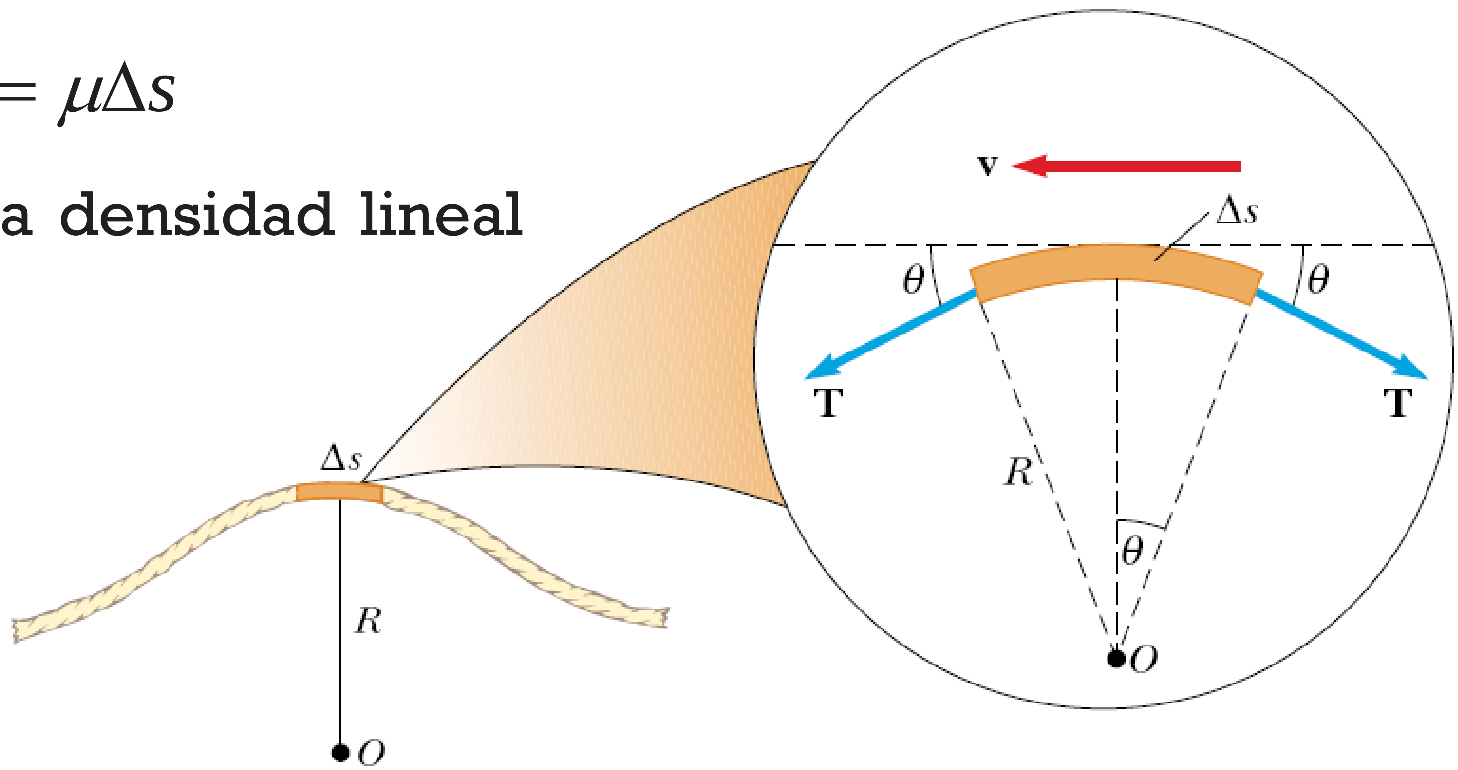
Si consideramos que el elemento es pequeño, el ángulo θ también es pequeño; lo anterior permite aproximar

$$Sen\theta \approx \frac{\Delta s / 2}{R}$$

mientras que el elemento de cuerda tiene una masa m dada por

$$m = \mu \Delta s$$

donde μ es la densidad lineal de masa.



3.- Velocidad de onda en una cuerda.

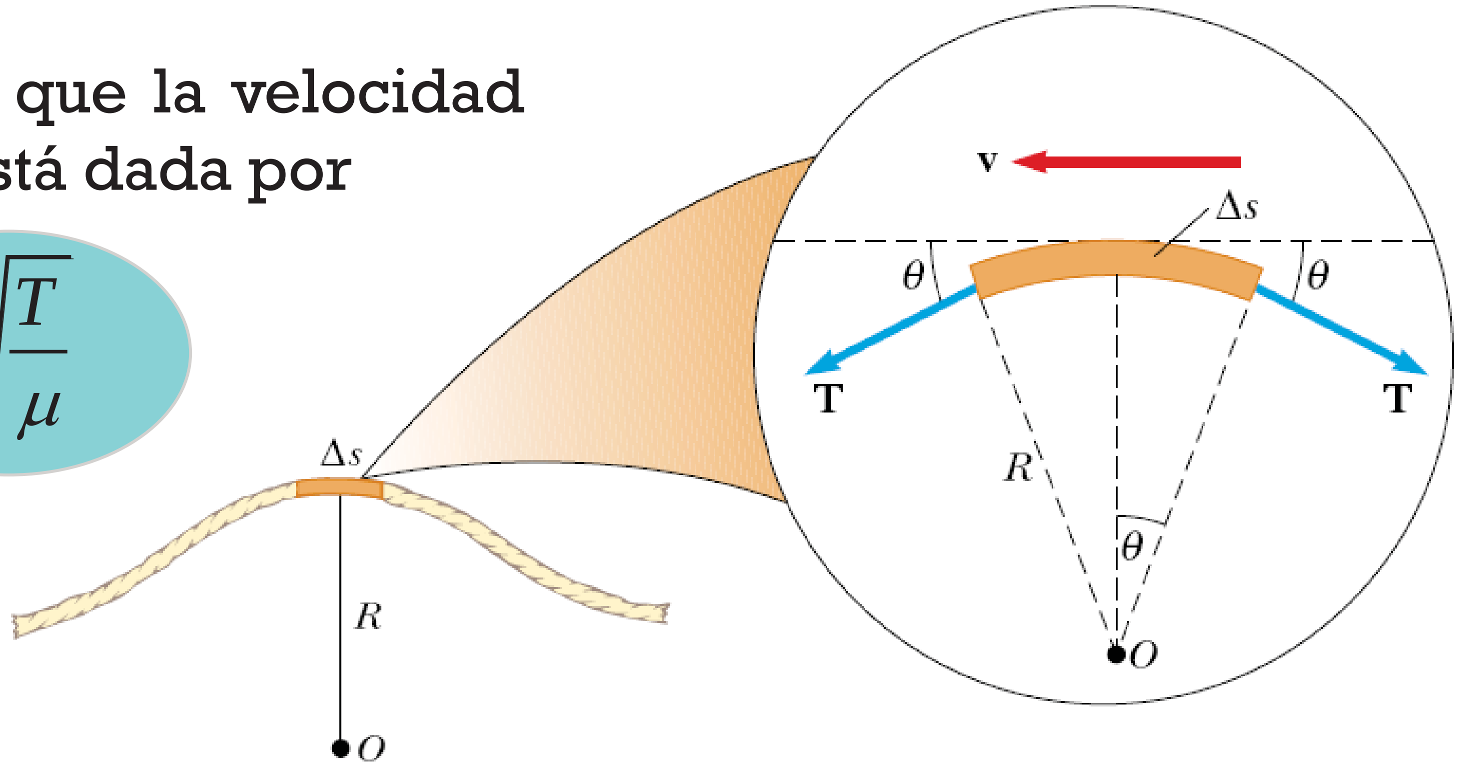
Lo anterior permite escribir la ecuación

$$2TSen\theta = m\frac{v^2}{R}$$

como $$2T\left(\frac{\Delta s}{2R}\right) = (\mu\Delta s)\frac{v^2}{R}$$

Encontrando que la velocidad del pulso *v* está dada por

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$



3.- Velocidad de onda en una cuerda.

Es importante mencionar que esta expresión para la velocidad del pulso de una onda en una cuerda se obtuvo bajo los siguientes supuestos:

- el pulso es pequeño, comparado con la longitud de la cuerda;
- la tensión de la cuerda no varía por la presencia del pulso; y
- no se asume una forma particular del pulso.

Por lo que podemos concluir que un pulso de cualquier forma viaja a lo largo de una cuerda con una rapidez dada por

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

donde v está en m/s, siempre que la tensión T de la cuerda esté en Newtons y la densidad lineal de masa μ esté en kg/m.

3.- Velocidad de onda en una cuerda. Ejemplos.

1.- En un alambre tenso de cobre cuyo diámetro es de $1.50mm$ viajan pulsos transversales a una rapidez de $200m/s$. ¿Cuál es la tensión en el alambre? (La densidad del cobre es de $8.92g/cm^3$)

3.- Velocidad de onda en una cuerda. Ejemplos.

2.- Un péndulo simple se compone de una bola de masa M que cuelga de una cuerda uniforme de masa m y longitud L, con $m \ll M$. Si el periodo de oscilación del péndulo es T, determine la rapidez de una onda transversal en la cuerda cuando el péndulo cuelga en reposo en términos del periodo T.

3.- Velocidad de onda en una cuerda. Ejemplos.

3.- Una cuerda de masa total m y longitud L se suspende verticalmente. Demuestre que un pulso de onda transversal recorrerá la longitud de la cuerda en un tiempo $t = 2(L/g)^{1/2}$.
(Sugerencia: Encuentre primero una expresión para la rapidez de onda en cualquier punto a una distancia y del extremo inferior, considerando la tensión en la cuerda como resultado del peso del segmento debajo de ese punto)

4.- Ondas senoidales o armónicas.

Anteriormente hemos visto que una onda viajera es de la forma

$$\boxed{y = f(x \pm vt)}$$

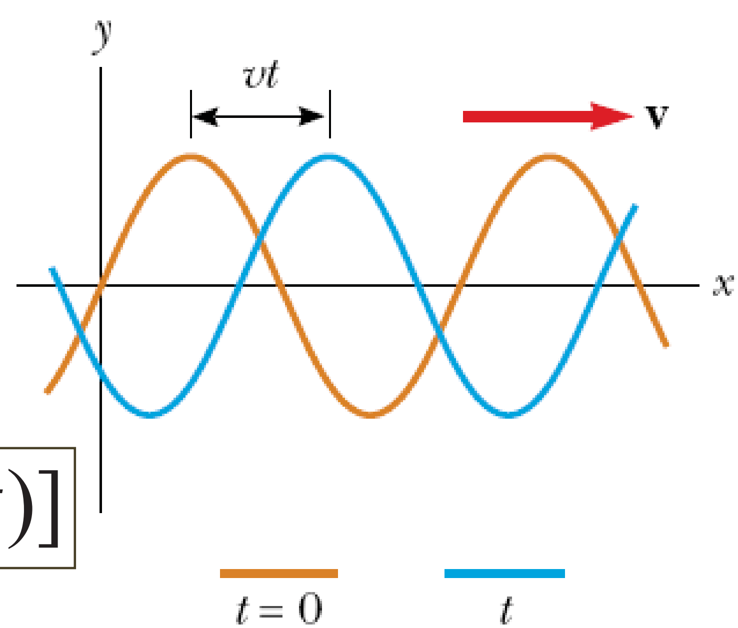
donde $f(x)$ representa el llamado "pulso" de la onda.

En el caso particular en que el "pulso" corresponde a una función armónica (Seno o Coseno) tendremos una onda senoidal o armónica, a saber

"pulso" $$\boxed{y = f(x) = ASen(kx)}$$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

onda armónica $$\boxed{y = f(x,t) = ASen[k(x \pm vt)]}$$



4.- Ondas senoidales o armónicas.

Para evaluar el valor de la constante k, introducida con la finalidad de que el argumento del seno tenga como unidades los radianes, vamos a considerar el esquema siguiente.

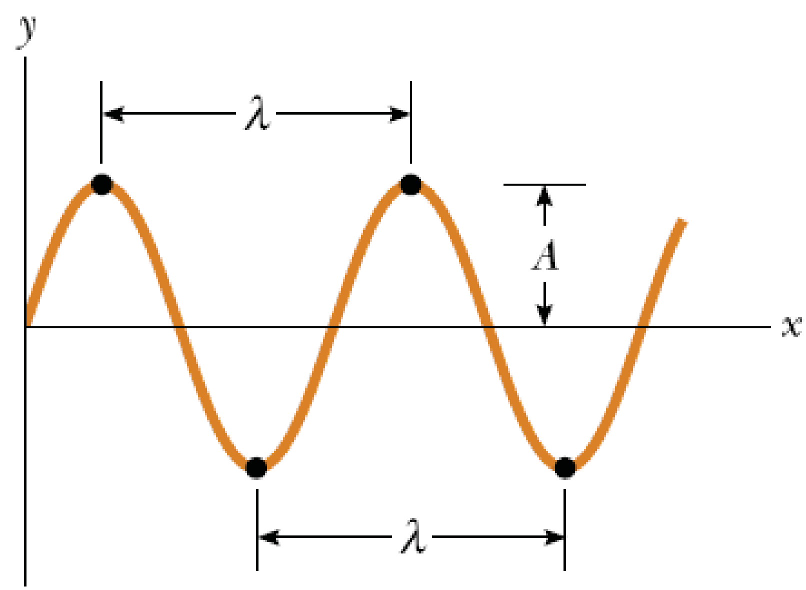
Partiendo de la expresión para el pulso, tenemos que

$$f(0) = f(n\lambda) = A Sen(kn\lambda) = 0$$

de donde

$$Sen(kn\lambda) = 0$$

Recordando que la función seno se repite para argumentos que son múltiplos de 2π, se puede establecer que k, está dado por



$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

$$[k] = {rad}/{m}$$

***k* es el llamado "número de onda"**

4.- Ondas senoidales o armónicas.

Si desarrollamos el argumento de la onda armónica

$$[k(x \pm vt)]$$

tendremos

$$[k(x \pm vt)] = kx \pm kvt$$

pero como kvt debe tener a los radianes como unidades, tomamos

$$kv = \omega \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = f(x,t) = ASen(kx \pm \omega t)}$$

De la relación $\omega = kv$ encontramos, sucesivamente

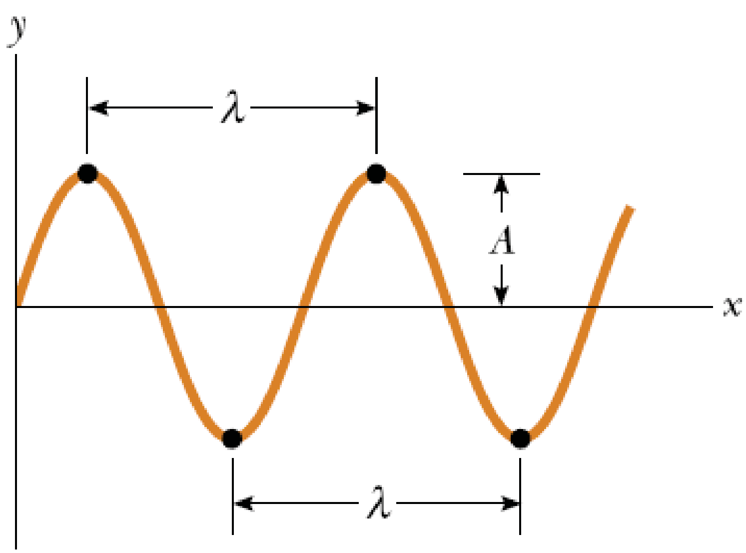
$$\omega = kv = \frac{2\pi}{\lambda} v$$ y recordando que $$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{\lambda} v$$

Tenemos finalmente

$$\boxed{v = \lambda f}$$

4.- Ondas senoidales o armónicas.

Con todo lo anterior, podemos escribir la expresión para el pulso de una onda senoidal como



$$f(x,0) = ASen\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

mientras que la onda se escribe como

$$f(x,t) = ASen\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x \pm vt)\right)$$

donde el signo "+" o "-" indica la dirección de propagación a la izquierda o a la derecha, respectivamente.

4.- Ondas senoidales o armónicas.

Finalmente, podemos hacer un análisis de la periodicidad del movimiento.

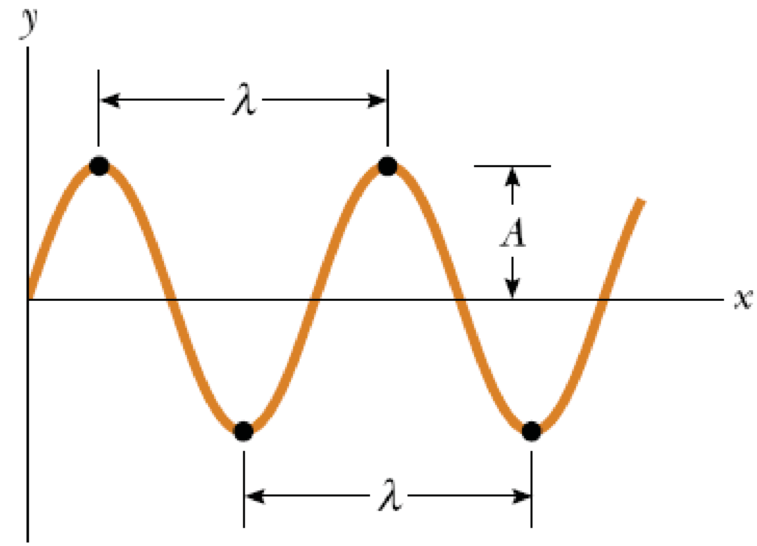
La velocidad de la onda v debe ser igual a la distancia recorrida entre el tiempo, en particular

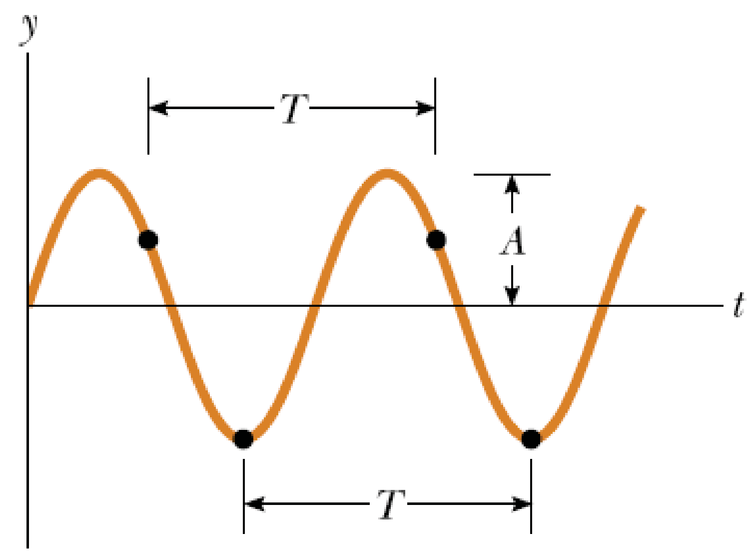
$$v = \frac{\lambda}{T}$$

con lo que la onda se escribe como

$$f(x,t) = ASen\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} \pm \frac{t}{T}\right)\right)$$

Esta forma de la onda evidencia la periodicidad temporal y espacial de la perturbación definida por $y = f(x,t)$.





4.- Ondas senoidales o armónicas.

Hasta este punto, sólo hemos considerado ondas en las que consideramos que el desplazamiento es cero al tiempo inicial, lo cual no necesariamente es cierto.

La forma más general de una onda armónica es

$$f(x,t) = ASen(kx \pm \omega t - \phi)$$

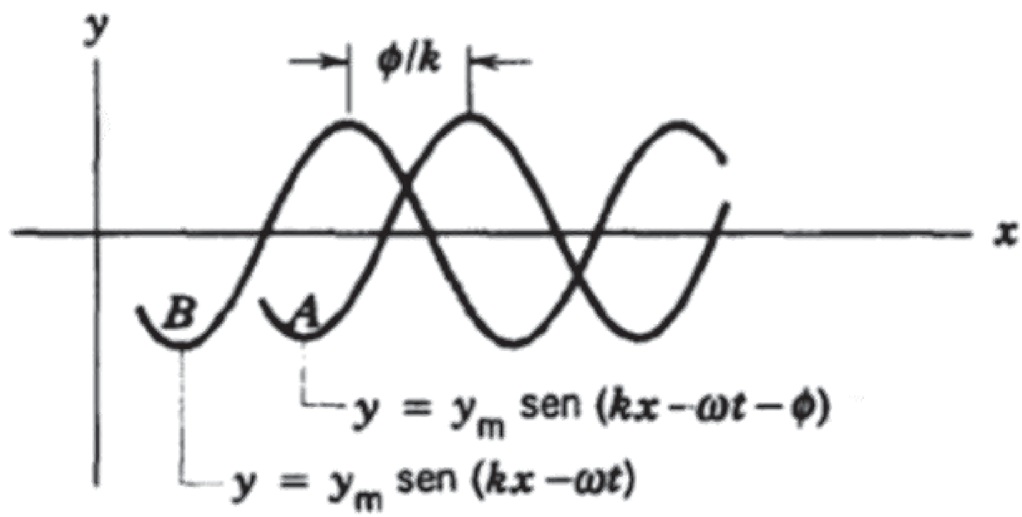
donde ϕ es la fase de la onda, lo que permite afirmar que dos ondas con la misma fase (o con fases que difieran en cualquier múltiplo entero de 2π) están en "fase" por lo que ejecutan el mismo movimiento en el mismo tiempo.

El ángulo ϕ se llama *constante de fase* y no afecta a la forma de la onda, sólo la mueve hacia adelante o hacia atrás en el espacio o en el tiempo.

4.- Ondas senoidales o armónicas.

Para visualizar lo anterior, escribamos la expresión de una onda que viaja a la derecha

$$\boxed{f(x,t) = ASen\left(kx - \omega t - \phi\right)}$$

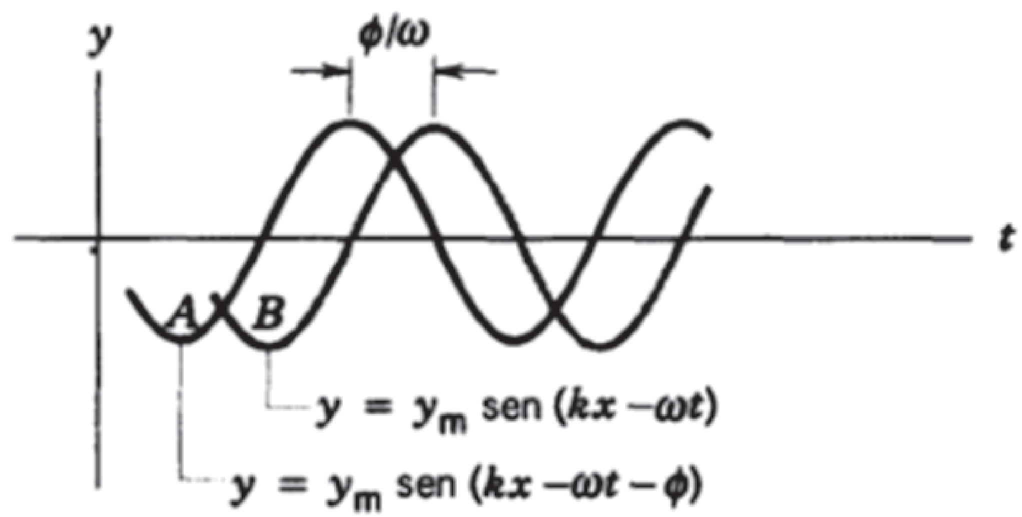


como

$$\boxed{f(x,t) = ASen\left(k\left(x - \frac{\phi}{k}\right) - \omega t\right)}$$

"Onda a la derecha"

o



$$\boxed{f(x,t) = ASen\left(kx - \omega\left(t + \frac{\phi}{\omega}\right)\right)}$$

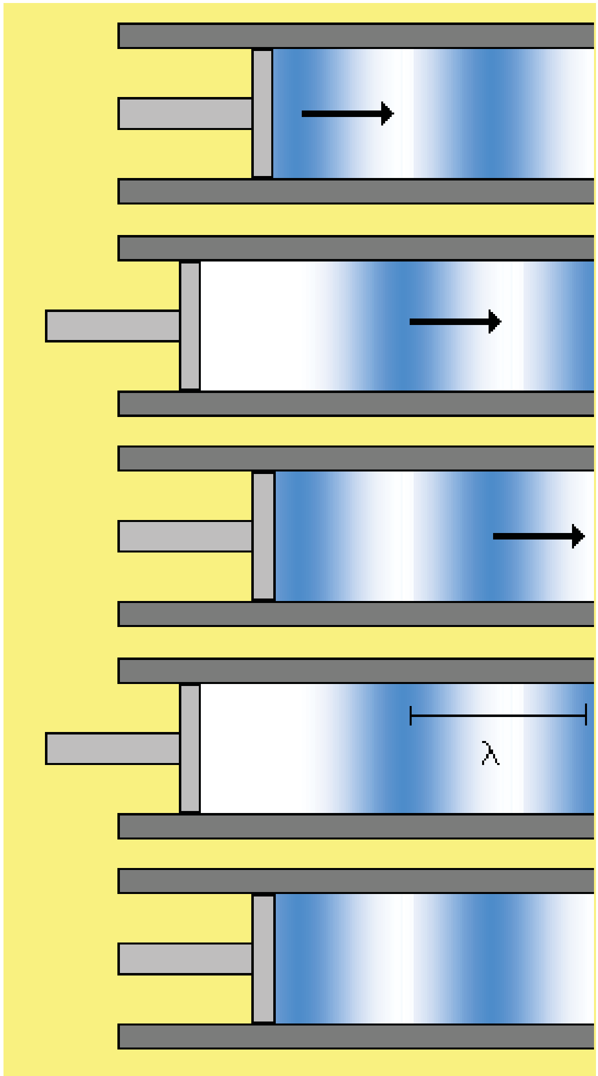
"Onda atrasada"

4.- Ondas senoidales o armónicas.

Para el caso de una onda longitudinal (como el sonido) si la fuente, por ejemplo un émbolo, oscila de forma armónica, las regiones de condensación y rarefacción se establecen de forma continua, tal como se muestra.

La distancia entre dos condensaciones consecutivas es igual a la longitud de onda, λ.

A medida que esta ondas viajan por el tubo, cualquier volumen pequeño del medio se mueve con movimiento armónico simple paralelo a la dirección de la onda.



Onda longitudinal senoidal que se propaga en un tubo lleno de gas.

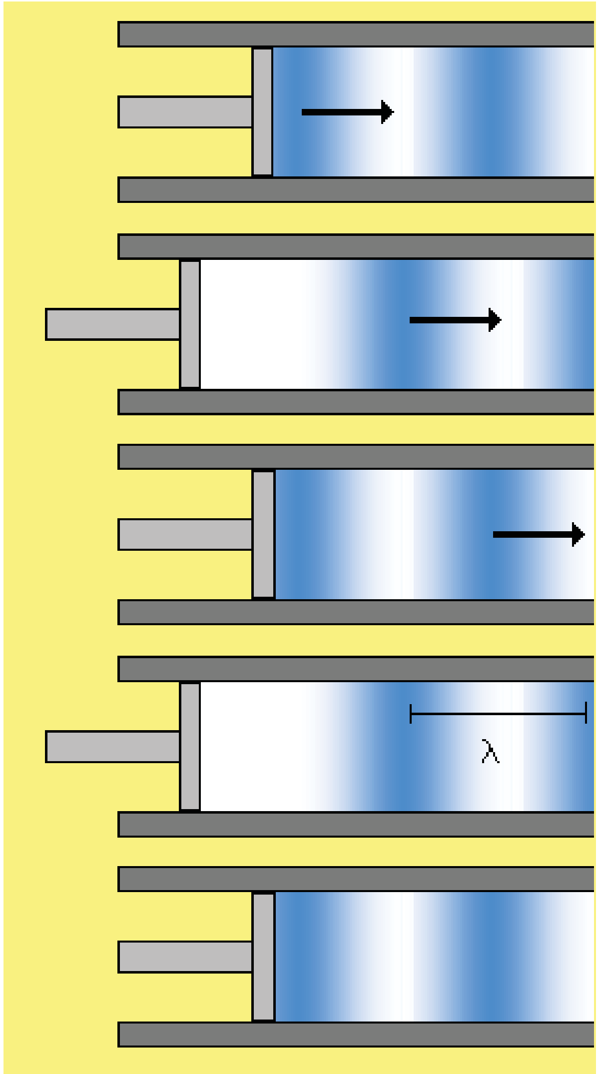
4.- Ondas senoidales o armónicas.

Si $S(x,t)$ es el desplazamiento de un pequeño elemento de volumen medido a partir de su posición de equilibrio, podemos expresar esta función de desplazamiento armónico como

$$S(x,t) = S_{max}Sen(kx - \omega t)$$

donde $S_{máx}$ es el desplazamiento máximo medido a partir del equilibrio, k es el número de onda angular, y ω es la frecuencia angular del émbolo.

De nueva cuenta, el signo indica el sentido de la propagación de la onda, en este caso, es hacia la derecha.



Onda longitudinal senoidal que se propaga en un tubo lleno de gas.

4.- Ondas senoidales o armónicas.

La onda de presión asociada a una onda longitudinal como la anterior está dada por

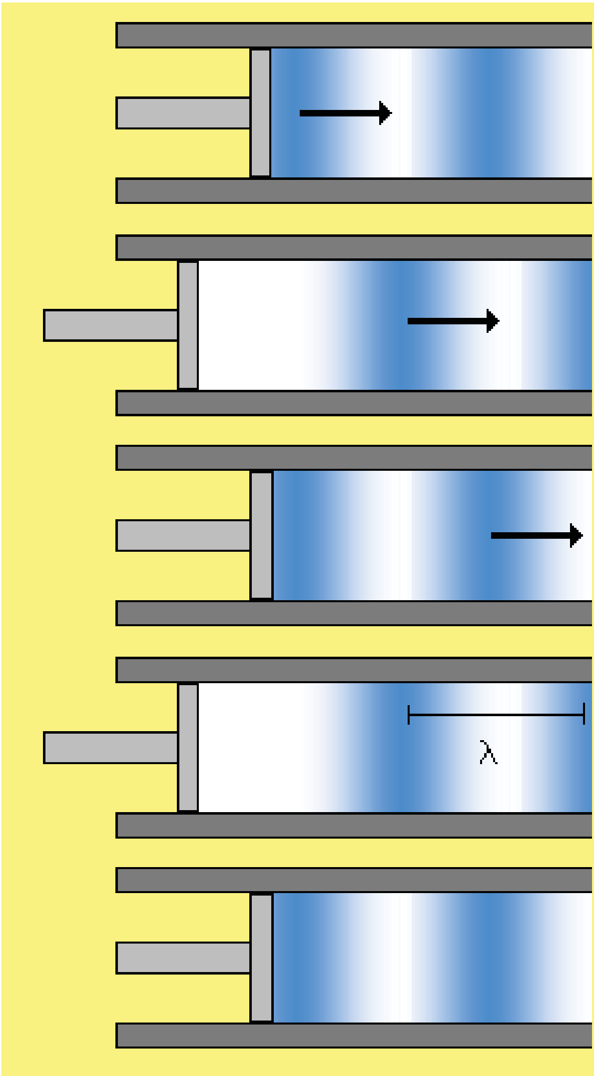
$$\Delta p(x,t) = \Delta p_0 Sen(kx - \omega t - \pi/2)$$

donde

$$\Delta p_0 = \rho \omega v S_{\max}$$

se conoce como la ***amplitud de presión*** de la onda sonora.

Es de notar que la amplitud de presión depende de las características del medio, y no sólo de la fuente.



Onda longitudinal senoidal que se propaga en un tubo lleno de gas.

4.- Ondas senoidales o armónicas. Ejemplos.

4.- Una onda senoidal que viaja a la izquierda tiene una amplitud de $20.0cm$, una longitud de onda de $35.0cm$ y una frecuencia de $12.0Hz$. El desplazamiento de la onda al tiempo $t = 0s$ en $x = 0cm$ es $y = -3.0cm$; en ese mismo punto, una partícula del medio tiene una velocidad positiva. (a) Bosqueje el pulso de la onda. (b) Encuentre el número de onda angular, el periodo, la frecuencia angular y la velocidad de onda de esta onda senoidal. (c) Escribe una expresión para la función de onda $y(x,t)$.

4.- Ondas senoidales o armónicas. Ejemplos.

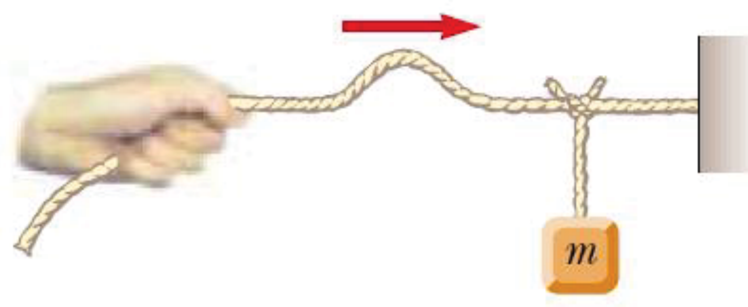
5.- Una onda transversal armónica en una cuerda tiene un periodo $T = 25.0ms$ y viaja en la dirección negativa de x con una rapidez de $30.0m/s$. A $t = 0$ una partícula en la cuerda, ubicada en $x = 0$, tiene un desplazamiento de $2.00cm$ y viaja hacia abajo con una rapidez de $2.00m/s$. (a) ¿Cuál es la amplitud de la onda? (b) ¿Cuál es el ángulo de fase inicial? (c) ¿Cuál es la rapidez transversa máxima de la cuerda? (d) Escribe la expresión para la función de onda $y(x, t)$ que corresponda a esta onda sinusoidal.

5.- Energía transportada por una onda.

Como se ha mencionado anteriormente, al propagarse en un medio, las ondas transportan energía de un lugar a otro, lo cual puede visualizarse de una manera sencilla.

Si uno considera un objeto colgado de una cuerda horizontal, tal como se muestra en la figura anexa, es posible observar cómo se modifica la altura de la masa, lo que implica un aumento en la energía potencial de la masa *m*.

Lo que evidencia el transporte de energía por parte de la onda al tenerse una transferencia de energía entre la onda y la masa *m*.

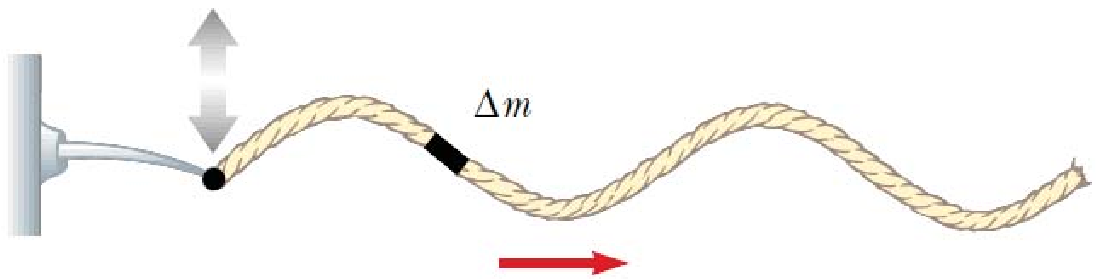


(a)

(b)

5.- Energía transportada por una onda.

Para cuantificar la transferencia de energía consideremos una onda armónica viajando a través de una cuerda homogénea; en tal caso, cada parte de ella oscila verticalmente y tiene la misma energía mecánica total.



Cada tramo de cuerda, con masa Δm, tiene una energía cinética ΔK dada por

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}\left(\Delta m\right)v_y^2$$

y como $\Delta m = \mu \Delta x$, podemos escribir

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}\left(\mu \Delta x\right)v_y^2$$

5.- Energía transportada por una onda.

La expresión anterior, en el límite cuando Δx tiende a cero, se convierte en

$$dK = \tfrac{1}{2}\left(\mu dx\right)v_y^2$$

Por otro lado, dado que el desplazamiento $y(x,t)$ está dado por

$$y(x,t) = ASen\left(kx \pm \omega t - \phi\right)$$

podemos escribir la rapidez (para una onda que viaja a la derecha y con fase angular $\phi = 0$) como

$$v_y = \frac{dy(x,t)}{dt} = -\left(A\omega\right)Cos\left(kx - \omega t\right)$$

de tal forma que

$$\boxed{dK = \tfrac{1}{2}\left(\mu dx\right)A^2\omega^2 Cos^2\left(kx - \omega t\right)}$$

5.- Energía transportada por una onda.

Si a continuación tomamos en cuenta que el movimiento del diferencial de cuerda que estamos considerando es armónico simple, podemos usar que

$$dE = dK_{\max}$$

lo que lleva a escribir, finalmente, que la energía de un tramo de cuerda de longitud dx está dado por

$$\boxed{dE = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 dx}$$

Si la expresión anterior se integra sobre la longitud total de la cuerda L, tenemos que la energía total E de una onda armónica de amplitud A y frecuencia ω, que viaja en una cuerda con una densidad de masa μ, está dada por

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 L}$$

5.- Energía transportada por una onda.

Retomando la expresión para el diferencial de energía $\mathrm{d}E$, podemos calcular la razón temporal de energía transmitida o potencia como

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{\frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 dx}{dt}$$

lo que lleva a

$$\boxed{P = \tfrac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v}$$

Lo anterior permite concluir que la razón de transferencia energética en cualquier onda armónica es proporcional al cuadrado de la frecuencia angular y de la amplitud, y linealmente dependiente de la rapidez de la onda y de la densidad lineal de masa.

5.- Energía transportada por una onda. Ejemplo.

6.- Se encuentra que un segmento de $6.00m$ de una cuerda larga contiene 4 ondas completas y tiene una masa de $180g$. La cuerda está vibrando sinusoidalmente con una frecuencia de $50.0Hz$ y tiene un desplazamiento de cresta a valle de $15.0cm$. (a) Escriba la función que describe a esta onda viajando en la dirección positiva de x. (b) Determine la potencia suministrada a la cuerda en su extremo izquierdo.

6.- Potencia e intensidad de las ondas sonoras. Decibeles.

Partiendo de la expresión para el desplazamiento

$$v(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} s(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[s_{\max}\cos(kx - \omega t)\right] = \omega s_{\max}\operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

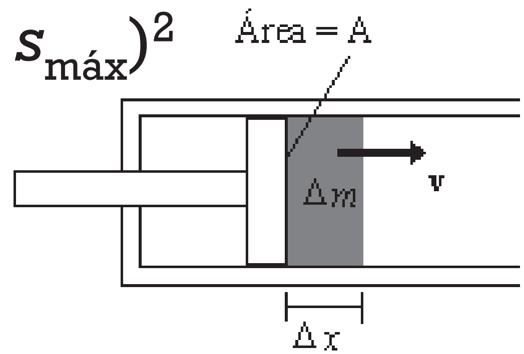
podemos calcular la energía cinética como

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}\Delta m v^2 = \tfrac{1}{2}\Delta m\left(\omega s_{\max}\operatorname{sen} kx\right)^2 = \tfrac{1}{2}\rho A \Delta x\left(\omega s_{\max}\operatorname{sen} kx\right)^2$$

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}\rho A \Delta x\left(\omega s_{\max}\right)^2 \operatorname{sen}^2 kx$$

La energía promedio de la capa de aire en movimiento puede determinarse por:

$$\Delta E = \tfrac{1}{2}\ \Delta m(\omega\, s_{máx})^2 = \tfrac{1}{2}\ (\rho A \Delta x)\ (\omega\, s_{máx})^2$$



donde $A\Delta x$ es el volumen de la capa.

6.- Potencia e intensidad de las ondas sonoras. Decibeles.

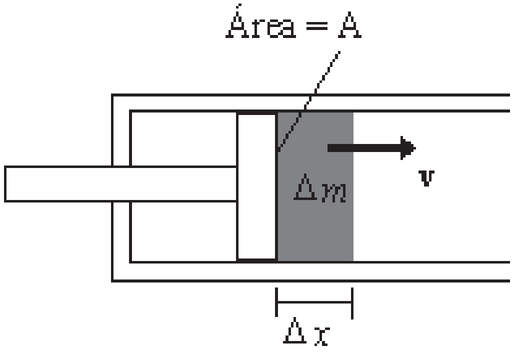
La tasa en el tiempo a la cual se transfiere la energía a cada capa es la potencia y está dada por

$$Potencia = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \tfrac{1}{2}\rho A\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)(\omega s_{máx})^2 = \tfrac{1}{2}\rho Av(\omega s_{máx})^2$$

Resumiendo, con las ideas y definiciones presentadas anteriormente, la energía y potencia asociadas con una onda longitudinal periódica están dadas por

$$\Delta E = \frac{1}{2}\rho \Delta V(\omega S_0)^2 \quad \text{y} \quad P = \frac{1}{2}\rho A_\perp v(\omega S_0)^2$$

donde $A_\perp$ representa el área perpendicular a la propagación.



6.- Potencia e intensidad de las ondas sonoras. Decibeles.

Definimos la intensidad de una onda, o potencia por unidad de área, como la tasa a la cual la energía que es transportada por la onda fluye por un área unitaria *A* perpendicular a la dirección de propagación de la onda.

La intensidad es

$$I = \frac{\text{Potencia}}{\text{área}} = \frac{1}{2}\rho\left(\omega s_{máx}\right)^2 v$$

Esto también puede escribirse en términos de la amplitud de presión como

$$I = \frac{\Delta P_{máx}^2}{2\rho v}$$

6.- Potencia e intensidad de las ondas sonoras. Decibeles.

Dado el amplio rango de valores de intensidad, es conveniente utilizar una escala logarítmica, el nivel sonoro β se define como

$$\beta = (10dB)\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

La constante $I_0 = 10^{-12}\,W/m^2$, es la *intensidad de referencia auditiva*.

Niveles sonoros de algunas fuentes:

El Umbral auditivo corresponde un nivel sonoro $\boldsymbol{\beta = 0}$

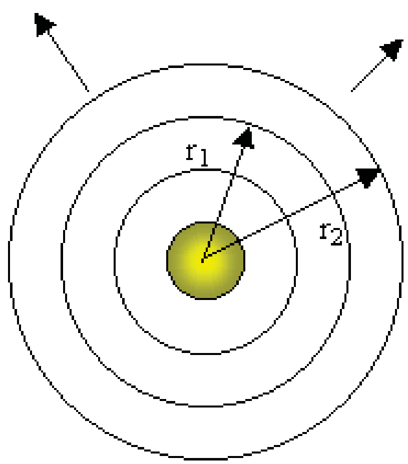
Avión de reacción	150	Aspiradora	70
Perforadora de mano; ametralladora	130	Conversación normal	50
Sirena; concierto de rock	120	Zumbido de un mosquito	40
Tren urbano; segadora eléctrica	100	Susurro	30
Tráfico intenso	80	Murmullo de hoja	10

6.- Potencia e intensidad de las ondas sonoras. Decibeles.

Potencia e intensidad en ondas esféricas

La intensidad de onda a una distancia *r* de la fuente es

$$I = \frac{P_{pro}}{A} = \frac{P_{pro}}{4\pi r^2}$$



Como P_{pro} es la misma en cualquier superficie esférica centrada en la fuente, vemos que las intensidades a las distancias r_1 y r_2 son

$$I_1 = \frac{P_{pro}}{4\pi r_1^2} \quad y \quad I_2 = \frac{P_{pro}}{4\pi r_2^2}$$

En consecuencia, la proporción entre las intensidades sobre las dos superficies esféricas es

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

6.- Potencia e intensidad de las ondas sonoras. Decibeles.

Potencia e intensidad en ondas esféricas

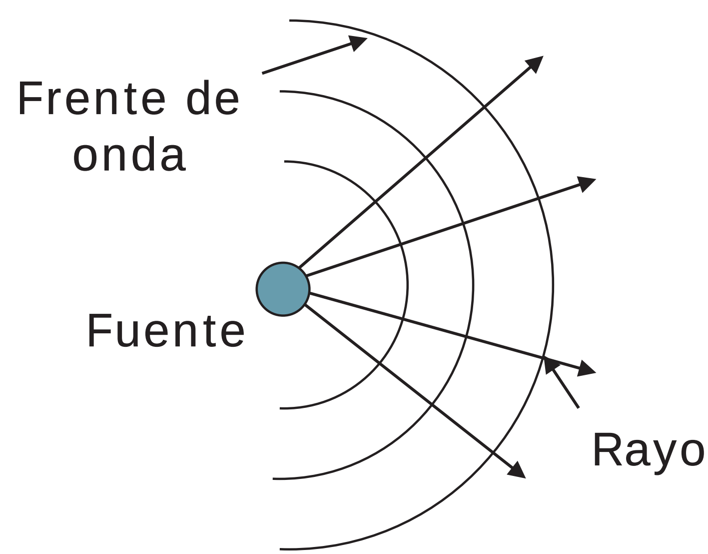
Dado que $I \propto s^2$, entonces $s \propto 1/r$. Por tanto podemos escribir

$$\Psi(x,t) = \frac{s_0}{r} sen(kr - \omega t)$$

donde s_0 es la amplitud de desplazamiento en $t = 0$.

Es útil representar las ondas esféricas mediante una serie de arcos circulares concéntricos con la fuente.

Cada arco representa una superficie sobre la cual la fase de la onda es constante. Llamamos a dicha superficie de fase constante **frente de onda**. La distancia entre dos frentes de onda es igual a la longitud de onda, λ. Las líneas radiales que apuntan hacia fuera desde la fuente se conocen como **rayos**



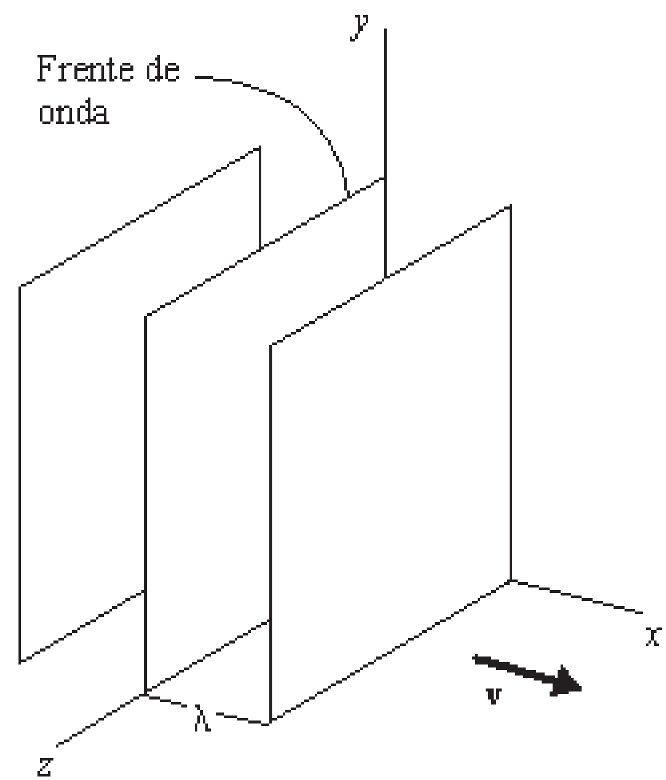
6.- Potencia e intensidad de las ondas sonoras. Decibeles.

Ondas esféricas y planas

A distancias de la fuente que son grandes si se les compara con la longitud de onda, podemos aproximar los frentes de onda esféricos por medio de planos paralelos. A este tipo de onda se le conoce como **onda plana**.

La figura muestra una onda plana que se propaga a lo largo del eje x, lo cual significa que los frente de onda son paralelos al plano yz. En este caso, la función de onda depende solo de x y de t, y tiene la forma

$$\Psi(x,t) = A\,sen(kx - \omega t)$$



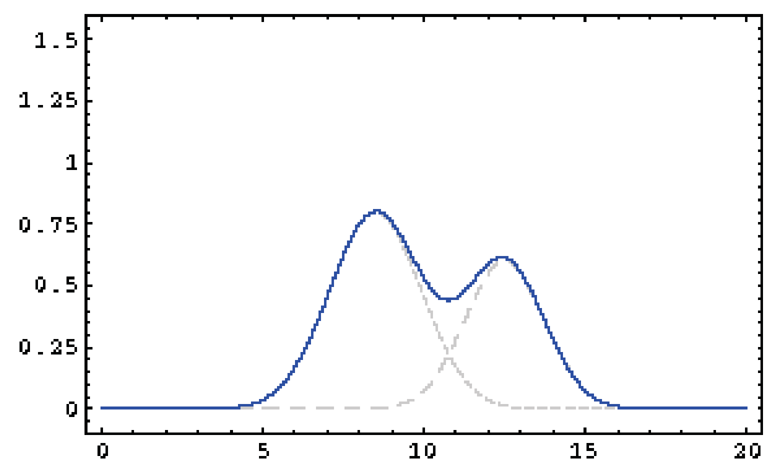
7.- El principio de superposición. Interferencia de ondas.

Las ondas lineales obedecen el principio de superposición, el cual establece que “si dos o mas ondas viajeras se mueven a través de un mismo medio, la onda resultante es la suma algebraica de las funciones de onda de cada una de las ondas individuales”.

Matemáticamente, lo anterior se escribe como

$$y_R(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) + \cdots$$

Una consecuencia del principio de superposición es que dos ondas viajeras pueden pasar una a través de la otra SIN destruirse o alterarse, sin importar si esta es longitudinal o transversal.



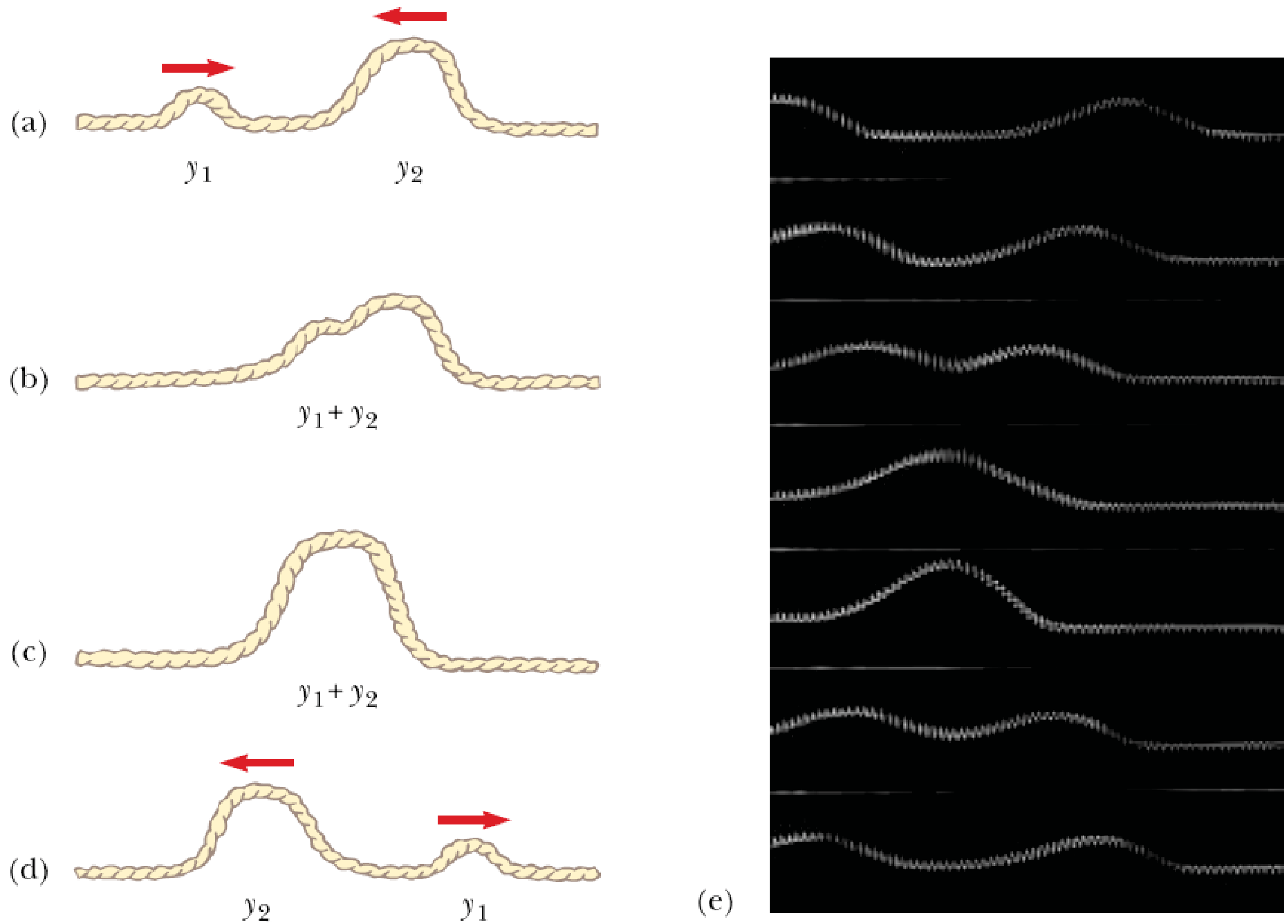
7.- El principio de superposición. Interferencia de ondas.

La superposición de ondas puede resultar bastante compleja; sin embargo, si consideramos que las ondas son del tipo armónico, esta se simplifica bastante.

Esta superposición de ondas da lugar a efectos de gran interés en el estudio de las ondas, como por ejemplo, los batidos o pulsaciones, la formación de las llamadas *ondas estacionarias*.

Para lo cual, vamos a considerar la superposición temporal y espacial de ondas armónicas, que pueden ser longitudinales o transversales.

7. El principio de superposición. Interferencia de ondas.

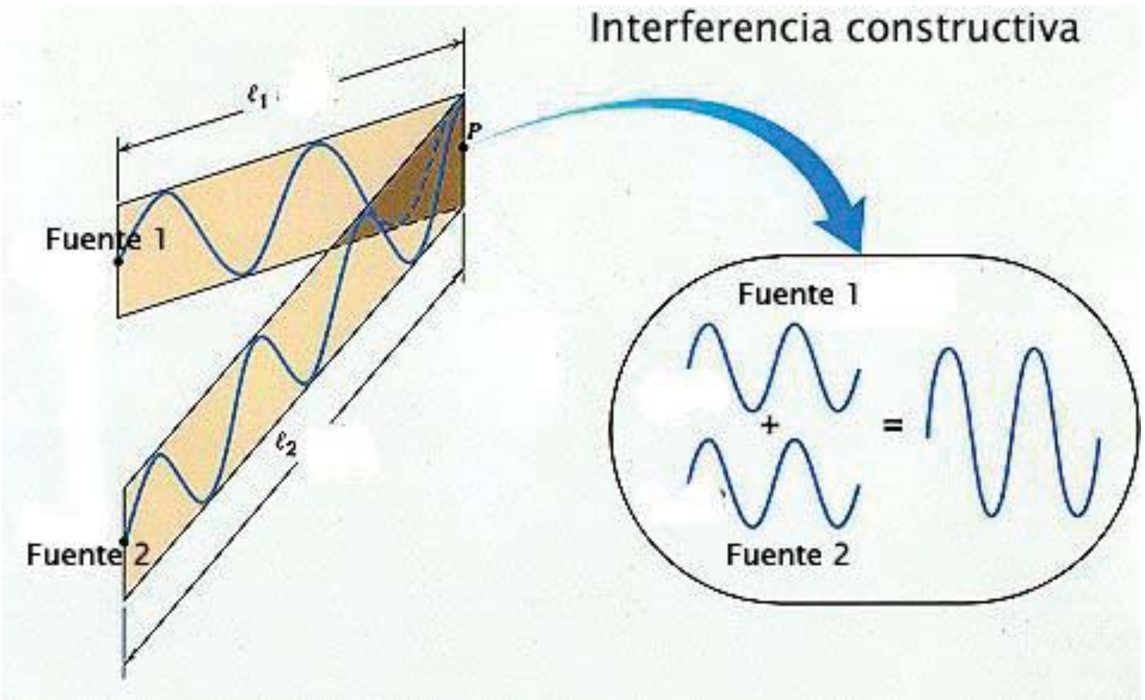


Dos pulsos de onda que viajan en direcciones opuestas sobre una cuerda estirada pasan uno a través del otro

7.- El principio de superposición. Interferencia de ondas.

La combinación de ondas independientes en la misma región del espacio producen una onda resultante denominada interferencia, pudiendo ser de dos tipos:

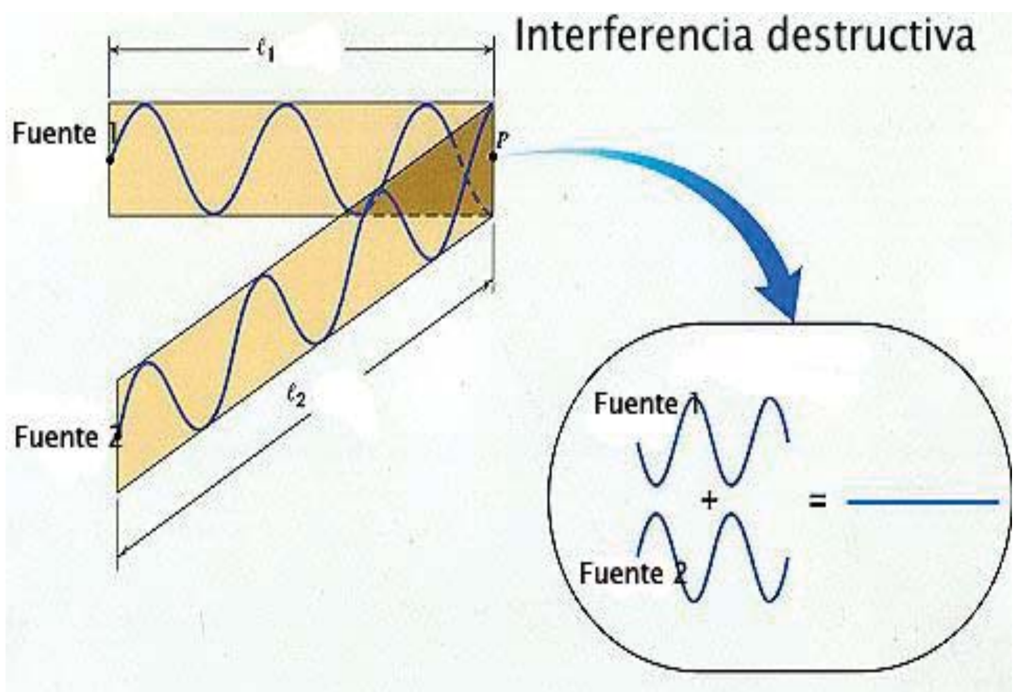
- Interferencia constructiva. Ocurre cuando los desplazamientos de los pulsos están en la misma dirección, por lo que hay un reforzamiento de la onda.



7.- El principio de superposición. Interferencia de ondas.

La combinación de ondas independientes en la misma región del espacio producen una onda resultante denominada interferencia, pudiendo ser de dos tipos:

- Interferencia destructiva. Ocurre cuando los desplazamientos de los pulsos están en direcciones opuestas, por lo que en este caso, hay una atenuación de la onda.

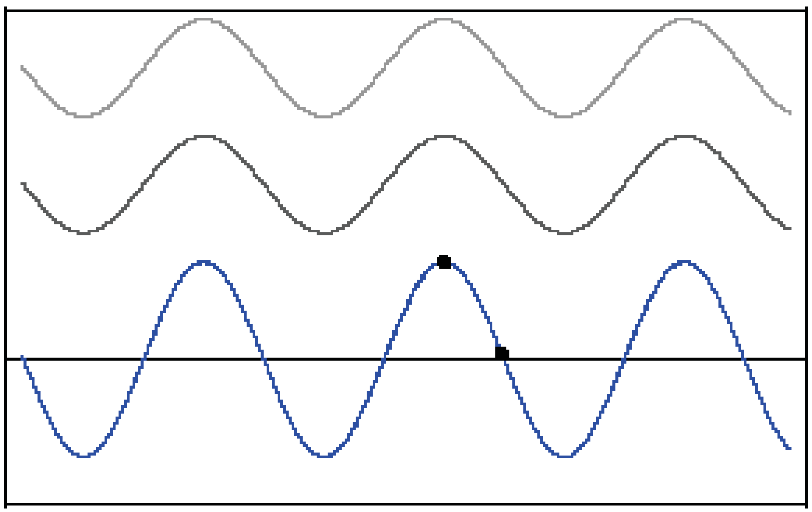


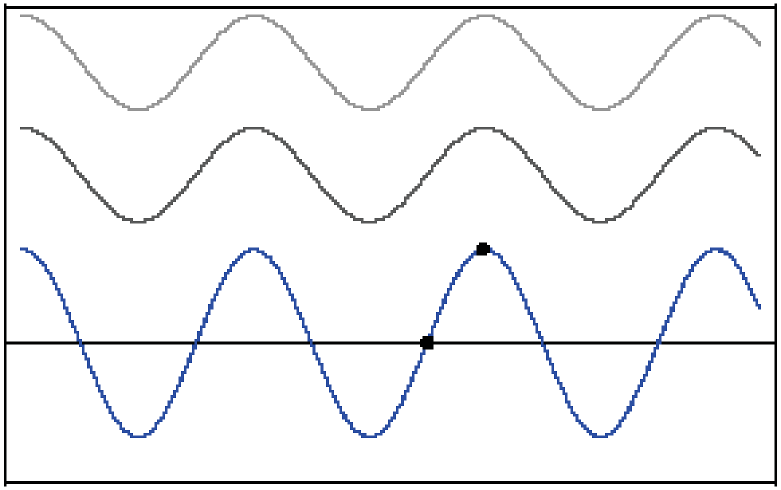
7.- El principio de superposición. Interferencia de ondas.

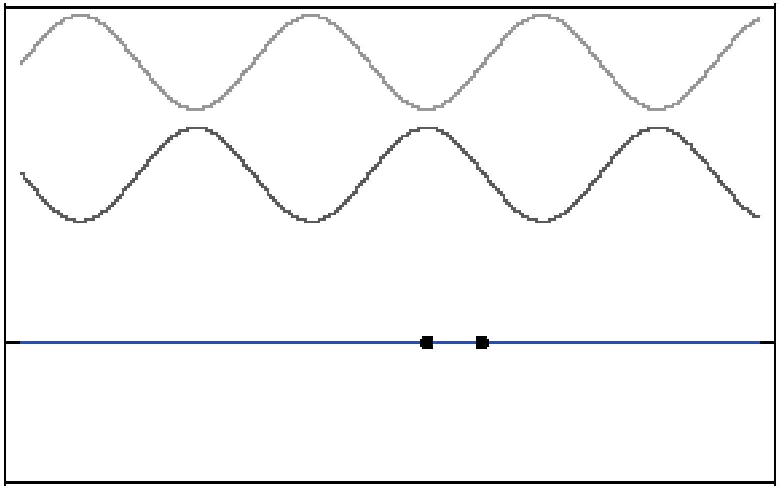
Interferencia de ondas de agua producidas en un tanque

7.- El principio de superposición. Interferencia de ondas.

Interferencia (constructiva y destructiva) de ondas transversales







7.- El principio de superposición. Interferencia de ondas.

Superposición de ondas (fase)

A continuación consideremos que se tienen dos ondas armónicas viajando a la derecha (en un medio lineal) con la misma amplitud, longitud de onda y frecuencia, pero que difieren por una fase ϕ:

$$y_1(x,t) = ASen\left(kx - \omega t\right) \quad \text{y} \quad y_2(x,t) = ASen\left(kx - \omega t - \phi\right)$$

con lo que la onda resultante es

$$y_R(x,t) = A\left\lfloor Sen\left(kx - \omega t\right) + Sen\left(kx - \omega t - \phi\right)\right\rfloor$$

Esta expresión puede simplificarse si usamos la identidad

$$\boxed{\sin a + \sin b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

7.- El principio de superposición. Interferencia de ondas.

Superposición de ondas (fase)

Con ello, la expresión para la onda resultante se puede reescribir como

$$y_R(x,t) = 2ACos\left(\frac{\phi}{2}\right)Sen\left(kx - \omega t - \frac{\phi}{2}\right)$$

De aquí se puede ver que esta onda resultante:

- tiene las mismas características de las ondas que la constituyen, en cuanto al número de onda angular (k) y a la frecuencia angular (ω) con un desfasamiento igual a la mitad del desfasamiento relativo entre las ondas y_1 y y_2.
- tiene una amplitud que depende del desfasamiento ϕ existente entre las ondas constituyentes y_1 y y_2.

7.- El principio de superposición. Interferencia de ondas.

Superposición de ondas (fase)

Con lo anterior, vemos que la superposición de ondas puede resultar en una onda duplicada (interferencia constructiva) o anulada (interferencia destructiva), lo cual está condicionado por el valor de la fase ϕ, a partir de la expresión para la amplitud de la onda resultante, a saber

$$\boxed{2ACos\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

$$\left(\frac{\phi}{2}\right)=0,\pi,2\pi,\ldots,n\pi$$

$$\boxed{\phi=0,2\pi,4\pi,\ldots,2n\pi}$$

Interferencia constructiva

$$\left(\frac{\phi}{2}\right)=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\ldots,\frac{(2n+1)\pi}{2}$$

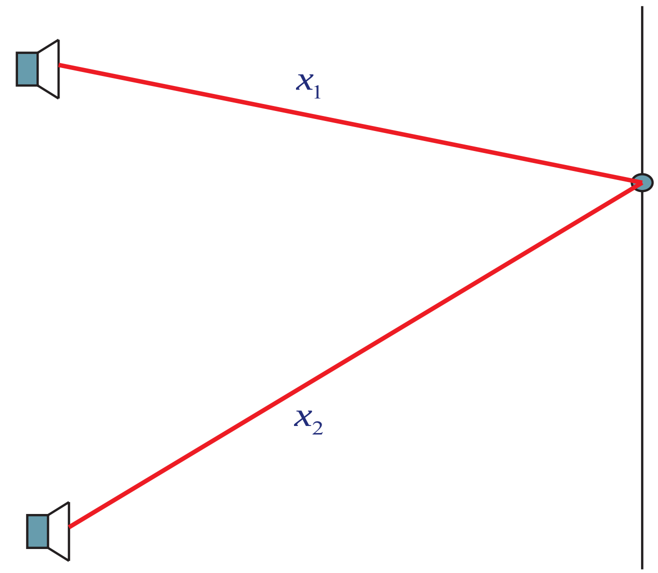
$$\boxed{\phi=\pi,3\pi,5\pi,\ldots,(2n+1)\pi}$$

Interferencia destructiva

7.- El principio de superposición. Interferencia de ondas.

Superposición espacial de ondas

Ahora consideremos que se tienen dos ondas armónicas con la misma amplitud, longitud de onda, frecuencia y fase, pero que difieren en posición



$$y(x_1,t) = ASen(kx_1 - \omega t)$$

y

$$y(x_2,t) = ASen(kx_2 - \omega t)$$

En este caso, la onda resultante de la superposición de ambas ondas es

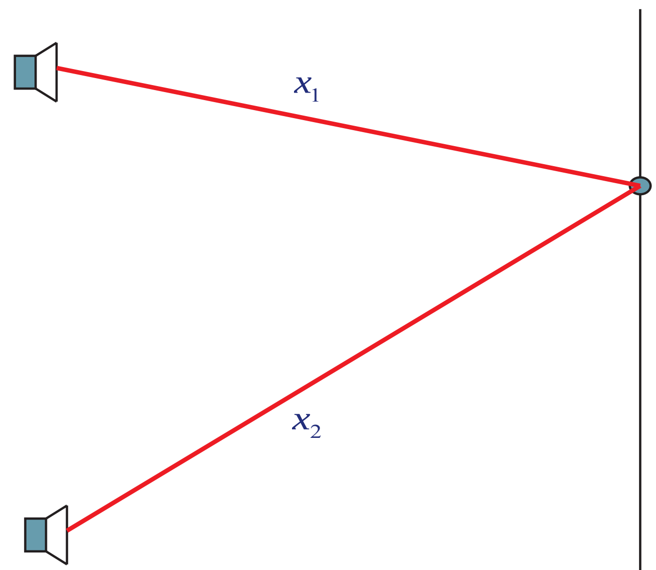
$$\boxed{y_R(x,t) = 2ACos\left(\frac{1}{2}k[x_1 - x_2]\right)Sen\left(\frac{1}{2}k[x_1 + x_2] - \omega t\right)}$$

7.- El principio de superposición. Interferencia de ondas.

Superposición espacial de ondas

De nueva cuenta, en este caso también se puede hablar de interferencia constructiva o destructiva.

Lo cual está condicionado por la diferencia entre los valores de la posición, a partir de la expresión para la amplitud



$$\boxed{2ACos\left(\frac{1}{2}k[x_1 - x_2]\right)}$$

$$\frac{1}{2}k(x_1 - x_2) = 0, \pi, 2\pi, \ldots, n\pi$$

$$\boxed{x_1 - x_2 = 0, \lambda, 2\lambda, \ldots, n\lambda}$$

Interferencia constructiva

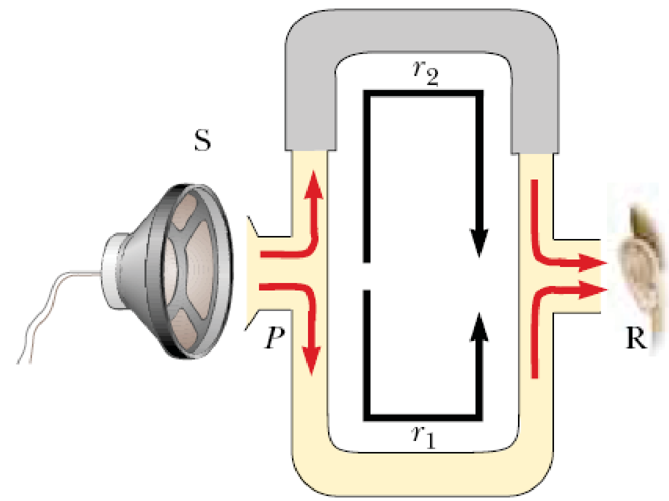
$$\frac{1}{2}k(x_1 - x_2) = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots, \frac{(2n+1)\pi}{2}$$

$$\boxed{x_1 - x_2 = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \ldots, \frac{(2n+1)\lambda}{2}}$$

Interferencia destructiva

7.- El principio de superposición. Interferencia de ondas.

Dispositivo para producir interferencia en ondas sonoras.



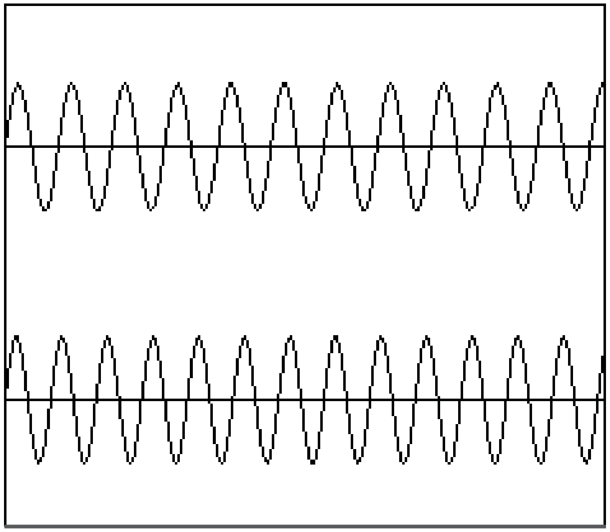
Cuando la diferencia en las longitudes de las trayectorias $\Delta r = \left| r_2 - r_1 \right|$ es cero o algún múltiplo de la longitud de onda λ, las dos ondas que alcanzan al receptor están en fase e interfieren constructivamente.

Si la longitud de r_2 se ajusta de manera que la diferencia de trayectorias es $\lambda/2$, $3\lambda/2$, ..., $n\lambda/2$ (para n impar), las dos ondas están exactamente 180° fuera de fase en el receptor y consecuentemente se cancelan entre sí, interfiriendo destructivamente.

7.- El principio de superposición. Interferencia de ondas.

La superposición de ondas de frecuencias ω_1 y ω_2 muy cercanas entre sí, produce un fenómeno particular denominado **pulsación** (o **batido**).

Consideremos dos ondas armónicas dadas por



$$y_1 = ASen\left(kx - \omega_1 t\right)$$

y

$$y_2 = ASen\left(kx - \omega_2 t\right)$$

Usando la identidad

$$SenA + SenB = 2Sen\left(\frac{A+B}{2}\right)Cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

se puede calcular

$$y_R = y_1 + y_2$$

7.- El principio de superposición. Interferencia de ondas.

Con lo anterior, la onda resultante está dada por la expresión

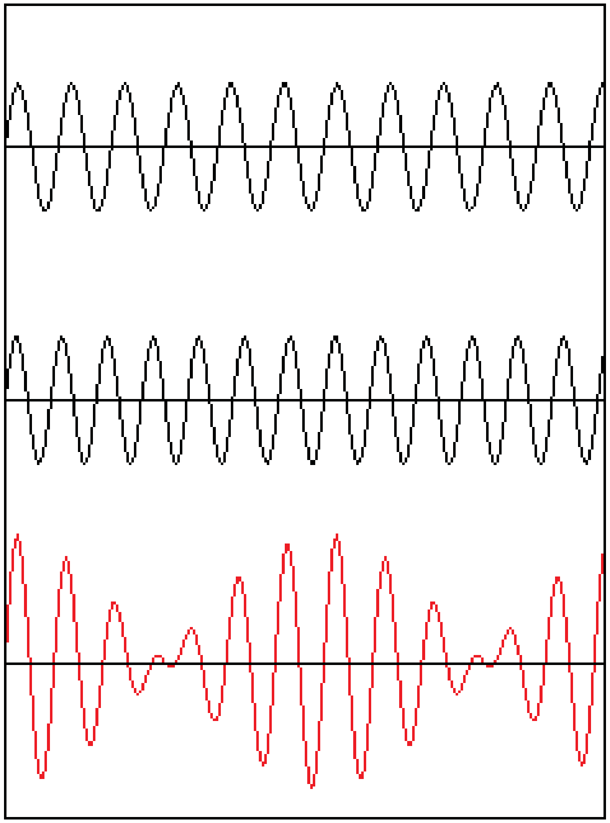
$$y_R = 2ASen\left(kx - \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t\right)Cos\left(\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)t\right)$$

Que corresponde a una onda con frecuencia promedio

$$\bar{\omega} = \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)$$

y una amplitud variable dada por

$$2ACos\left(\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)t\right)$$



7.- El principio de superposición. Interferencia de ondas.

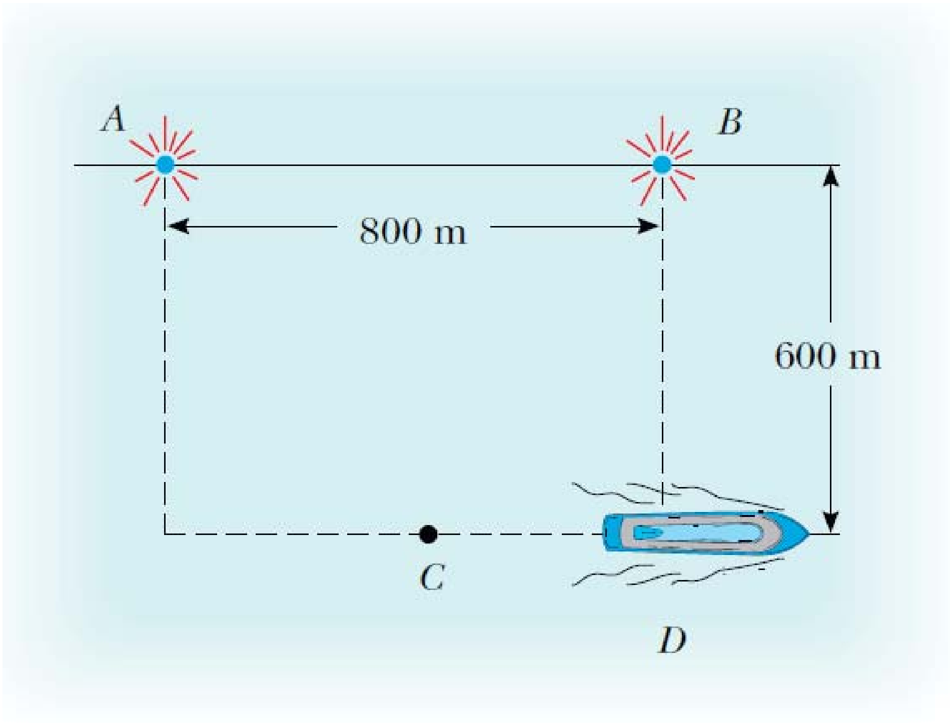
En esos casos, nuestro sistema auditivo no es capaz de percibir separadamente las dos frecuencias presentes, sino que se percibe una frecuencia única promedio $(f_1+f_2)/2$, pero que cambia en amplitud a una frecuencia de $|f_2-f_1|$.

Es decir, si superponemos dos ondas senoidales de 300Hz y 304Hz, nuestro sistema auditivo percibirá un único sonido cuya frecuencia corresponde a una onda de 302Hz y una amplitud que varía con una frecuencia de 4Hz (es decir, cuatro veces por segundo).

Las pulsaciones se perciben para diferencias en las frecuencias de hasta aproximadamente 15-20Hz. Diferencias mayores de 15-20Hz le dan al sonido percibido un carácter áspero, mientras que si la diferencia aumenta comienzan nuevamente a percibirse las dos ondas simultánea y separadamente.

7.- El principio de superposición. Interferencia de ondas. Un ejemplo.

El buque en la figura viaja a lo largo de una línea recta paralela a la costa y a 600m de ella. El radio del buque recibe simultáneamente señales de la misma frecuencia desde las antenas A y B. Las señales interfieren en forma constructiva en el punto C, que es equidistante de A y B. La señal pasa por el primer mínimo en el punto D. Determinar la longitud de onda de las ondas de radio.



Solución:

A partir de

$$x_1 - x_2 = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \ldots, \frac{(2n+1)\lambda}{2}$$

tenemos que

$$\lambda = 2\left(x_1 - x_2\right)$$

de donde

$$\lambda = 800m$$

8.- Ondas estacionarias. Cuerdas vibrantes y columnas de aire.

Otro caso particular de la superposición de ondas es aquella en que se superponen dos ondas casi-idénticas, con la única diferencia de que se mueven en direcciones opuestas.

Así que consideremos las ondas

$$y_1(x,t) = ASen(kx - \omega t)$$

y

$$y_2(x,t) = ASen(kx + \omega t)$$

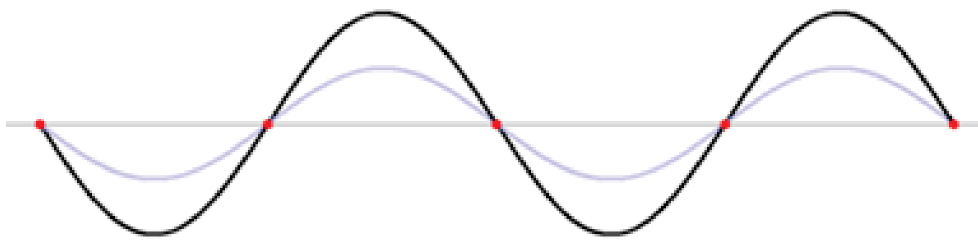
La onda resultante de la superposición de ambas ondas armónicas está dada por

$$\boxed{y_R(x,t) = 2ASen(kx)Cos(\omega t)}$$

8.- Ondas estacionarias. Cuerdas vibrantes y columnas de aire.

Esta superposición de ondas da como resultado una expresión que NO corresponde a una onda viajera, por lo que se le conoce como onda estacionaria.

De hecho, corresponde a la gráfica de $Sen(kx)$, con una amplitud variable dada por $2ACos(\omega t)$.



Este comportamiento permite establece la existencia de **nodos** (valores de x en los que la amplitud es cero) y **antinodos** (valores de x donde la amplitud es máxima).

Nodos $\Rightarrow$ $\boxed{kx = 0, \pi, 2\pi, \ldots, n\pi}$

Antinodos $\Rightarrow$ $\boxed{kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots, \frac{(2n+1)\pi}{2}}$

8.- Ondas estacionarias. Cuerdas vibrantes y columnas de aire.

Esquema de ondas estacionarias

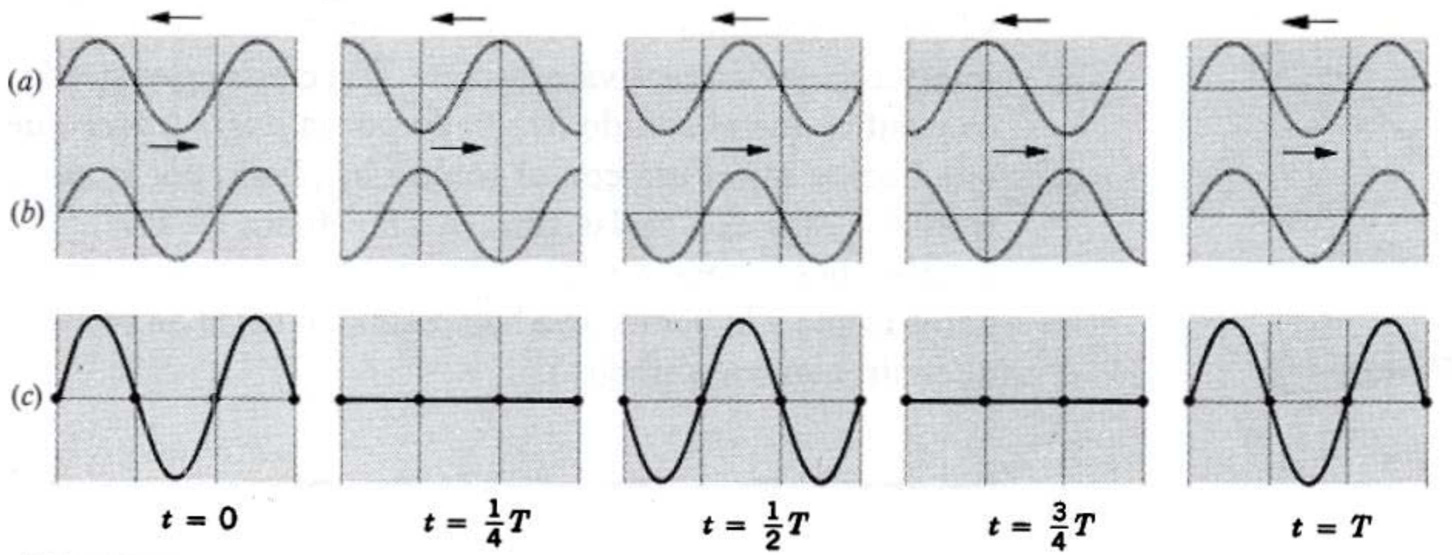


Figura 20 (*a*, *b*) Dos ondas viajeras de la misma longitud de onda y amplitud, se mueven en direcciones opuestas. (*c*) La superposición de las dos ondas en instantes de tiempo diferentes. Los nodos del patrón de onda estacionaria se hallan indicados por puntos gruesos. Nótese que las ondas viajeras no tienen nodos.

Nodos $\Rightarrow$ $\boxed{x = 0, \frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \ldots, \frac{n\lambda}{2}}$

Antinodos $\Rightarrow$ $\boxed{x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \ldots, \frac{(2n+1)\lambda}{4}}$

8.- Ondas estacionarias. Cuerdas vibrantes y columnas de aire.

Ondas estacionarias en una cuerda

Para establecer la condición que permite tener ondas estacionarias en una cuerda con ambos extremos fijos, basta advertir que el espaciamiento entre nodos es siempre de la mitad de la longitud de onda, de modo que la condición para producir una onda estacionaria en una cuerda es que su longitud L sea un múltiplo entero de medias longitudes de onda, a saber:

$$L = n\frac{\lambda}{2} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Es decir,

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad n = 1, 2, 3, \ldots}$$

8.- Ondas estacionarias. Cuerdas vibrantes y columnas de aire.

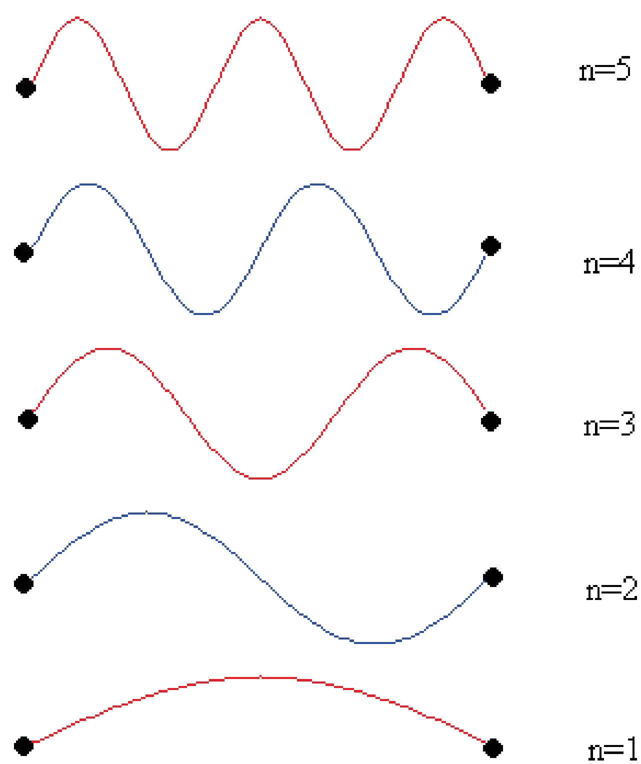
Ondas estacionarias en una cuerda

Con lo anterior, y considerando una velocidad de onda v, los modos de vibración normales en una cuerda corresponden a las frecuencias f_n dadas por

$$f_n = \frac{nv}{2L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Si consideramos que la cuerda tiene una densidad de masa m y está sujeta a una tensión T, entonces, los modos normales de vibración están dados por

$$\boxed{f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots}$$



Modos normales en una cuerda.

8.- Ondas estacionarias. Cuerdas vibrantes y columnas de aire.

Ondas estacionarias en una cuerda

A continuación, consideremos el caso en que la cuerda tiene uno de sus extremos fijos y el otro suelto.

En este caso, para establecer la condición requerida para producir una onda estacionaria en una cuerda tenemos que establecer que la distancia entre un nodo y un antinodo sea igual a su longitud L, a saber:

$$L = \frac{(2n-1)\lambda}{4} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

es decir,

$$\boxed{\lambda_n = \frac{4L}{2n-1} \quad n = 1, 2, 3, \ldots}$$

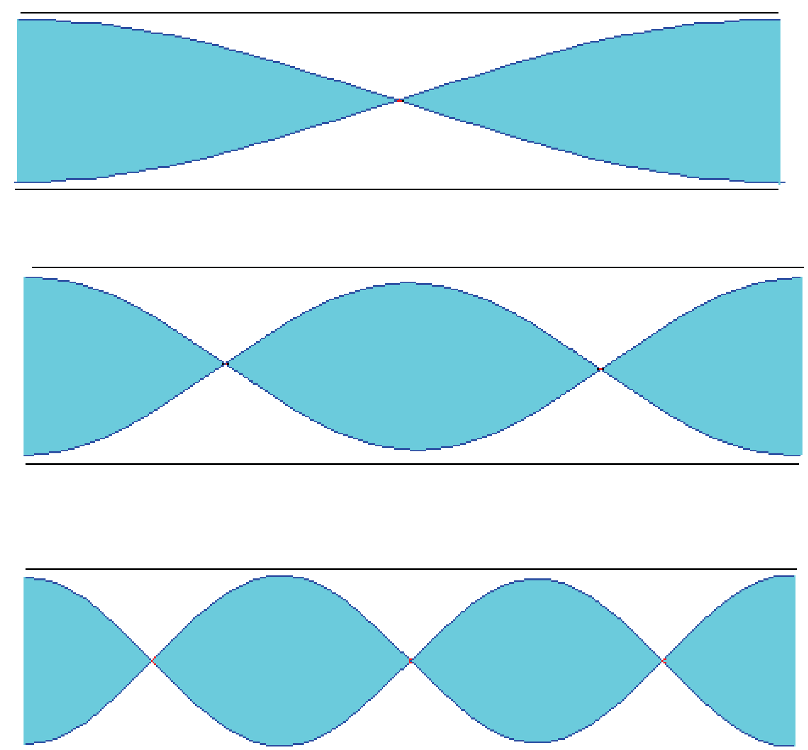
Con lo anterior, los modos normales de vibración corresponden a las frecuencias f_n dadas por

$$\boxed{f_n = \frac{(2n-1)v}{4L} \quad n = 1, 2, 3, \ldots}$$

8.- Ondas estacionarias. Cuerdas vibrantes y columnas de aire.

Ondas estacionarias en un tubo

Para establecer la condición que permite tener ondas estacionarias en un tubo con ambos extremos abiertos, basta advertir que los extremos abiertos se comportan como antinodos.



Tomando en cuenta que la distancia entre antinodos es exactamente la misma que entre nodos, a saber, media longitud de onda, entonces la longitud L del tubo debe ser tal que

$$L = n\frac{\lambda}{2} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

8.- Ondas estacionarias. Cuerdas vibrantes y columnas de aire.

Ondas estacionarias en un tubo

La condición anterior se puede escribir como

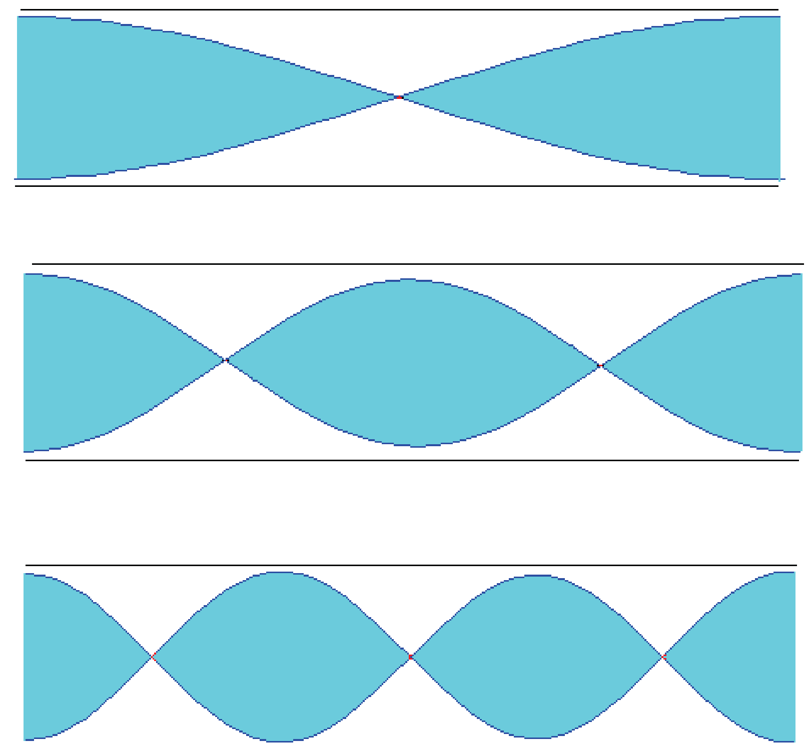
$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

donde n representa el orden de los modos normales de vibración.

Con lo que la frecuencia de los modos normales de vibración es

$$f_n = \frac{n}{2L} v$$

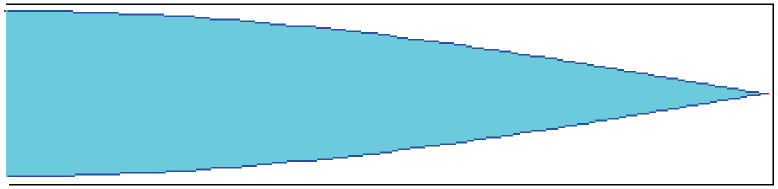
donde v es la velocidad de la onda.

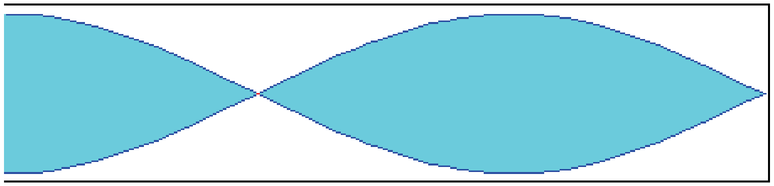


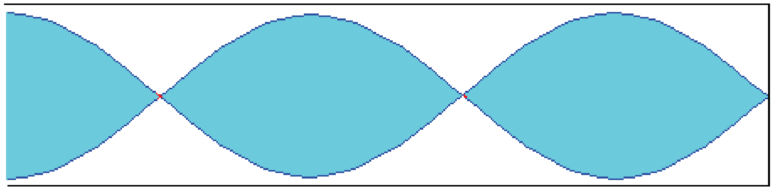
8.- Ondas estacionarias. Cuerdas vibrantes y columnas de aire.

Ondas estacionarias en un tubo

Para establecer la condición que permite tener ondas estacionarias en un tubo con un extremo abiertos, basta advertir que el extremo abierto se comporta como antinodo, mientras que el extremo cerrado lo hace como si fuese un nodo.







Así que la condición necesaria para producir una onda estacionaria en este tipo de tubos surge de establecer que la distancia entre un nodo y un antinodo sea igual a su longitud L.

8.- Ondas estacionarias. Cuerdas vibrantes y columnas de aire.

Ondas estacionarias en un tubo

La condición anterior se puede escribir como

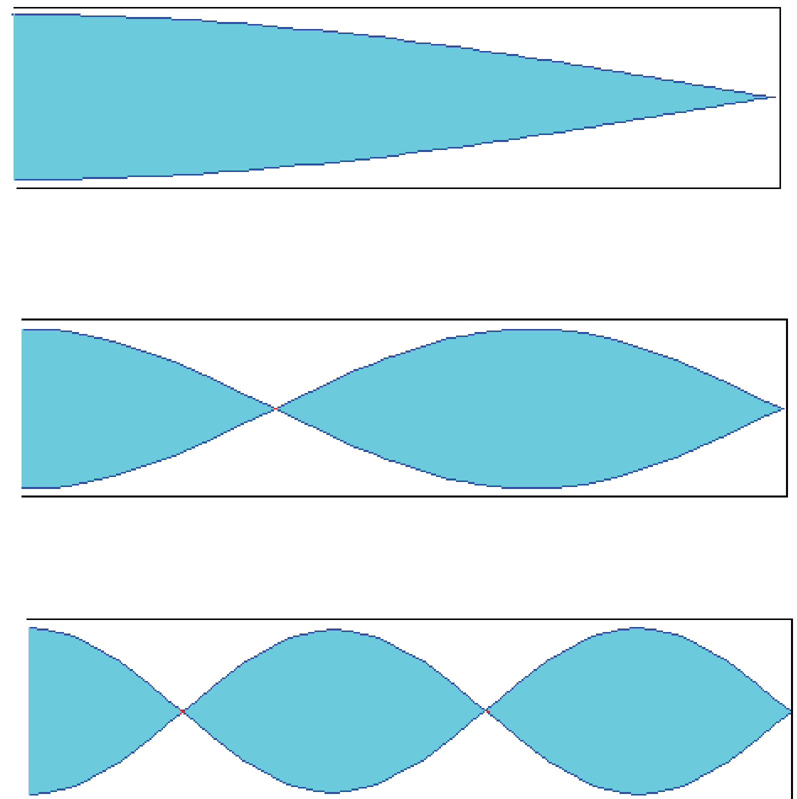
$$\lambda_n = \frac{4L}{2n-1} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

donde n representa el orden de los modos normales de vibración.

Con lo que la frecuencia de los modos normales de vibración es

$$f_n = \frac{2n-1}{4L} v$$

donde v es la velocidad de la onda.



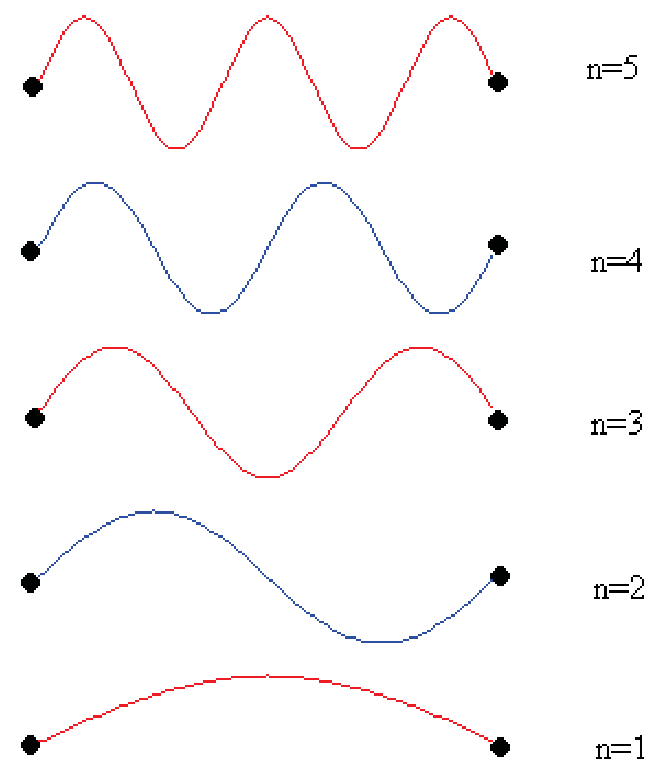
8.- Ondas estacionarias. Cuerdas vibrantes y columnas de aire. Resumen.

	Longitud de onda	Frecuencia	
Cuerda fija en ambos extremos	$\lambda_n = \dfrac{2L}{n} \quad n = 1, 2, 3, ...$	$f_n = \dfrac{nv}{2L} \quad n = 1, 2, 3, ...$	**Tubo abierto por ambos extremos**
Cuerda fija en un extremo	$\lambda_n = \dfrac{4L}{n} \quad n = 1, 3, 5, ...$	$f_n = \dfrac{nv}{4L} \quad n = 1, 3, 5, ...$	**Tubo abierto por un extremo**

En cualquier caso, $n=1$ se conoce como el valor fundamental o primera armónica. Para el caso en que se tiene una cuerda con ambos extremos fijos (o un tubo con ambos extremos abiertos) $n=2$ se conoce como segunda armónica o primer sobretono, $n=3$ es la tercera armónica o segundo sobretono, etc. Sin embargo, para el caso en que se tiene una cuerda con un extremo fijo (o un tubo abierto en un extremo) la segunda armónica corresponde a $n=3$, la tercera armónica a $n=5$, etc.

8.- Ondas estacionarias. Cuerdas vibrantes y columnas de aire. Ejemplos.

7.- En una cuerda de $120.0cm$ de longitud, fija en ambos extremos, se forma una onda estacionaria. La cuerda vibra en cuatro segmentos cuando se pone a oscilar con una frecuencia de $120.0Hz$. Determine la longitud de onda y la frecuencia fundamental de la cuerda. ¿Cuál es la velocidad de la onda?

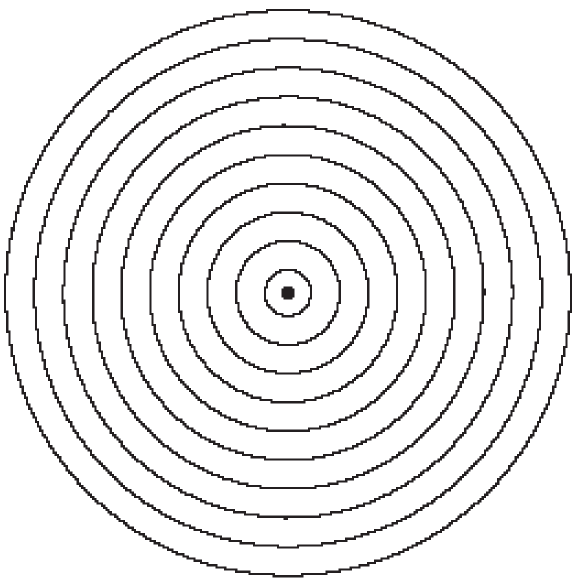


8.- Ondas estacionarias. Cuerdas vibrantes y columnas de aire. Ejemplos.

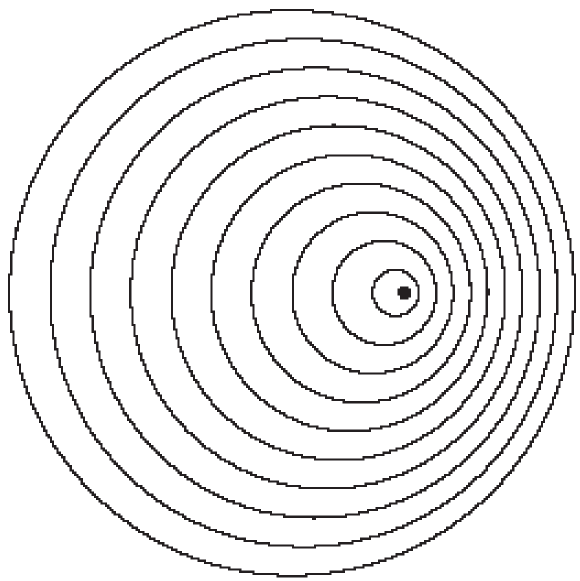
8.- Un estudiante usa un oscilador sonoro de frecuencia ajustable para medir la profundidad de un pozo de agua. Las dos resonancias sucesivas que escucha tienen frecuencias de $51.5Hz$ y $60.0Hz$. ¿Qué tan profundo es el pozo?

9.- Efecto Doppler.

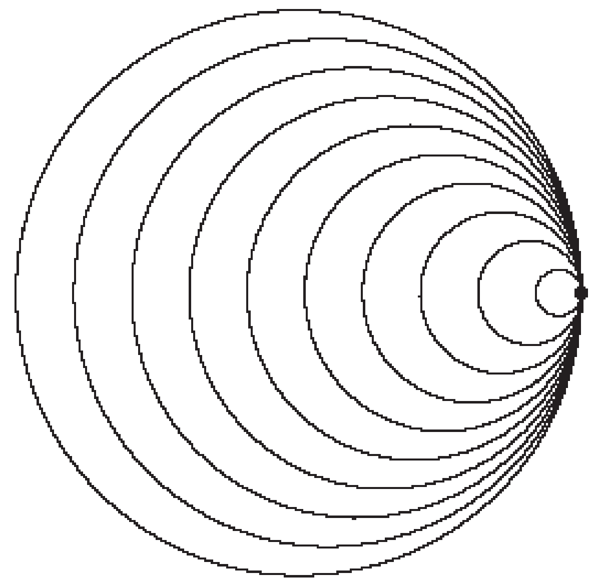
El efecto Doppler se produce cuando existe un movimiento relativo entre una fuente sonora y un observador, lo cual ocurre cuando, al menos, uno de ellos se mueve respecto al otro; y se manifiesta por el cambio de frecuencia de la onda conforme uno se acerca (o se aleja) de la fuente.



Fuente en reposo
$v_f = 0$



Fuente en movimiento
$v_f < v_S$



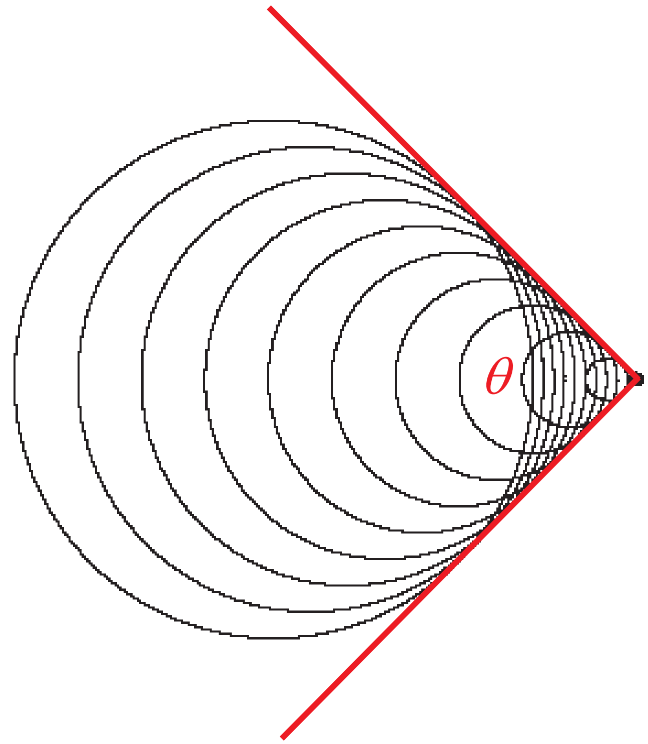
Fuente en movimiento
$v_f = v_S$

9.- Efecto Doppler.

Ondas de choque

En el caso en que la rapidez de la fuente (v_f) es mayor que la rapidez con que se propagan las ondas (v_S) se genera lo que se conoce como una **onda de choque**, de tal forma que los frentes de onda producen un cono con una abertura θ dada por

$$\theta = sen^{-1}\left(\frac{v_S}{v_f}\right)$$



Fuente en movimiento
$v_f > v_S$

9.- Efecto Doppler.

El efecto Doppler, matemáticamente, se describe mediante la expresión

$$f' = f\left(\frac{v_{son} + v_{obs}}{v_{son} - v_{fuente}}\right)$$

f frecuencia de la fuente

f' frecuencia del escucha

para el caso en que la fuente y el observador se mueven acercándose mutuamente.

9.- Efecto Doppler.

Para resolver problemas en los que aparece el *Efecto Doppler* se procede de la siguiente manera:

1. Identificar la fuente emisora del sonido (a la que se le asocia la frecuencia ***f***) y el escucha u observador (al que se le asocia la frecuencia ***f'***).
2. Tomar la velocidad como positiva si el objeto (ya sea la fuente o el escucha) se acerca, y negativa si se aleja.
3. Resolver para la incógnita solicitada.

$$f\,' = f\left(\frac{v_{son} + v_{obs}}{v_{son} - v_{fuente}}\right)$$

9.- Efecto Doppler. Ejemplos.

9.-

9.- Efecto Doppler. Ejemplos.

10.-

10.- La ecuación de onda.

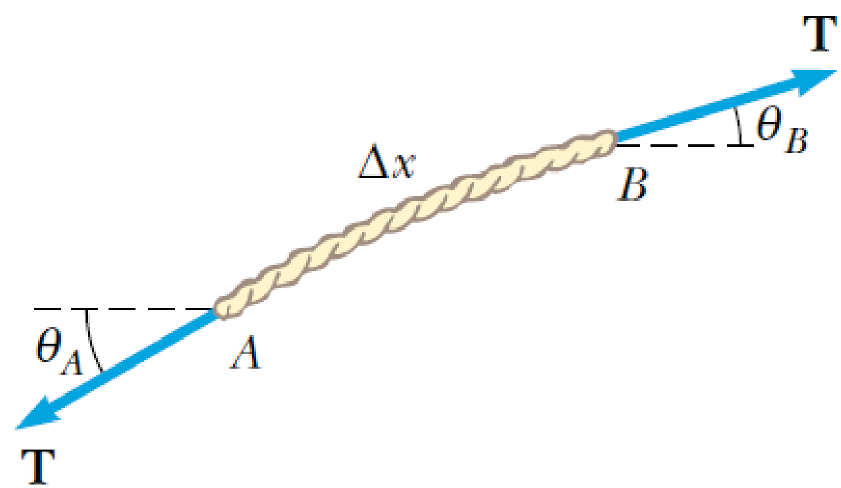
Antes de terminar esta parte del análisis del movimiento ondulatorio, se hace necesario investigar el origen de la Ecuación de Onda que lo modela.

Para ello, vamos a considerar el movimiento de una onda en una cuerda, bajo las siguientes consideraciones:

- La amplitud de vibración es pequeña, de tal forma que cada punto de la misma se mueve en dirección vertical.
- Todas las fuerzas de fricción, tanto internas como externas, pueden despreciarse.
- La tensión en la cuerda es tangente a la misma.
- La masa de la cuerda por unidad de longitud (μ) es suficientemente pequeña en comparación con la tensión en la misma, por lo que las fuerzas de gravedad pueden despreciarse.

10.- La ecuación de onda.

Con lo anterior, vamos a considerar un segmento Δx de la cuerda, de forma que los extremos del segmento formen ángulos θ_A y θ_B con la horizontal, tal como se muestra en la figura.



Haciendo un análisis de fuerzas en la dirección vertical se tiene

$$\sum F_y = T\sin\theta_B - T\sin\theta_A = (\Delta m)a_y$$

que podemos reescribir, considerando ángulos pequeños, como

$$T(\tan\theta_B - \tan\theta_A) = \mu\Delta x\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)$$

donde hemos usado que

$$\Delta m = \mu\Delta x$$

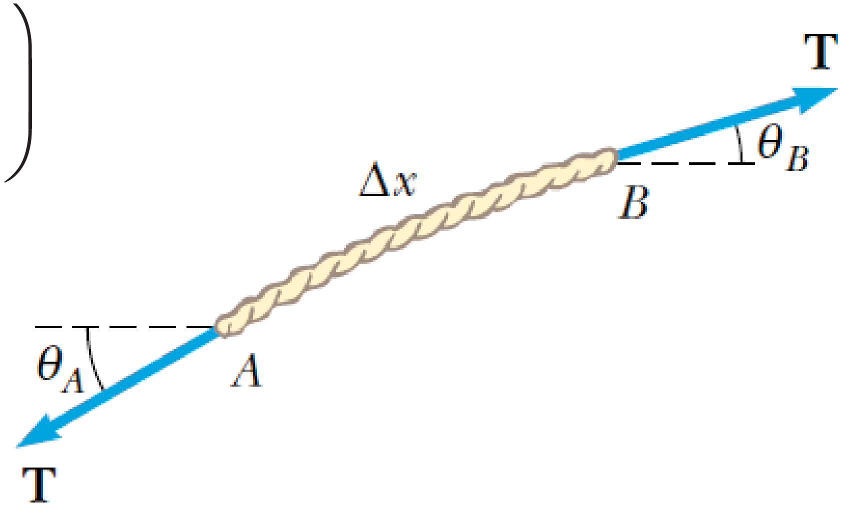
10.- La ecuación de onda.

Por otro lado, de los cursos básicos de cálculo, sabemos que la interpretación de la derivada en un punto corresponde a la pendiente, lo que permite escribir

$$T\left(\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_B-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_A\right)=\mu\Delta x\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)$$

o reordenando cantidades

$$\frac{1}{\Delta x}\left(\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_B-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_A\right)=\frac{\mu}{T}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)$$



Si a continuación consideramos el caso en que Δx tiende a cero, el lado izquierdo de la ecuación anterior se puede escribir como

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\equiv\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x}{\Delta x}$$

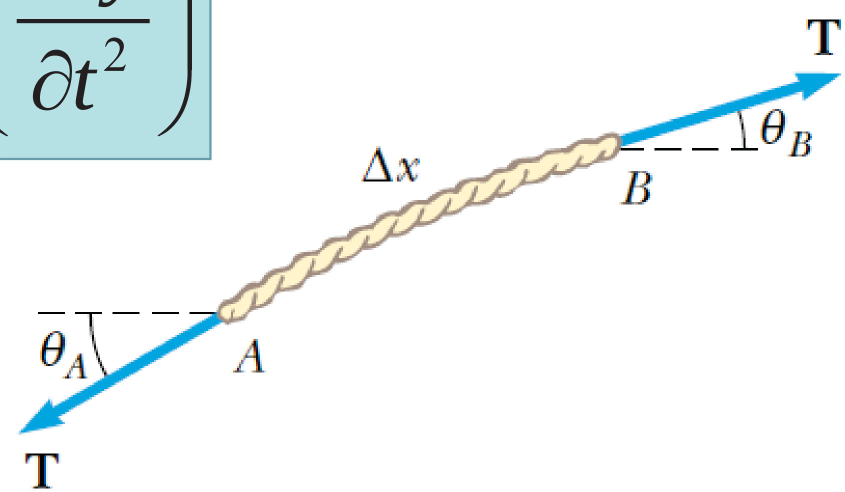
10.- La ecuación de onda.

Con lo que, finalmente, podemos escribir a la Ecuación de Onda unidimensional como

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)}$$

donde hemos considerado que la velocidad de la onda en la cuerda está dada por

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$



En cursos más avanzados se mostrará que esta ecuación diferencial parcial de segundo orden, conocida como *Ecuación de Onda*, aplica para varios tipos de onda y no sólo para ondas en una cuerda tensa.

10.- La ecuación de onda.

La ecuación de onda unidimensional obtenida anteriormente puede generalizarse, para casos en que las ondas se propagan en más de una dirección, mediante la introducción del operador Laplaciano

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla \quad \rightarrow \quad \nabla^2 \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

de tal forma que la Ecuación de Onda en un espacio N-dimensional se escribe como

$$\boxed{\nabla^2 u(\vec{r},t) - \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial^2 u(\vec{r},t)}{\partial t^2}\right) = 0}$$

donde $u(\mathbf{r},t)$ representa a la función de onda en tal espacio de N dimensiones.

10.: La ecuación de onda. Un ejemplo.

11.- Muestre que la función de onda

$$y(x,t) = Ae^{b(x-vt)}$$

donde A y b son constantes, es una solución de la ecuación de onda.

10.- La ecuación de onda. Un ejercicio.

12.- (a) Muestre que la función de onda

$$y(x,t) = x^2 + v^2t^2$$

es una solución de la ecuación de onda.

(b) Muestre que la función anterior puede escribirse como

$$f(x+vt) + g(x-vt)$$

y determine las formas funcionales de f y g.

(c) Repita los incisos (a) y (b) para la función

$$y(x,t) = \operatorname{sen} x \cos(vt)$$

Universidad de Sonora
Departamento de Física

"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

Mecánica II

Dr. Roberto Pedro Duarte Zamorano