Universidad de Sonora
Departamento de Física

"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

Mecánica II

Dr. Roberto Pedro Duarte Zamorano

Temario

1) Cinemática rotacional.
2) Dinámica rotacional.
3) Las leyes de Newton en sistemas de referencia acelerados.
4) La ley de la gravitación de Newton.
5) Oscilaciones.
6) Movimiento ondulatorio.
7) Ondas sonoras.

Temario

4. La ley de la gravitación de Newton.
    1. De los filósofos griegos a Kepler.
    2. Ley de la gravitación universal de Newton.
    3. Medida de la constante G. El experimento de Cavendish.
    4. Masa inercial y masa gravitatoria.
    5. Energía potencial gravitatoria.
    6. Movimiento de planetas y satélites.

I.- De los filósofos griegos a Kepler.

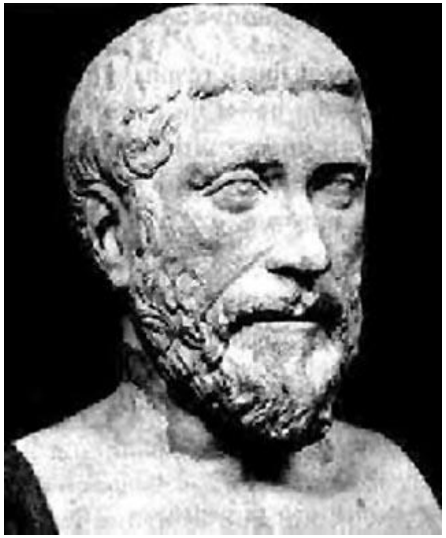
De las primeras inquietudes que tuvo la humanidad sobre el Universo en que estaban inmersos, podemos enumerar, entre otras:

- La existencia de una relación de los objetos celestes con el clima y los ciclos agrícolas.
- Entender el movimiento del Sol y la Luna, a partir de las observaciones que hacían de ellos, así como de la observación de las estrellas y constelaciones.

Los antiguos filósofos griegos no estuvieron al margen de las inquietudes anteriores, de tal forma que desarrollaron una escuela de astrónomos muy importante.

1.- De los filósofos griegos a Kepler.

- **Pitágoras de Samos** (582AC-507AC): Fue uno de los primeros astrónomos en proponer un sistema geocéntrico del Universo.



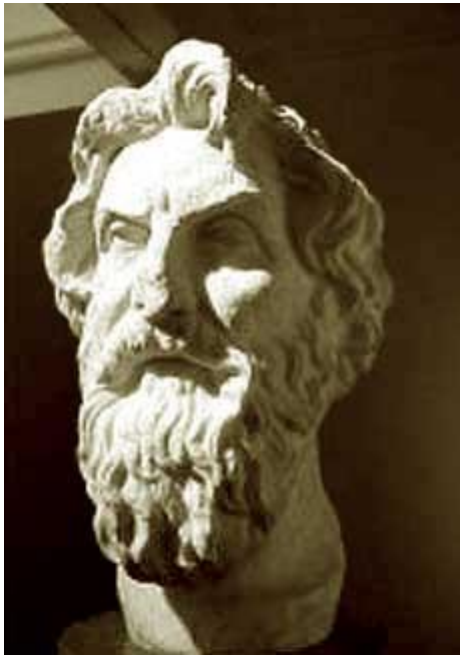
- **Eudoxos de Cnidus** (408AC-353AC): Estableció que las estrellas se ubicaban en una gran esfera que rotaba alrededor de la tierra diariamente.

1.- De los filósofos griegos a Kepler.

- Aristóteles (384AC-322AC): Propuso 55 esferas concéntricas alrededor de la tierra en las cuales se ubican el sol, los planetas, las estrellas y la luna. Estableció que todas las cosas se formaban de una combinación de 4 elementos: fuego, agua, tierra y aire.
  - Hizo apuntes detallados del movimiento retrógrado de los planetas respecto a la perspectiva de las estrellas, pero nunca pudo explicarlo.
  - Su influencia fue tanta, que la idea de un sistema geocéntrico prevaleció por casi 1800 años.

1.- De los filósofos griegos a Kepler.

- **Aristarcos de Samos** (310AC-230AC): Contradijo la teoría de Eudoxos al proponer que las esferas de los planetas, de las estrellas, del sol, y de la luna estaban paradas y que la tierra rotaba alrededor de un eje una vez por día. También sugirió un sistema heliocéntrico pero fue rechazado por todos los eruditos de su época.



- **Hiparco de Nicea** (190AC-120AC): Colectó las posiciones de mas de 1000 estrellas y usó su carta de estrellas para trazar el movimiento de los planetas.

1.- De los filósofos griegos a Kepler.

- **Claudio Ptolomeo** (100-170). Astrónomo greco-egipcio que expuso su doctrina en los trece libros de su "Gran composición matemática", que recibió de los traductores árabes el título consagrado de "Almagesto".

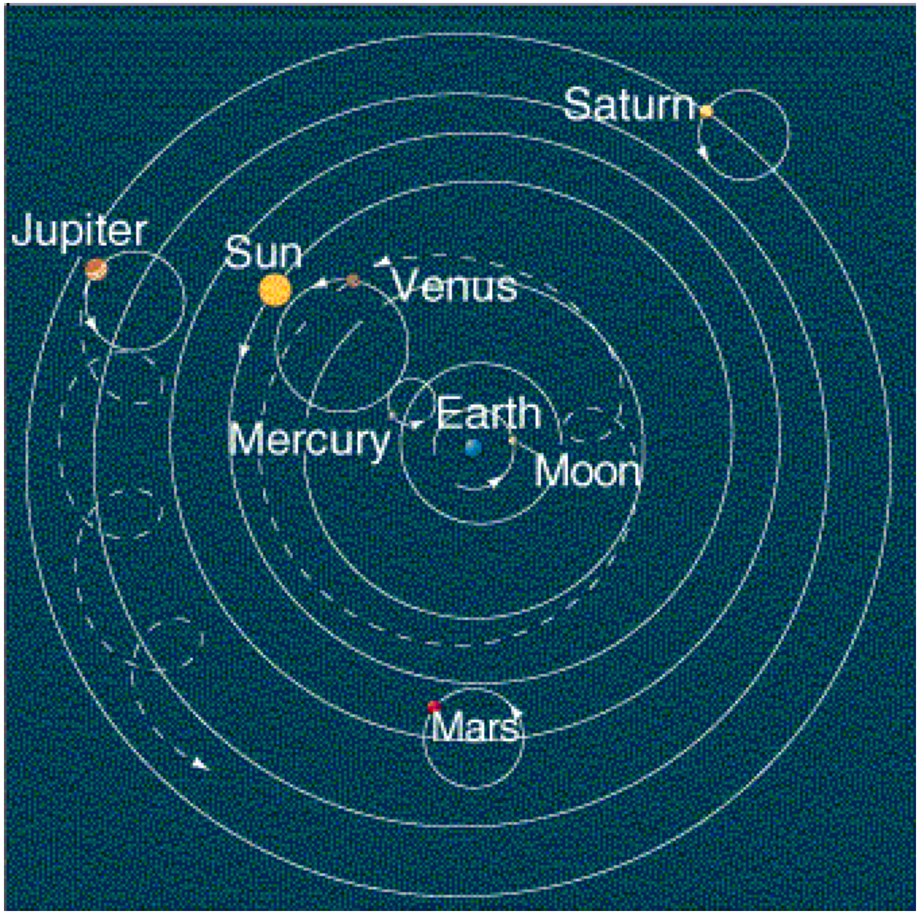
De hecho, ningún escrito astronómico de la Antigüedad tuvo éxito comparable a la obra de Ptolomeo, cuyos principios permanecieron sin discusión hasta la época del Renacimiento.

1.- De los filósofos griegos a Kepler.

La aportación fundamental de Ptolomeo fue su modelo geocéntrico del universo.

El modelo de Ptolomeo se caracteriza por:

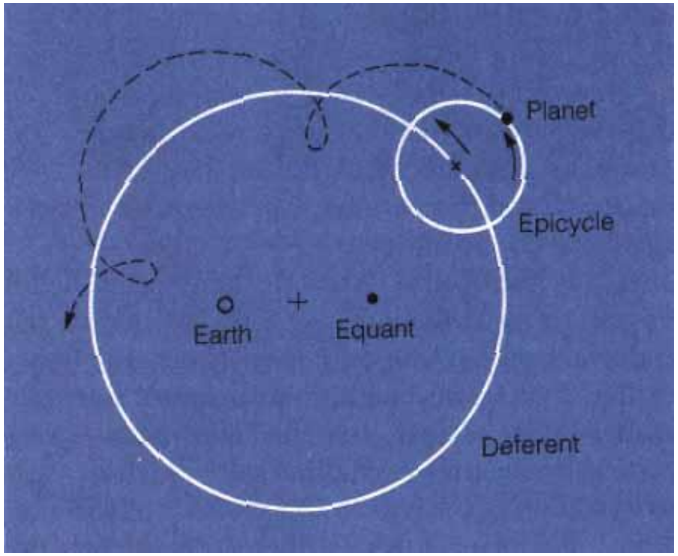
- Ubicar a la tierra en el centro del Universo.
- El sol está ubicado en la tercera órbita, después de Mercurio y Venus.
- Para poder explicar el movimiento retrógrado se añaden los epiciclos al movimiento circular de los planetas.

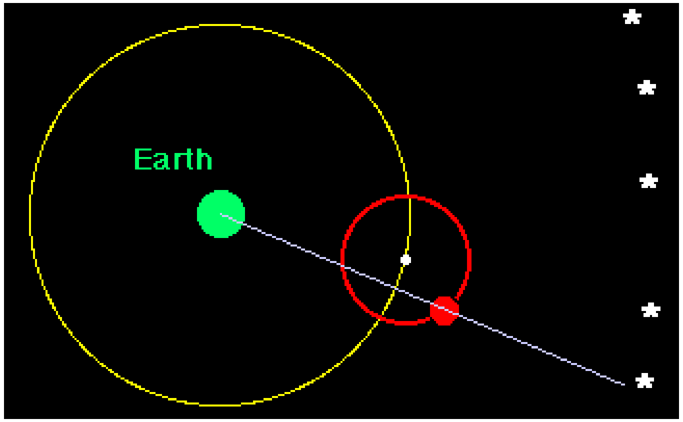


I.- De los filósofos griegos a Kepler.

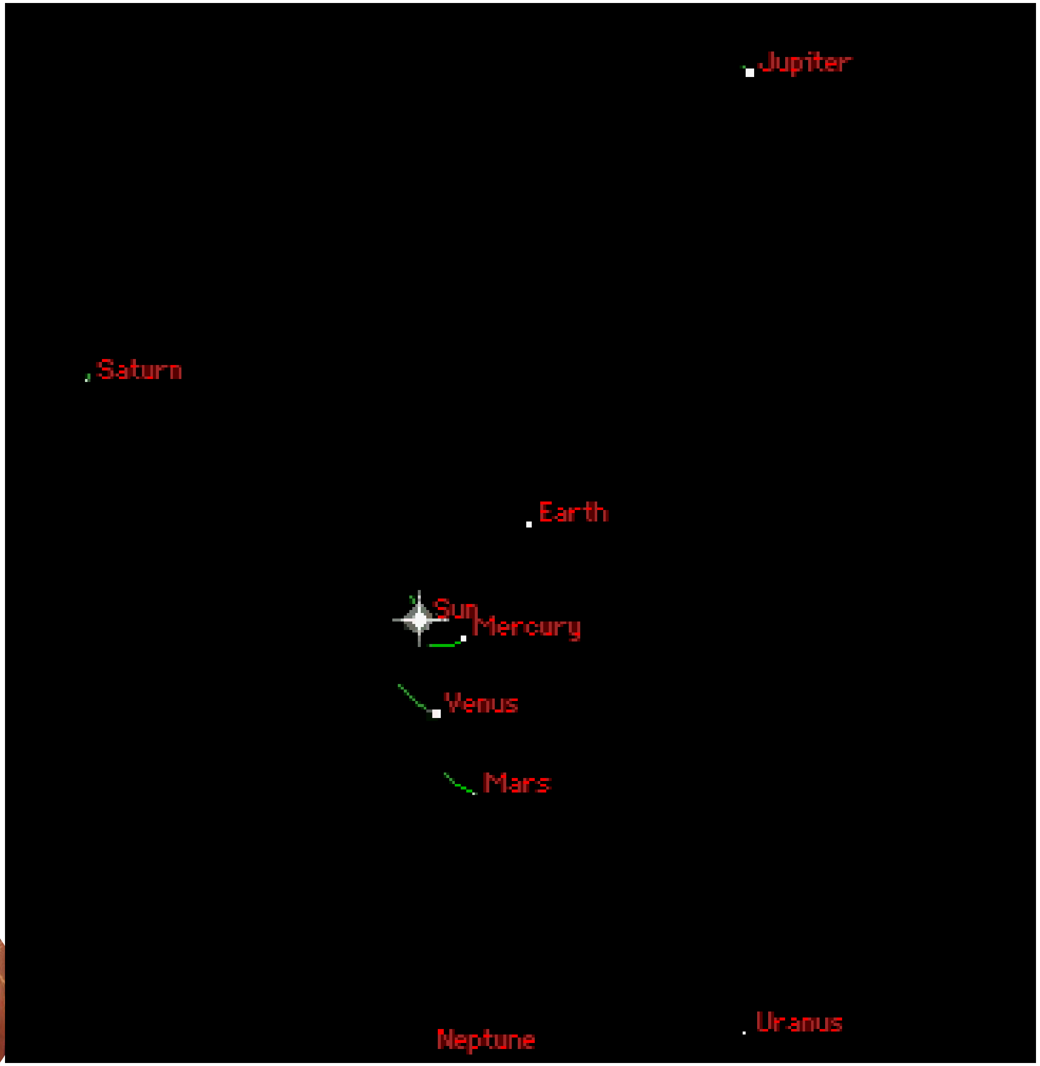
A pesar de lo complicado de su modelo, mediante la técnica del epiciclo-deferente, cuya invención se atribuye a Apolonio de Pérgamo, trató de resolver con bastante éxito los dos grandes problemas del movimiento planetario:

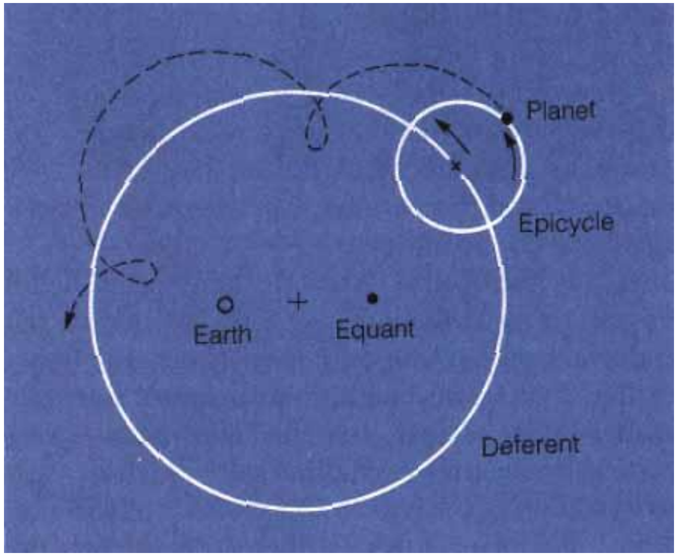
- la retrogradación de los planetas y su aumento de brillo, mientras retrogradan.
- la distinta duración de las revoluciones siderales.

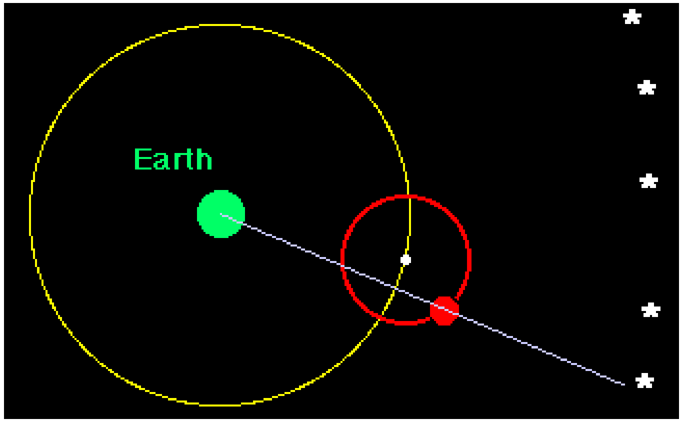




1.- De los filósofos griegos a Kepler.



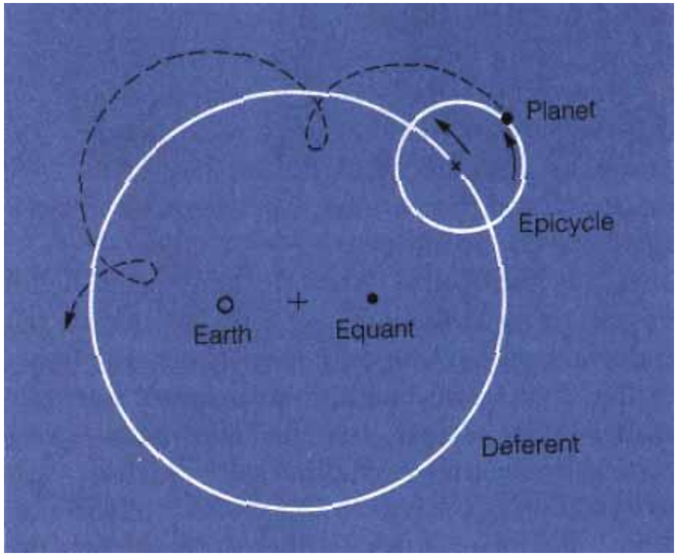


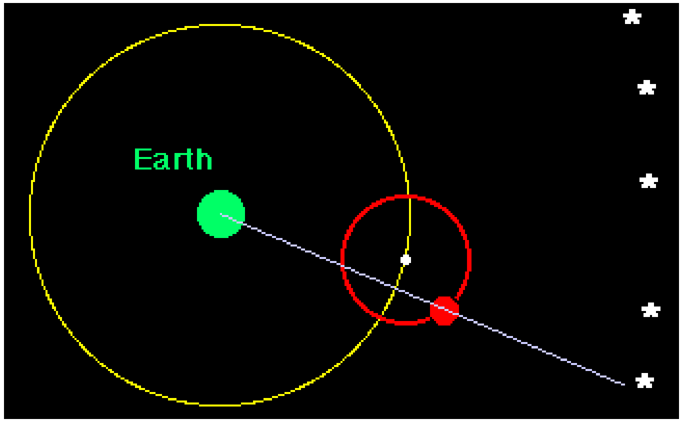


1.- De los filósofos griegos a Kepler.

A pesar de lo complicado de su modelo, mediante la técnica del epiciclo-deferente, cuya invención se atribuye a Apolonio de Pérgamo, trató de resolver con bastante éxito los dos grandes problemas del movimiento planetario:

- la retrogradación de los planetas y su aumento de brillo, mientras retrogradan.
- la distinta duración de las revoluciones siderales.





1.- De los filósofos griegos a Kepler.

Aun cuando desarrolló una teoría geocéntrica muy sofisticada, lo que él intentaba explicar era porqué los planetas se mueven tan irregularmente a lo largo de la eclíptica.

En su modelo introdujo las órbitas circulares con epiciclos, ya que los antiguos griegos consideraban que el círculo era la forma geométrica perfecta, por lo que la Naturaleza debía tener un comportamiento basado en círculos.

La base de su teoría era lo que hoy llamamos: un modelo científico.

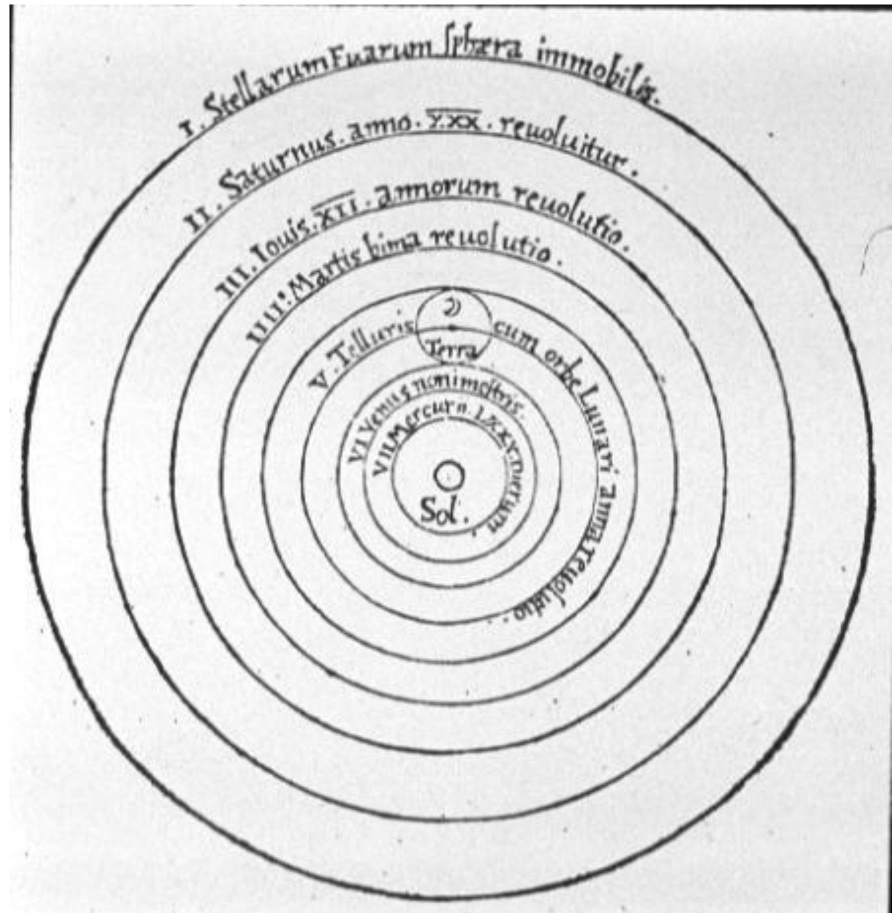
1.- De los filósofos griegos a Kepler.

El astrónomo polaco Nicolás Copérnico (1473-1543) es considerado el fundador de la Astronomía moderna al proponer un modelo más simple de Universo: el modelo Heliocéntrico.

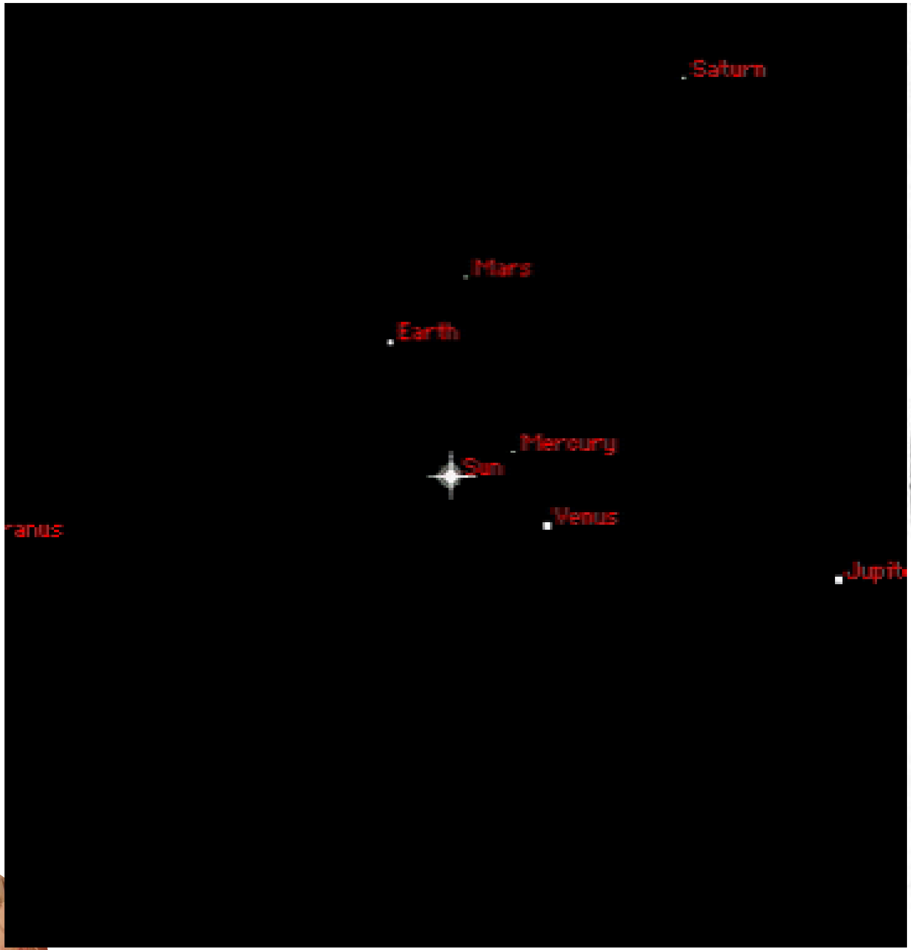
Su teoría es publicada, por un impresor de Nuremberg llamado Johann Petreius, poco antes de su muerte bajo el nombre de "*De revolutionibus orbium caelestium*", comúnmente conocido como *De revolutionibus.*

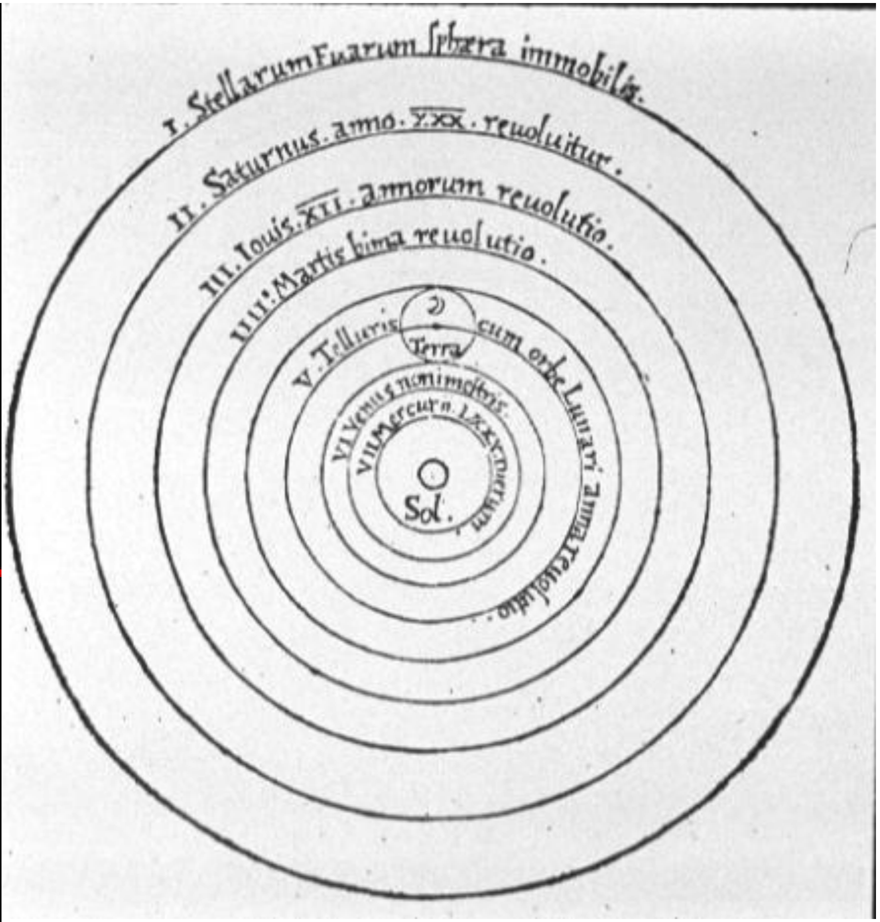
I.- De los filósofos griegos a Kepler.

El modelo simplificado de Copérnico explicaba de manera muy sencilla el comportamiento observado de los planetas y estrellas.



1.- De los filósofos griegos a Kepler.





1.- De los filósofos griegos a Kepler.

Es interesante mencionar que el impresor Petrius fue supervisado por Andreas Osiander, un teólogo luterano especializado en la impresión de textos matemáticos, el cual decidió insertar un prólogo en el que se advertía que las conclusiones a las que se llegaban no pretendían ser ciertas, y que se presentaban simplemente para demostrar una forma simple de calcular las posiciones de cuerpos pesados.

De alguna manera, se buscaba que la concepción geocéntrica, acorde a los intereses de la iglesia, permaneciera como una verdad absoluta.

1.- De los filósofos griegos a Kepler.

Posterior a la publicación de la obra de Copérnico, un astrónomo Danés, Tycho Brahe (1546-1601) quiso determinar cómo estaban construidos los cielos, así que desarrolló un programa para precisar las posiciones de estrellas y planetas, pasando mas de 20 años haciendo observaciones detalladas del firmamento a simple vista y usando sólo un gran sextante y un compás.

Cediendo, al morir, sus anotaciones al astrónomo alemán Johannes Keppler (1571-1630), el cual era su estudiante y ayudante de observaciones, para que este intentara entender y explicar las trayectorias de los distintos objetos celestes observados.

1.- De los filósofos griegos a Kepler.

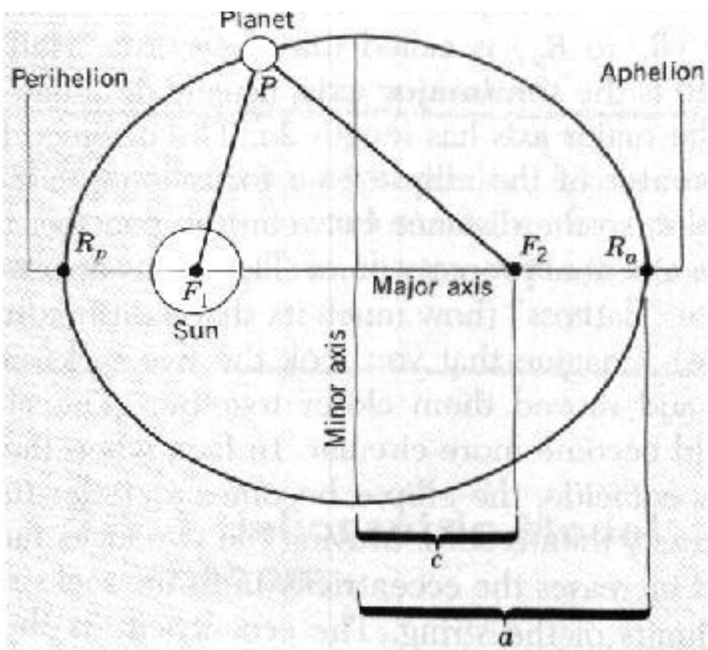
Kepler pasó mucho tiempo (cerca de 20 años) intentando explicar el movimiento de los planetas con un modelo de órbita circular, hasta que probó con un modelo elíptico para la órbita de Marte encontró la concordancia entre los datos y el modelo.

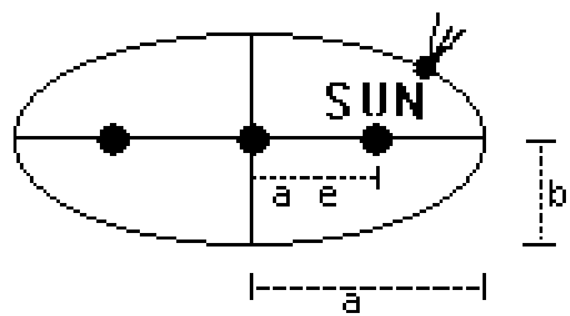
El modelo propuesto por Kepler se fundamente en tres enunciados que resultan fundamentales para la astronomía, y que reciben el nombre de "Leyes de Kepler"

I.- De los filósofos griegos a Kepler.

Las Leyes de Kepler se enuncian como sigue:

Un planeta orbita al Sol en una trayectoria elíptica con el Sol en uno de sus focos. (Primera Ley de Kepler)

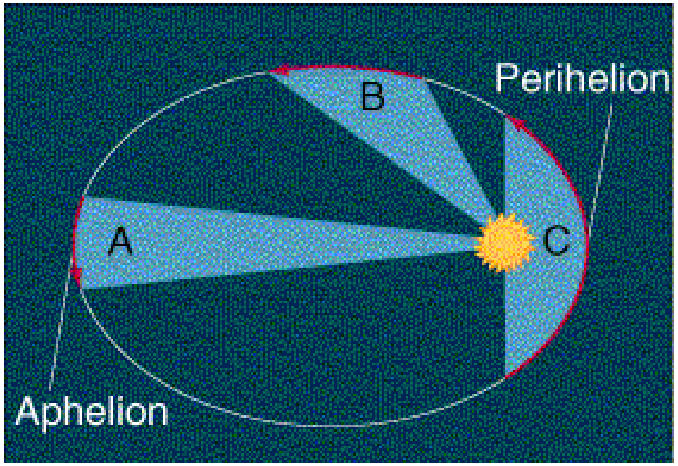


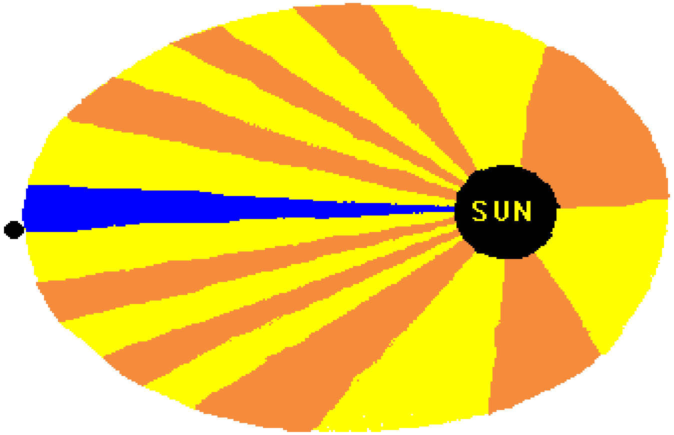


I.- De los filósofos griegos a Kepler.

Las Leyes de Kepler se enuncian como sigue:

Un rayo dirigido del Sol a un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales. (Segunda Ley de Kepler)

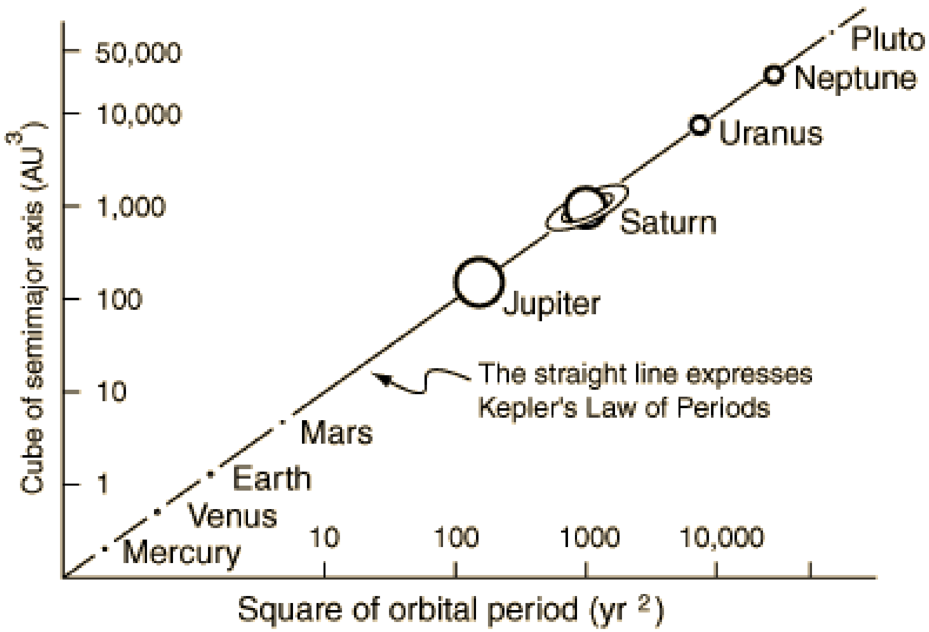




1.- De los filósofos griegos a Kepler.

Las Leyes de Kepler se enuncian como sigue:

El cuadrado del periodo de la órbita de un planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de dicho planeta; la constante de proporcionalidad es la misma para todos los planetas. (Tercera Ley de Kepler)

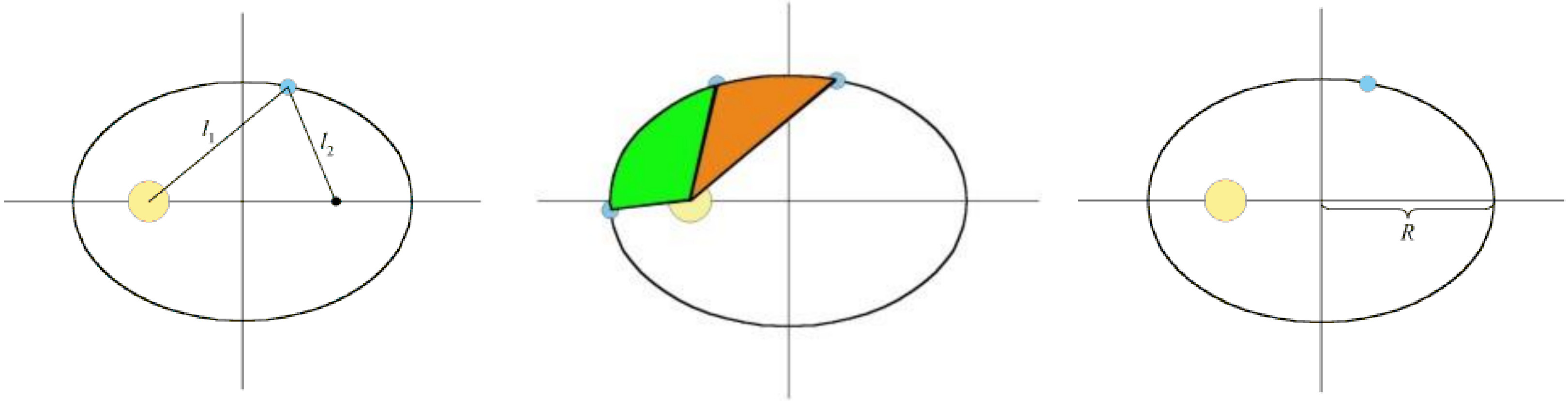


$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) a^3$$

I.- De los filósofos griegos a Kepler.

Resumiendo las Leyes de Kepler tenemos:

1. Los planetas se mueven en órbitas elípticas.
2. Los radio vectores de los planetas barren áreas iguales en tiempos iguales.
3. El cuadrado del periodo de un planeta es proporcional al cubo de su semieje mayor.



http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/kepler.html

2.- Ley de la gravitación universal de Newton.

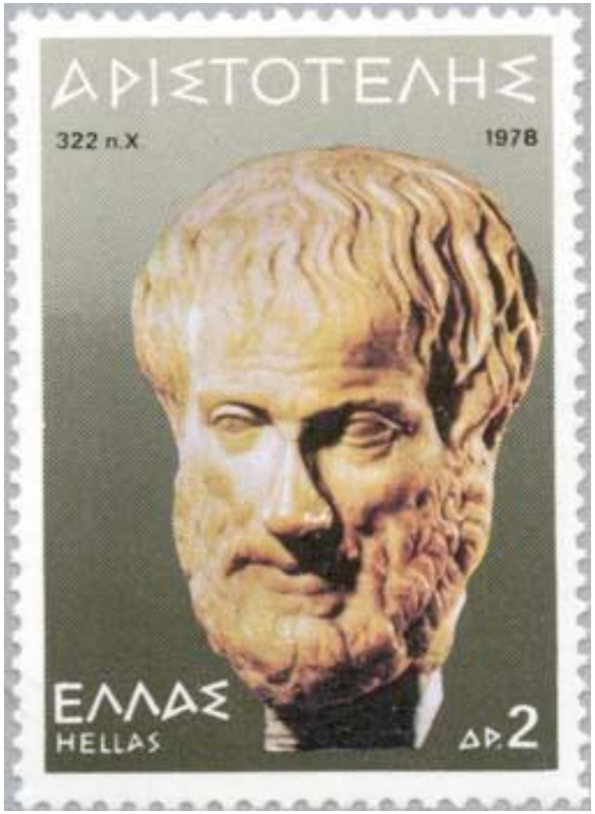
¿Por qué caen los cuerpos?

Intuición más simple: Algo los "atrae" hacia abajo!

... ¿pero qué es ese "algo"?

Aristóteles (alrededor de 330AC)

- Cuerpos "desean" estar en el piso!
- Universo: 4 elementos.
- Elementos ocupan un lugar natural en el Universo.
- Cuerpo hecho de elementos tiende a su lugar natural.
- Cuerpos "graves" hechos de Tierra tienden a moverse hacia abajo!



2.- Ley de la gravitación universal de Newton.

Una teoría intuitiva sobre el movimiento y sus causas:

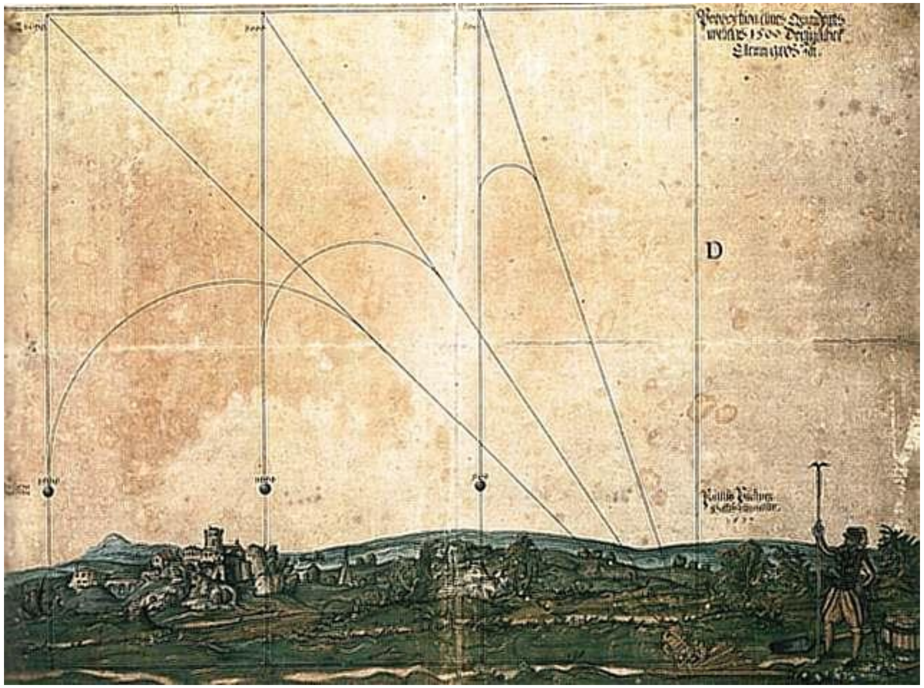
Existen 2 tipos de causas: natural y violenta

- Natural: tendencia a estar en el lugar que ocupa en el Universo.
- Violenta: inducida por el hombre

Movimiento de los "graves"

- (velocidad) = (peso) / (resistencia)
- Los cuerpos pesados caen más rápido

¿Y cómo es el movimiento de un proyectil?

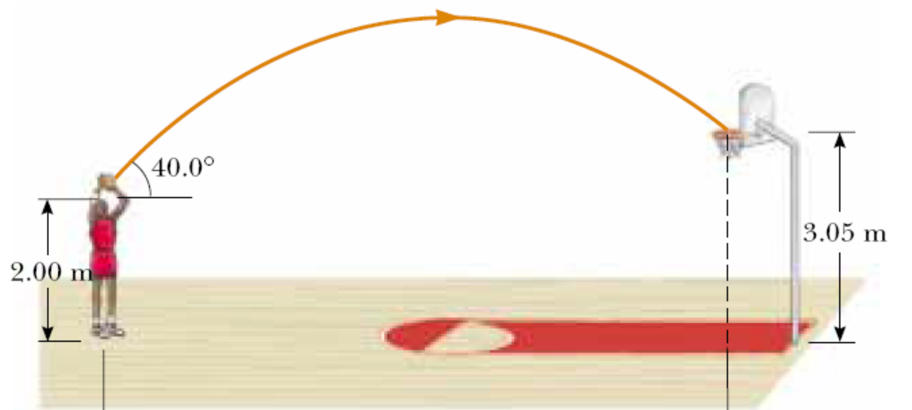


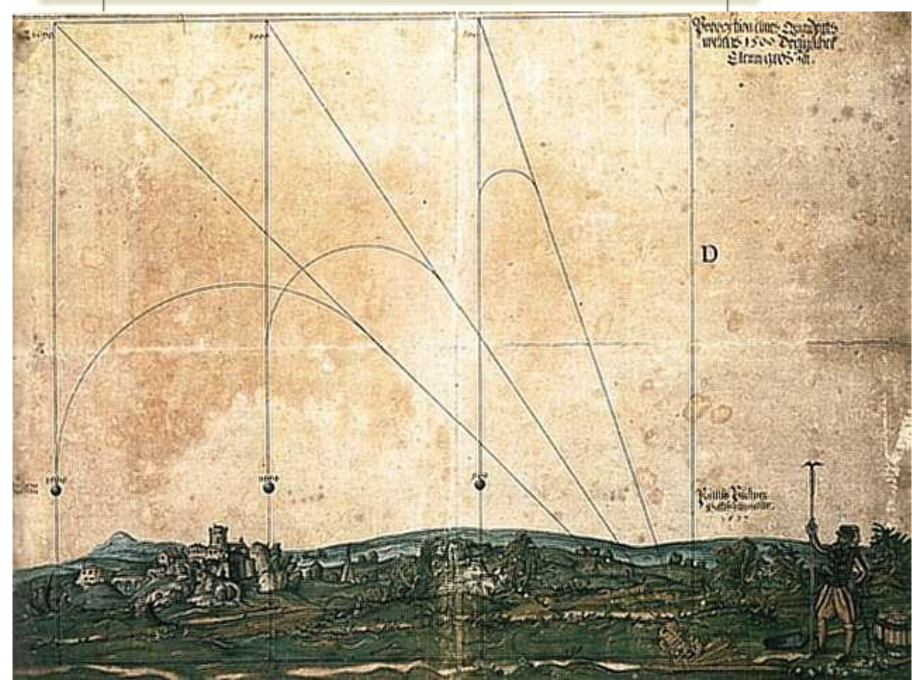
2. Ley de la gravitación universal de Newton.

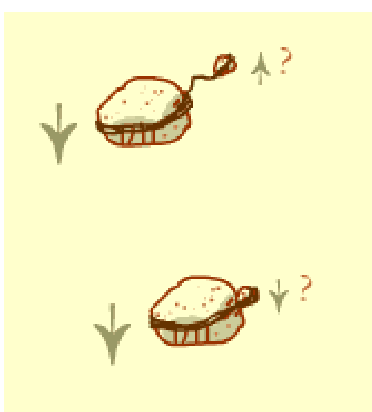
¿Problemas?

Así no parecen moverse los balones de baloncesto!

- Composición del mundo es muy compleja!
- ¿Movimiento en el vacío? ¿distinto peso distintos tiempos?





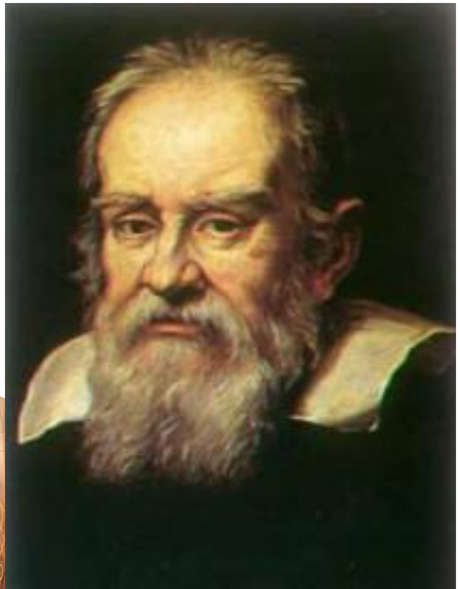


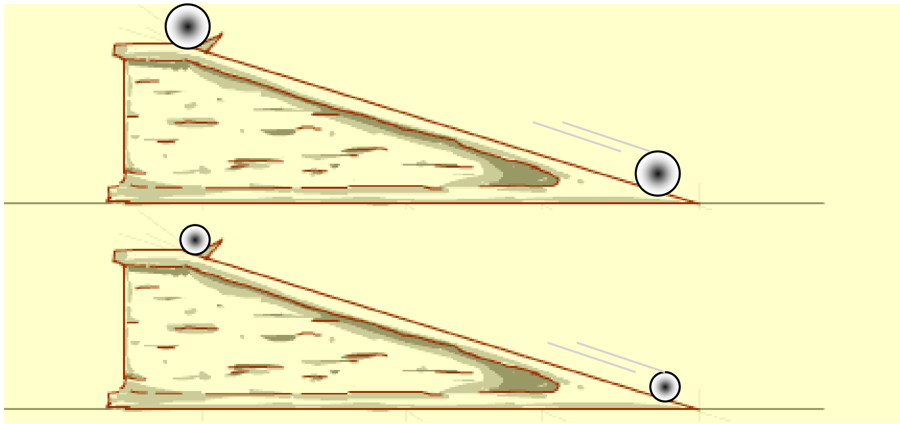
2: Ley de la gravitación universal de Newton.

Tal vez debamos primero estudiar <u>cómo</u> caen los cuerpos

Galileo Galilei (1564-1642):

- ¿caen cuerpos de distinto peso en tiempos distintos?
- Consultemos a la realidad...



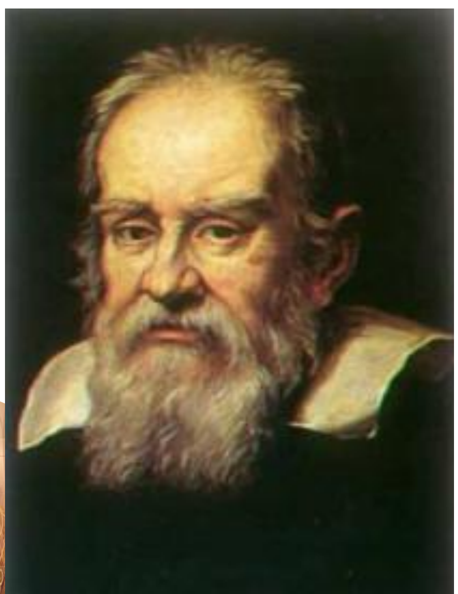


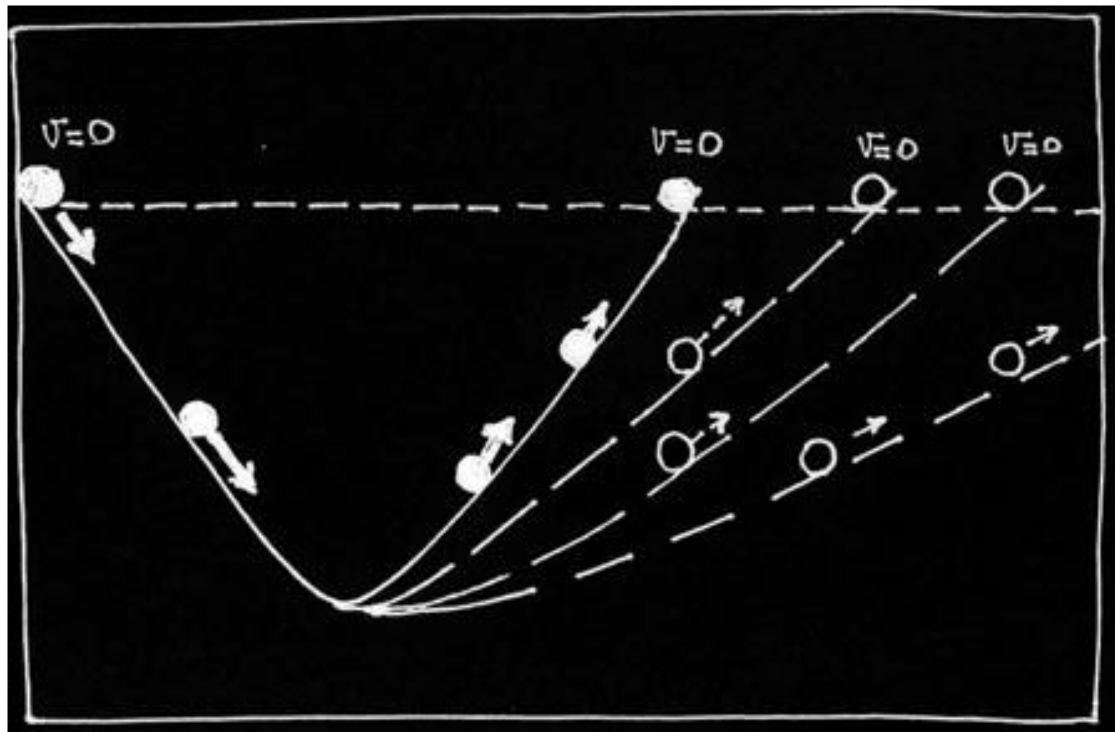
2. Ley de la gravitación universal de Newton.

Conclusiones de Galileo:

➢ Todos los cuerpos (despreciando el efecto retardador del aire) caen en tiempos iguales!

➢ Otra interesante conclusión ...





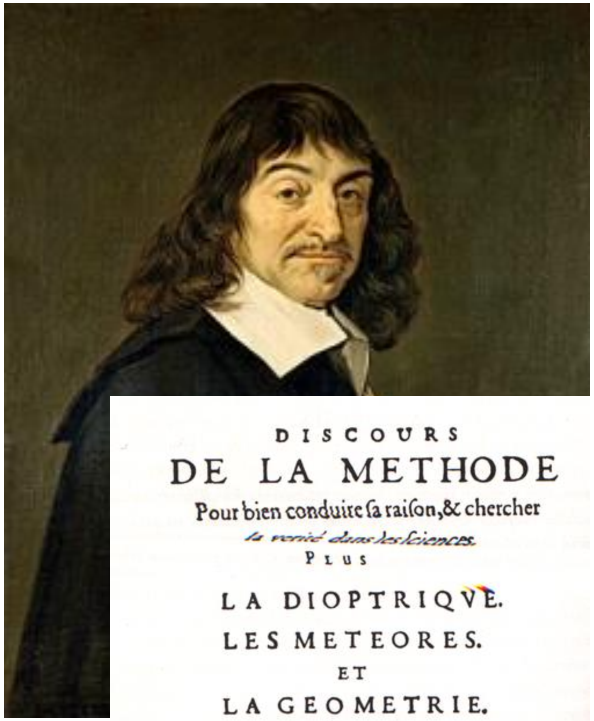
2.- Ley de la gravitación universal de Newton.

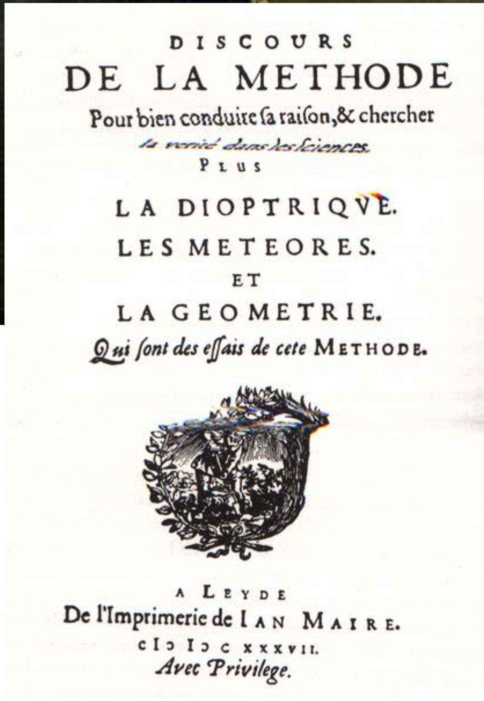
Pero retornemos a la pregunta de ¿por qué caen?...

Una explicación alternativa...

René Descartes (1596-1650). Escribe que:

- El Universo está lleno de Éter!
- El movimiento de los cuerpos en el éter produce remolinos”...
- Los remolinos “empujan” a los cuerpos (planetas, manzanas) y los hacen moverse!

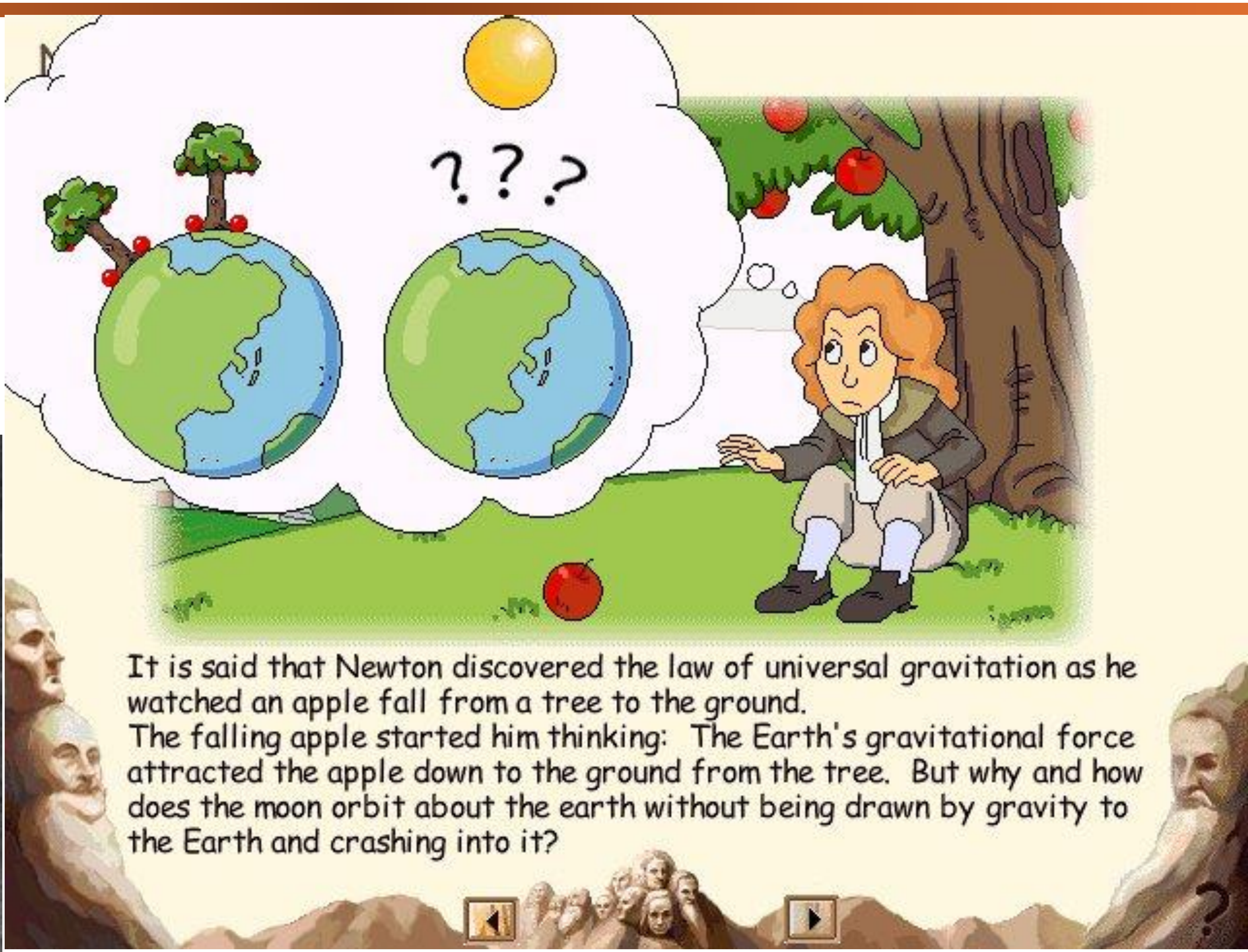




DISCOVRS
DE LA METHODE
Pour bien conduire ſa raiſon, & chercher
la verité dans les ſciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui ſont des eſſais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIↃ IↃ C XXXVII.
Avec Privilege.

2.- Ley de la gravitación universal de Newton.



2. Ley de la gravitación universal de Newton.

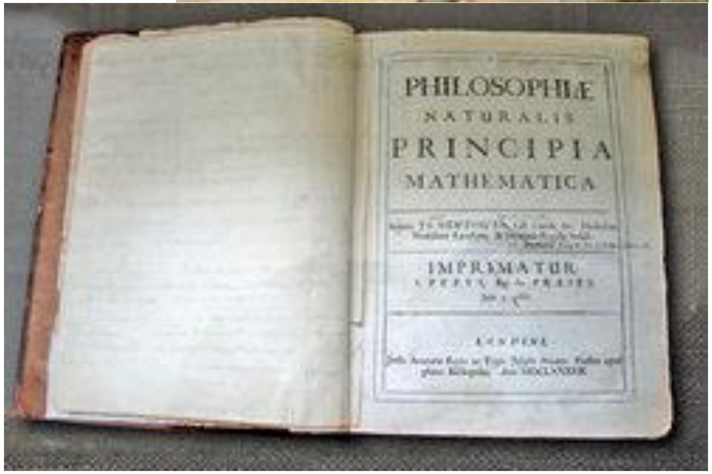
La respuesta parece todavía esquiva...

... Casi 2,000 años después de Aristóteles una respuesta clara y acertada parece estar fuera del alcance!

Sir Isaac Newton (1642-1727) ...

... organicemos un poco las ideas disponibles!

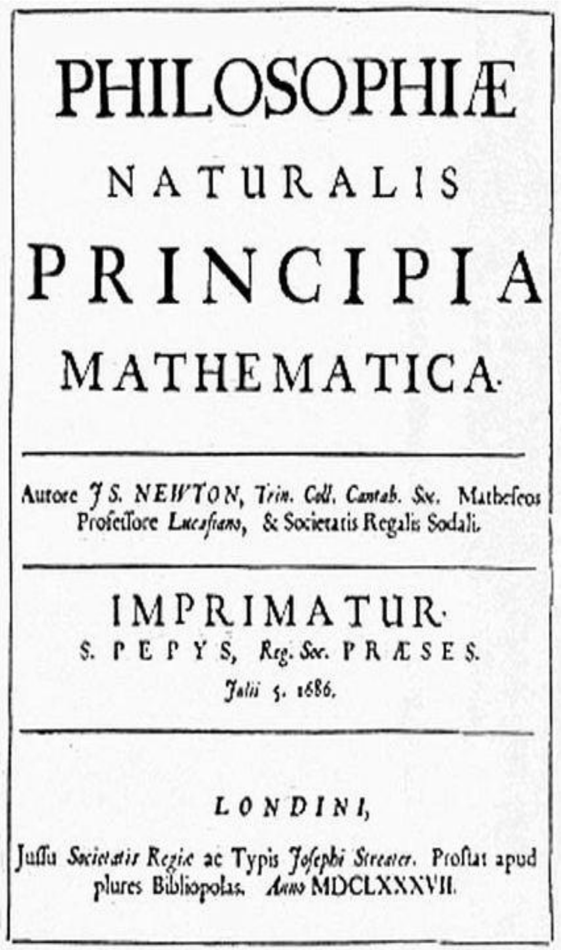
Primero es necesario entender cabalmente cómo "funciona" el movimiento! ...



"Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" (1687)

2.- Ley de la gravitación universal de Newton.

En 1687, Newton publica en su "Principia Matemática" las leyes del movimiento (y que actualmente conocemos como Leyes de Newton):



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA

Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

- Ley de Inercia (Galileo, Descartes)
- Ley de fuerza…

  … una "fuerza" cambia el estado de movimiento (dirección y rapidez) de tal forma que

  (cambio de estado movimiento) = (Fuerza) / (masa)

- Ley de acción-reacción

2.- Ley de la gravitación universal de Newton.

¿y la caída de los cuerpos?...

Si el cuerpo está inicialmente en reposo ...

... entonces la caída debe ser producida por una "fuerza"!

Características de esa fuerza (de gravedad):

Para producir el mismo movimiento en cuerpos de distinta masa debe ser tal que …

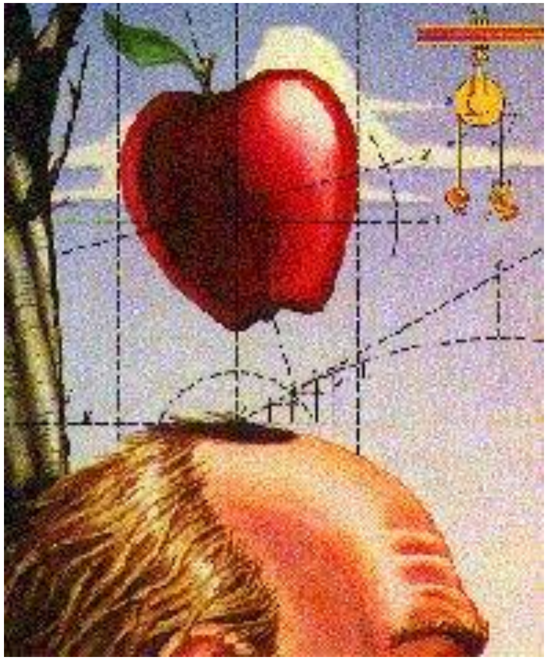
(fuerza de gravedad) ~ (masa)

Además … no es una fuerza de contacto...

... ya que la Tierra ejerce esta fuerza sin tocar las cosas!

"Newton habría descubierto la ley de gravitación Universal anticipadamente si William Tell no hubiera intervenido"

2.- Ley de la gravitación universal de Newton.



¿Por qué todas las cosas que rodean la Tierra caen sobre ella y la Luna no?

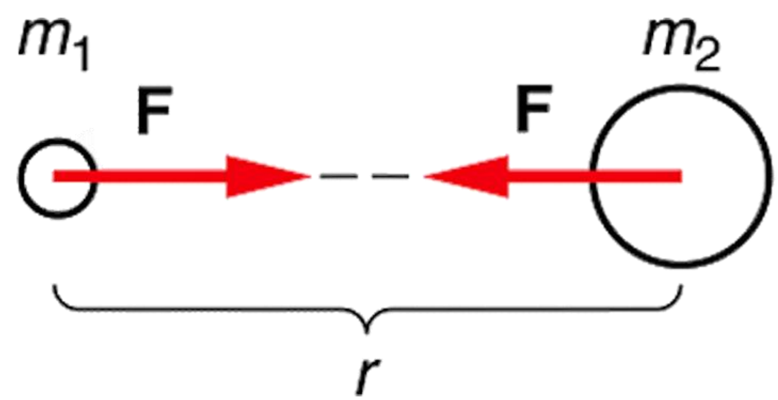
Para responder esta pregunta, Newton analizó los datos astronómicos del movimiento de la Luna alrededor de la Tierra que existían en ese momento.

A partir de este análisis, llego a la audaz conclusión de que la ley de la fuerza que gobierna el movimiento de los planetas era la misma que la ley de la fuerza que atrae una manzana que cae hacia la tierra.

Esta fue la primera vez en que se unificaron los movimientos de la tierra y del cielo.

2.- Ley de la gravitación universal de Newton.

El resultado anterior se conoce como la ley de la gravitación universal de Newton, la cual establece que "cada partícula en el Universo atrae a otra partícula con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas".



Matemáticamente escribimos

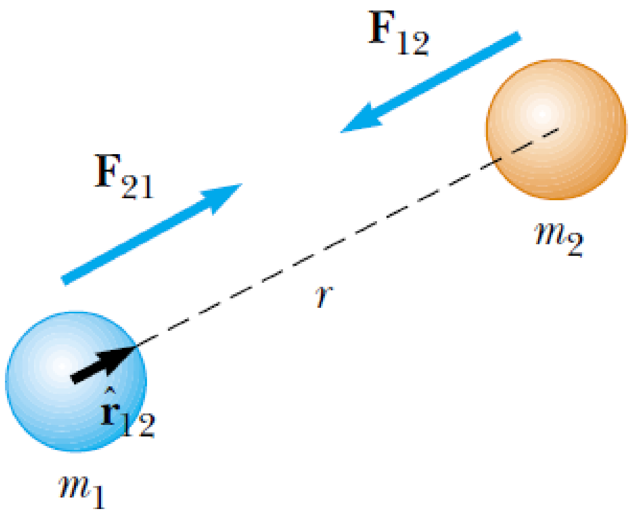
$$F = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

donde G es la *constante de gravitación universal*.

Experimentalmente se ha medido el valor de G, encontrándose que $G = 6.673\text{x}10^{-11}$ N m^2/kg^2.

2.- Ley de la gravitación universal de Newton.

La ley de la gravitación universal puede expresarse en forma vectorial definiendo un vector unitario $\boldsymbol{r}_{12}$, dirigido de la partícula 1 a la partícula 2, como se muestra.



Con esta definición, la fuerza de gravitación universal ejercida por la partícula 1 sobre la partícula 2 es

$$\mathbf{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{12}$$

donde el signo "menos" indica que la partícula 2 es atraída hacia la partícula 1.

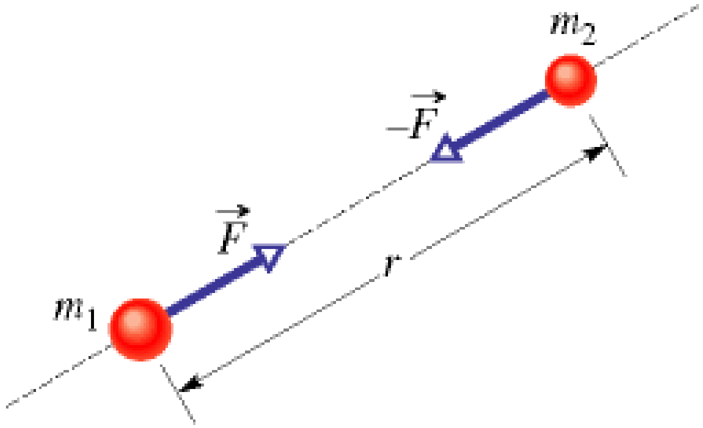
Por tercera ley de Newton, la fuerza ejercida por la partícula 2 sobre la 1, denominada $\mathbf{F}_{21}$ es igual en magnitud a $\mathbf{F}_{12}$, pero en sentido opuesto.

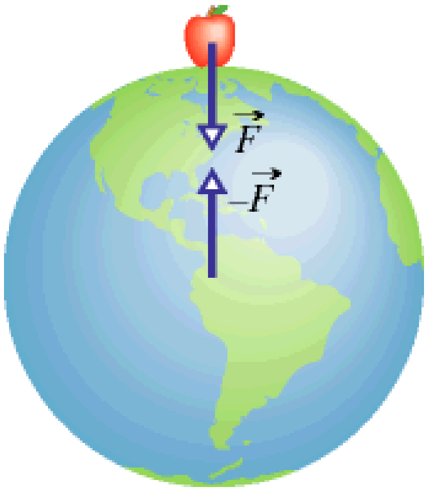
2. Ley de la gravitación universal de Newton.

Resumiendo, la magnitud de la fuerza gravitacional está dada por

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$G = 6.673 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$$





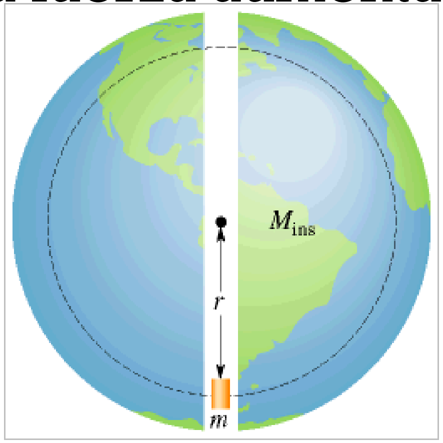
El *teorema del cascarón* establece que "un cascarón esférico de masa atrae a una partícula que está afuera como si toda la masa del cascarón estuviese en su centro".

2.- Ley de la gravitación universal de Newton.

La segunda parte del *teorema del cascarón* establece que:

- La fuerza neta de un cascarón sobre una masa que está dentro del cascarón es cero.
- Dentro de la tierra (que no es un cascarón) se siente el efecto sólo de las capas que están más cerca del centro.

Si la tierra tuviese densidad uniforme, la fuerza neta disminuiría mientras descendemos al centro. Eso casi pasa así pero la tierra no tiene densidad uniforme así que al principio la fuerza aumenta un poco para luego disminuir.

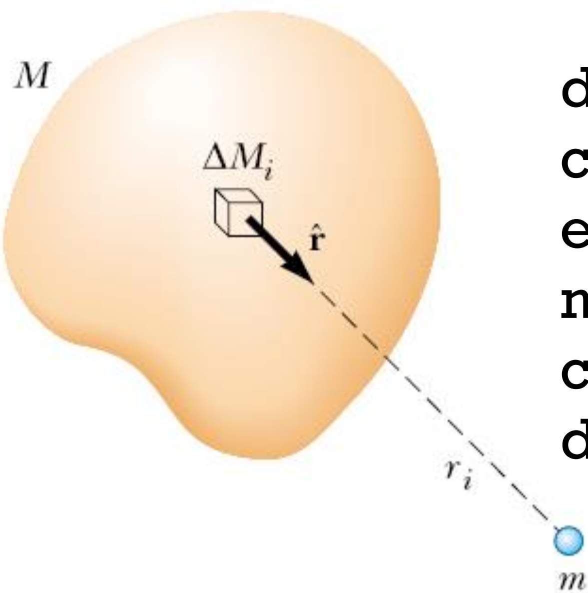


Es importante mencionar que los *teoremas del cascarón* surgen del hecho de que la fuerza es proporcional a $(1/r^2)$.

2.- Ley de la gravitación universal de Newton.

Hasta este punto hemos considerado la interacción entre dos partículas o entre una partícula y una distribución esférica de masa, la pregunta que cabe hacernos es ¿cómo se puede calcular la fuerza entre una partícula y un cuerpo extendido?

Para responder esta pregunta consideremos el esquema mostrado a continuación.



Tratando al cuerpo como una colección de partículas de masa ΔM_i, podemos calcular la fuerza gravitacional ΔF ejercida por dicho elemento sobre la masa m ubicada a una distancia r_i, y a continuación calcular la integral sobre la distribución completa, a saber

$$\mathbf{F}_g = -Gm\int \frac{dM}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

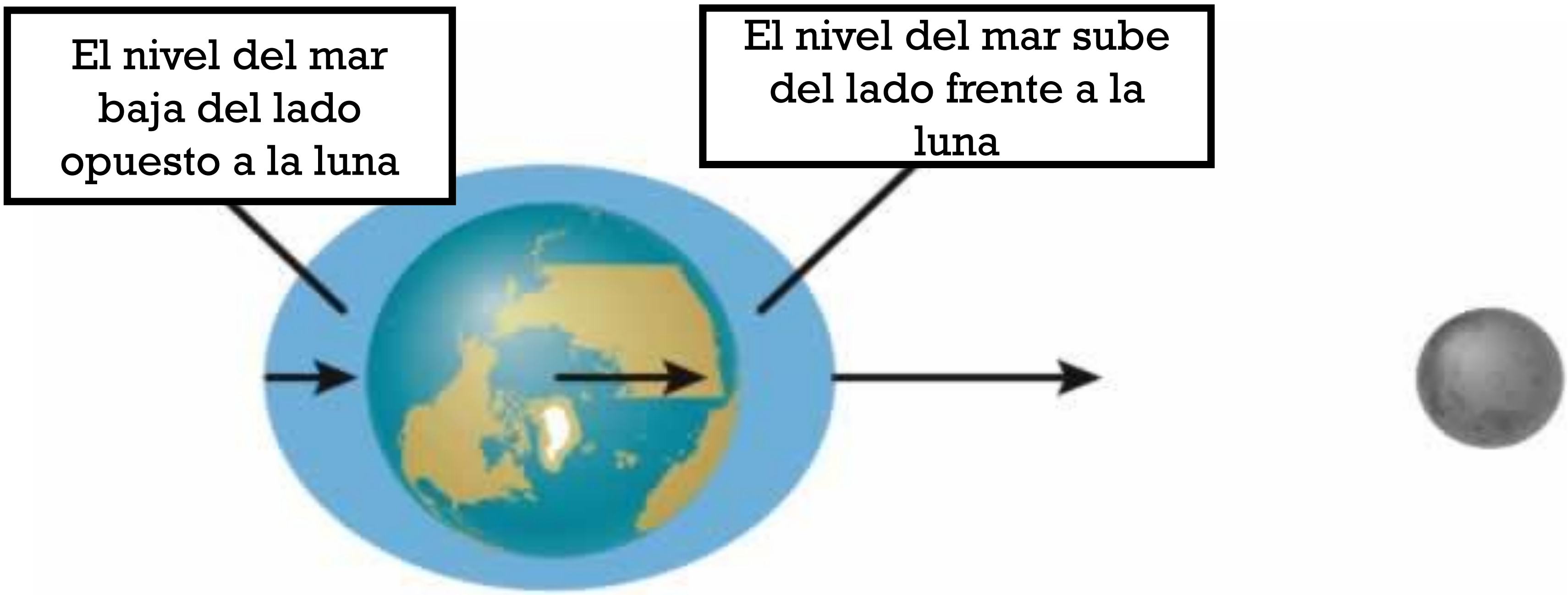
2.- Ley de la gravitación universal de Newton.

Algunos aspectos importantes, relacionados con la Ley de la Gravitación Universal de Newton son los siguientes:

- Newton encontró que las primeras dos leyes de Kepler se aplican no sólo a los planetas, sino a cualquier objeto que se encuentre en la vecindad de otro bajo el efecto de la fuerza de gravedad.
- Las órbitas no requieren ser elípticas, también pueden ser parabólica o hiperbólicas.
- En 1781 fue descubierto el planeta Urano; observaciones subsecuentes mostraron algunas irregularidades en la trayectoria descrita, lo que llevó a que en 1845 John Couch Adams predijera, basado en la Ley de la Gravitación, la existencia de un planeta no observado: Neptuno, el cual fue descubierto por astrónomos de Berlín la noche del 23 de Septiembre de 1846.

2.- Ley de la gravitación universal de Newton. Las mareas.

Las mareas son producidas por la atracción gravitacional existente entre la tierra y la luna.



El esquema NO está a escala. El movimiento del agua origina una variación de los océanos de aproximadamente 2 metros.

2.- Ley de la gravitación universal de Newton. Un ejemplo.

Usando el hecho que $g = 9.80 m/s^2$ en la superficie terrestre, encuentre la densidad promedio de la tierra.

A partir de que la aceleración gravitacional es

$$g = G\frac{M_T}{R_T^{\,2}} = 6.67\times10^{-11}\frac{M_T}{R_T^{\,2}}$$

Tenemos que la masa de la tierra es

$$M_T = \frac{R_T^{\,2} g}{G}$$

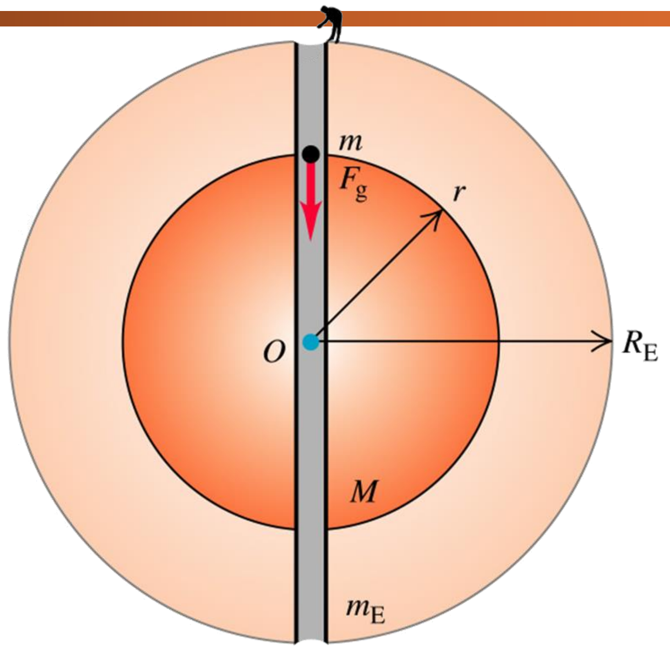
Así que la densidad de la tierra es

$$\rho = \frac{M_T}{V_T} = \frac{\frac{R_T^{\,2} g}{G}}{\frac{4\pi}{3} R_T^{\,3}} = \frac{3g}{4\pi G R_T}$$

$$\rho = \frac{3\times9.80}{4\pi\times6.67\times10^{-11}\times6.37\times10^{6}} = \boxed{5.50\times10^{3} kg/m^{3}}$$

2.- Ley de la gravitación universal de Newton. Cayendo a través de la tierra.

Considera que un objeto de masa m se deja caer a través de un túnel que atraviesa la tierra, supuesta con densidad uniforme. ¿Cuál es la ecuación de movimiento del objeto?



Aplicando la Segunda Ley se tiene

$$a = \frac{d^2r}{dt^2} = -G\frac{M(<r)}{r^2}$$

donde la masa contenida en la esfera de radio r es

$$M(<r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

Por lo que $\boxed{\dfrac{d^2r}{dt^2} = -kr}$ donde hemos considerado $k = \dfrac{4}{3}G\pi\rho$

La ecuación resultante corresponde a un oscilador armónico

2.- Ley de la gravitación universal de Newton. Otro ejemplo.

Aceleración de caída libre y fuerza gravitacional

Considerando que la fuerza ejercida sobre una partícula de masa *m* es *mg* en la superficie de la tierra, uno obtiene

$$mg = G\frac{M_T m}{R_T^2}$$

$$g = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

Con ello, ¿cuál sería la aceleración gravitacional si el objeto se ubica a una altura *h* sobre la superficie terrestre?

$$F_g = mg' = G\frac{M_T m}{r^2} = G\frac{M_T m}{\left(R_T + h\right)^2}$$

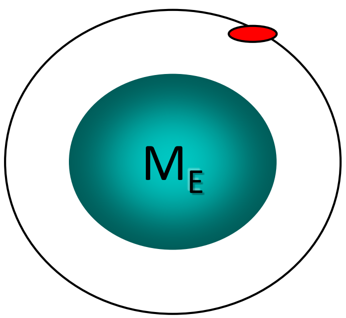
$$g' = G\frac{M_T}{\left(R_T + h\right)^2}$$

A partir de este resultado, ¿qué podemos concluir con relación a la aceleración gravitacional?

- **La aceleración gravitacional es independiente de la masa del objeto.**
- **La aceleración gravitacional decrece conforme se incrementa la altitud.**
- **Si la altura *h* crece extremadamente grande, el peso del objeto tiende a 0.**

2.- Ley de la gravitación universal de Newton. Otro ejemplo.

La estación espacial internacional (EEI) está diseñada para operar a una altitud de 350km. Cuando esté terminada tendrá un peso (medido en la superficie terrestre) de 4.22×10^6N. ¿Cuál será su peso en su órbita estacionaria?



El peso total de la EEI en la superficie terrestre es

$$F_{GT} = mg = G\frac{M_T m}{R_T^{\ 2}} = 4.22\times 10^6\,N$$

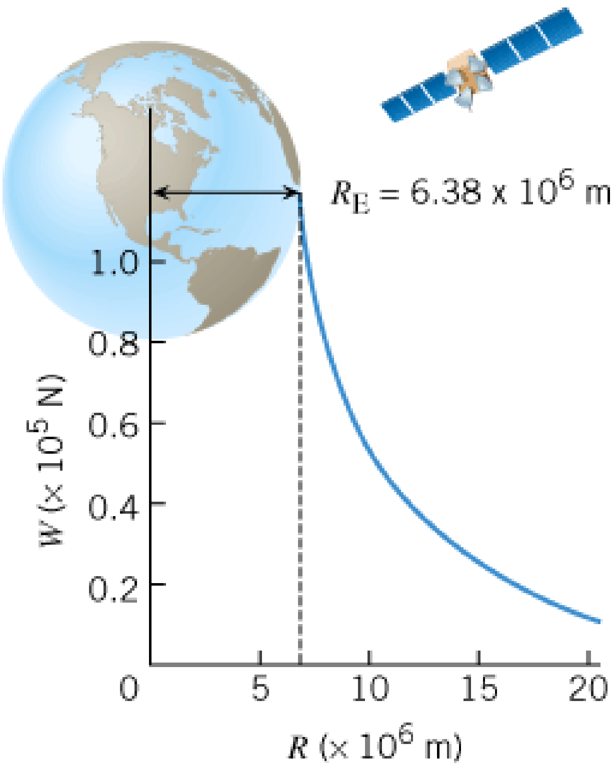
Dado que la órbita está a 350km sobre la superficie terrestre, la fuerza gravitacional a esa altura es

$$F_{GE} = mg' = G\frac{M_T m}{(R_T + h)^2} = \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2}F_{GT}$$

Por lo tanto, el peso en la altura de la órbita es

$$F_{GE} = \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2}F_{GT} = \frac{(6.37\times 10^6)^2}{(6.37\times 10^6 + 3.50\times 10^5)^2}\times 4.22\times 10^6 = 3.80\times 10^6\,N$$

2.- Ley de la gravitación universal de Newton. Un ejercicio rápido.



La masa del telescopio espacial "Hubble" es de 11600kg. Determine el peso del telescopio

(a) cuando se encontraba en la tierra; y

(b) ahora que se ubica en su órbita a 598km por encima de la superficie terrestre.

3.- Medida de la constante G. El experimento de Cavendish.

Para determinar el valor de la constante gravitacional universal G debemos medir la fuerza gravitatoria entre 2 cuerpos de masas conocidas m_1 y m_2 a una distancia conocida r.

La fuerza es muy pequeña para cuerpos que caben en un laboratorio, sin embargo su medición se logró en un importante experimento realizado por Henry Cavendish (1731-1810) en 1798.

Para ello, Cavendish empleó un instrumento llamado *balanza de torsión*, cuyo aspecto se muestra en la fotografía.

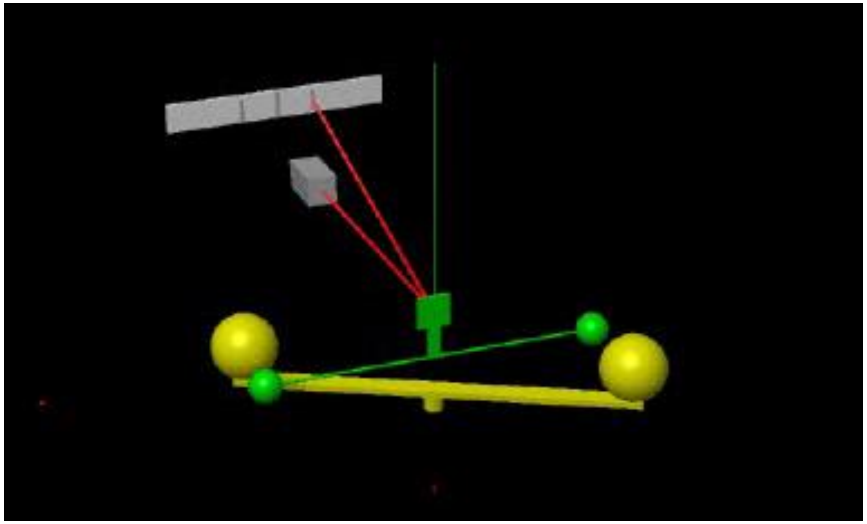
3.- Medida de la constante G. El experimento de Cavendish.

La balanza de torsión es un aparato sumamente sencillo inventado hacia 1783 por el filósofo inglés John Michell (1724-1793).

Básicamente, consiste de un soporte que se encuentra suspendido de un alambre, el cual a su vez está unido a un micrómetro de torsión. En este soporte se suspenden las muestras apropiadas, dependiendo del experimento. El aparato completo se encuentra encerrado en un recipiente con el fin de que no lo afecten las corrientes de aire.

Con la balanza de torsión se pueden hacer mediciones cuantitativas de fuerzas de atracción o repulsión entre las muestras e investigar su dependencia con las distancias entre los objetos que las ejercen.

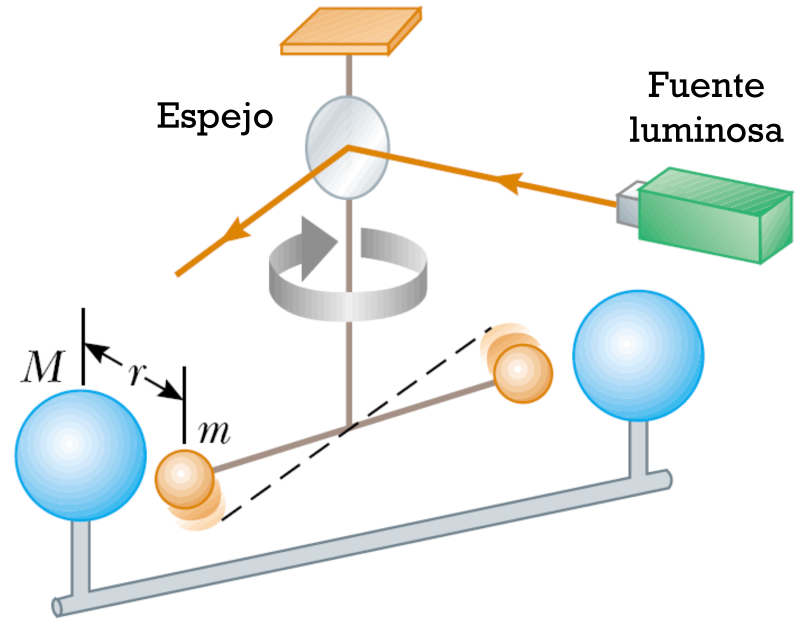
Hacia 1785, Coulomb empleó una balanza de torsión en sus experimentos con objetos cargados.



3.- Medida de la constante G. El experimento de Cavendish.

Esquema del Experimento de Cavendish.

La balanza de torsión utilizado en el experimento consistía de dos pequeñas esferas, cada una de masa m, fijas a los extremos de una ligera barra horizontal suspendida por un fino alambre metálico delgado.



Cuando dos grandes esferas, cada una de masa M, se colocan cerca de las esferas más pequeñas, la fuerza de atracción entre las esferas más pequeñas y las más grandes hace que la barra gire y tuerza el alambre de suspensión a una nueva orientación de equilibrio.

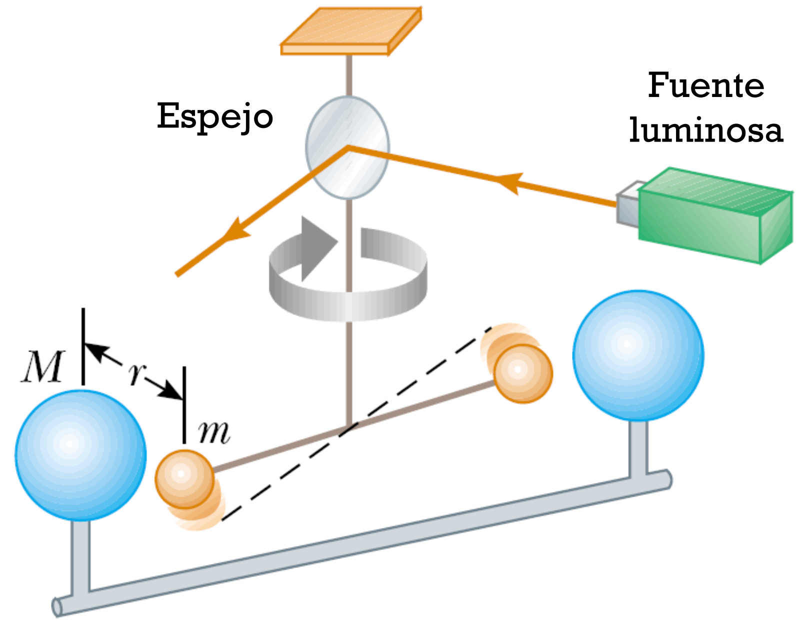
3.- Medida de la constante G. El experimento de Cavendish.

Esquema del Experimento de Cavendish.

El ángulo al cual gira la barra se mide por la desviación de un haz luminoso que se refleja en un espejo unido a la suspensión vertical.

La desviación de la luz es una técnica efectiva para amplificar el movimiento.

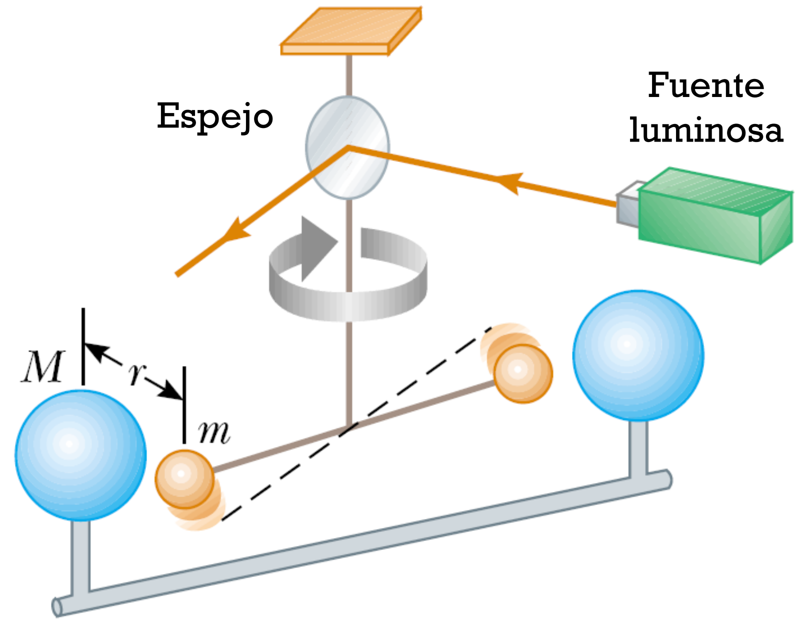
El experimento se repite con diferentes masas y distintas separaciones.



3.- Medida de la constante G. El experimento de Cavendish.

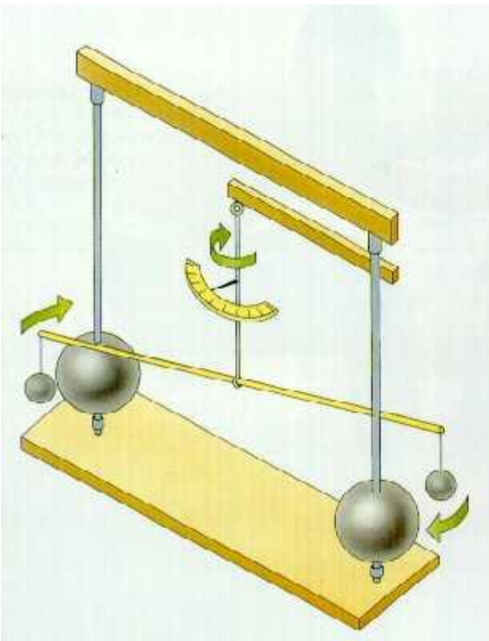
Esquema del Experimento de Cavendish.

Además de proporcionar el valor de G, los resultados muestran experimentalmente que la fuerza es atractiva, proporcional al producto Mm, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r.

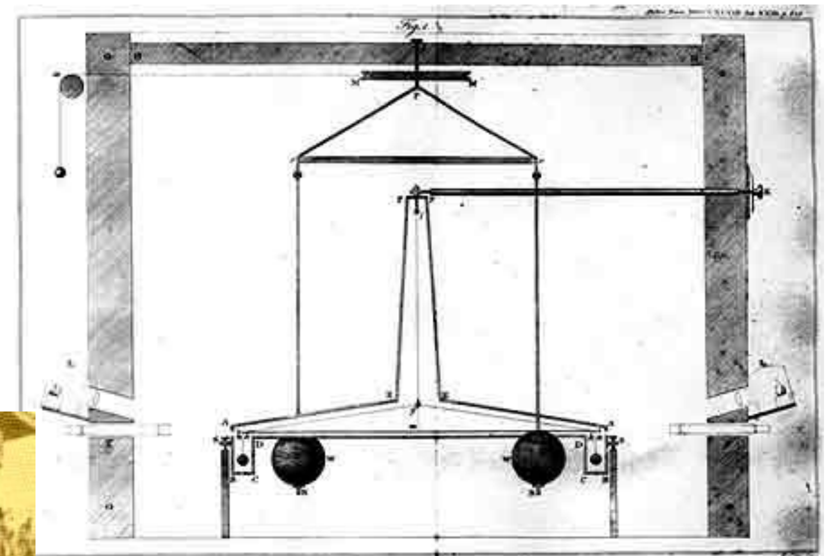


http://newton.cnice.mec.es/newton2/Newton_pre/escenas/camp_grav_elect/medidadeG.php

3.- Medida de la constante G. El experimento de Cavendish.



Esquemas adicionales del experimento de Cavendish



Una representación de Cavendish realizando su experimento

4.- Masa inercial y masa gravitatoria.

La segunda ley de Newton relaciona la fuerza que actúa sobre un cuerpo con su aceleración y con su masa inercial, que es como la llamamos. Podríamos decir, entonces, que la masa inercial representa una resistencia a cualquier fuerza.

En el contexto de la gravitación hemos tratado con la masa como una propiedad relacionada con la fuerza gravitacional, es decir, la masa como una cantidad que determina la intensidad de la fuerza gravitacional entre dos cuerpos. A esta la llamaremos masa gravitacional o gravitatoria.

No es obvio en absoluto que la masa inercial de un cuerpo sea igual a su masa gravitacional (la fuerza de gravedad podría haber dependido de una propiedad completamente diferente de un cuerpo, así como la fuerza eléctrica depende de una propiedad diferente llamada carga eléctrica).

4.- Masa inercial y masa gravitatoria.

Los experimentos de Newton y de Cavendish indicaron que los dos tipos de masa son iguales, y los experimentos modernos lo confirman con una precisión de 1 parte en 10^{12}.

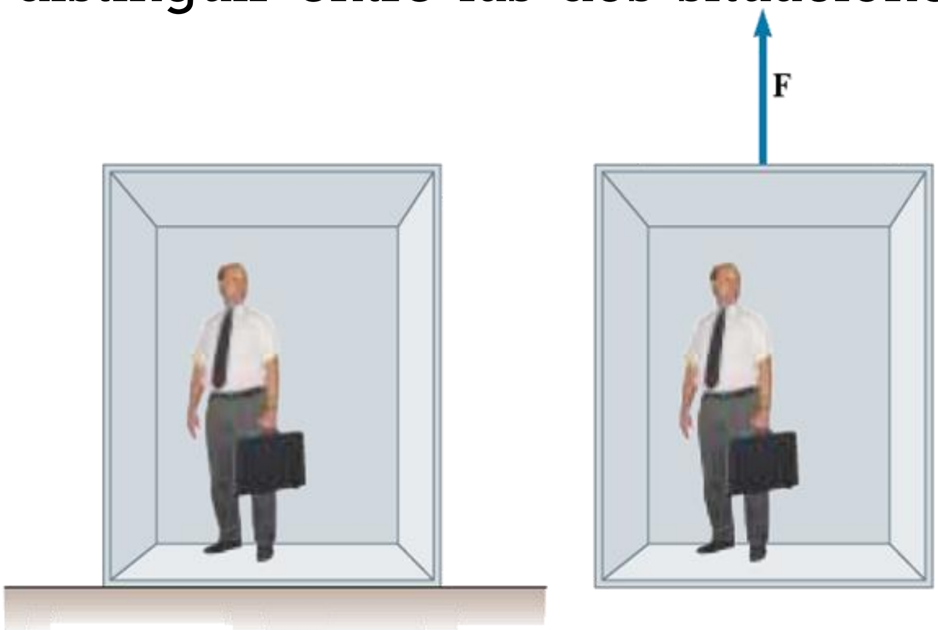
La evidencia experimental de que las masas inercial y gravitatoria son iguales (o por lo menos, proporcionales) es sorprendente, por lo que esta equivalencia fue elevada a un principio de la Naturaleza por Albert Einstein, y que llamó principio de equivalencia.

El principio de equivalencia fue usado por Einstein como base para su teoría general de la relatividad (1916), y el cual puede ser enunciado como:

> "no hay ningún experimento que los observadores puedan efectuar para distinguir si una aceleración surge de una fuerza gravitacional o porque su marco de referencia esté siendo acelerado"

4.- Masa inercial y masa gravitatoria.

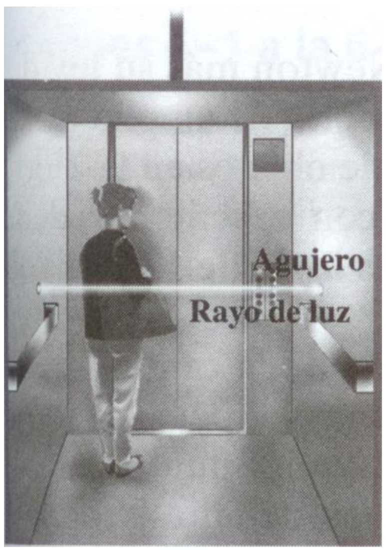
Con base en el principio de equivalencia, Einstein señaló que ningún experimento mecánico (como dejar caer una masa) podría distinguir entre las dos situaciones ilustradas a continuación.



En cada caso, si se soltase la maleta, esta caería con una aceleración g hacia abajo respecto al suelo (considerando que la fuerza F produce al sistema una aceleración g hacia arriba).

4.- Masa inercial y masa gravitatoria.

El principio de equivalencia puede usarse para mostrar que la luz debe deflexionarse debido a la fuerza de gravedad, para ello consideremos un experimento idealizado, en un elevador en el espacio libre donde no actúe la gravedad.



En un elevador detenido el rayo viaja en línea recta.

De acuerdo al principio de equivalencia, un marco de referencia acelerado es equivalente a un campo gravitacional dirigido hacia abajo, por lo que podemos considerar que la trayectoria curva de la luz es debida a un efecto gravitacional.

En 1916, Einstein predijo que la luz es afectada por la gravedad; en 1919, durante un eclipse de sol, se midió tal deflexión.

En un elevador acelerado el rayo se deflecta

5.- Energía potencial gravitatoria.

Antes de pasar al concepto de energía potencial gravitatoria, veamos cómo se explica la interacción a distancia entre dos cuerpos (o partículas).

Para responder a ello, usaremos el concepto de campo gravitacional que existe en cada punto del espacio, y que construiremos a continuación.

Cuando una partícula de masa *m* se sitúa en un punto donde el campo gravitacional es **g**, la partícula experimenta una fuerza $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$, es decir el campo ejerce una fuerza sobre la partícula.

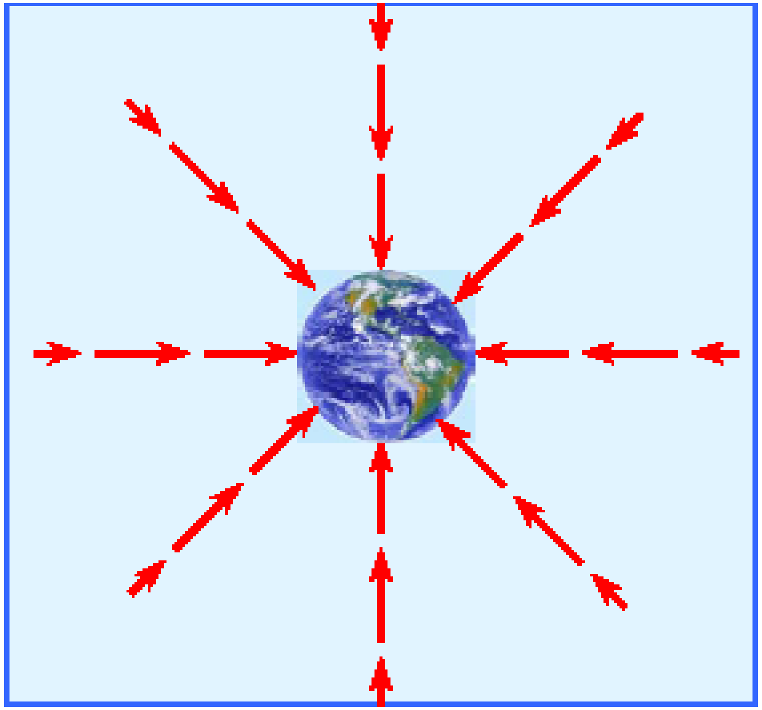
Con lo anterior, resulta conveniente definir el campo gravitacional **g**, como

$$\boxed{\mathbf{g} \equiv \frac{\mathbf{F}_g}{m}}$$

donde *m* es la masa de lo que se conoce como partícula de prueba y que se toma como muy pequeña; de tal forma que su presencia NO modifique el campo gravitacional existente en el espacio.

5.- Energía potencial gravitatoria.

El concepto de campo gravitacional permite describir el "efecto" que cualquier objeto (por ejemplo, la Tierra) tiene sobre el espacio alrededor del mismo en términos de la fuerza que "podría" estar presente si un segundo objeto estuviese en algún lugar dentro de dicho espacio.



A manera de ejemplo, consideremos un objeto de masa m cerca de la superficie terrestre, a una distancia r.

Puesto que la fuerza gravitacional, en este caso, es

$$\vec{F}_g = -\frac{GM_T m}{r^2}\hat{r}$$

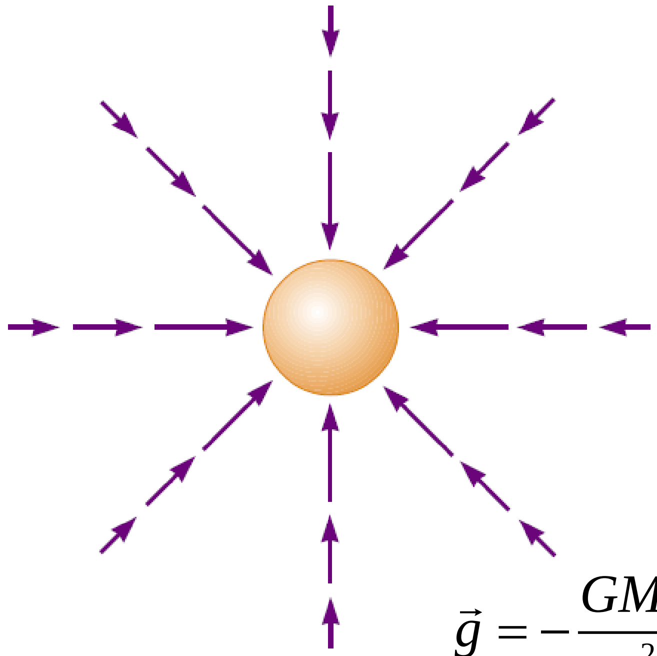
El campo **g** a una distancia r del centro de la Tierra es

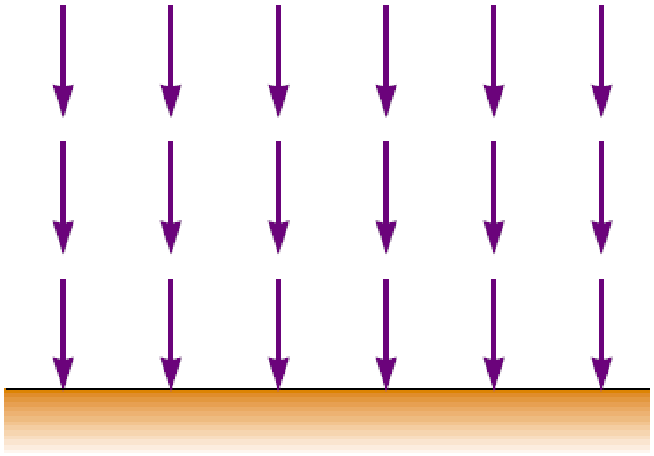
$$\vec{g} \equiv \frac{\vec{F}_g}{m} = -\frac{GM_T}{r^2}\hat{r}$$

5.- Energía potencial gravitatoria.

El campo gravitacional terrestre varía de punto a punto, tanto en magnitud (como función de la distancia), como en dirección (ya que esta es radial hacia el centro de la tierra).

Cerca de la superficie, el campo es aproximadamente constante, tanto en dirección, como en magnitud.

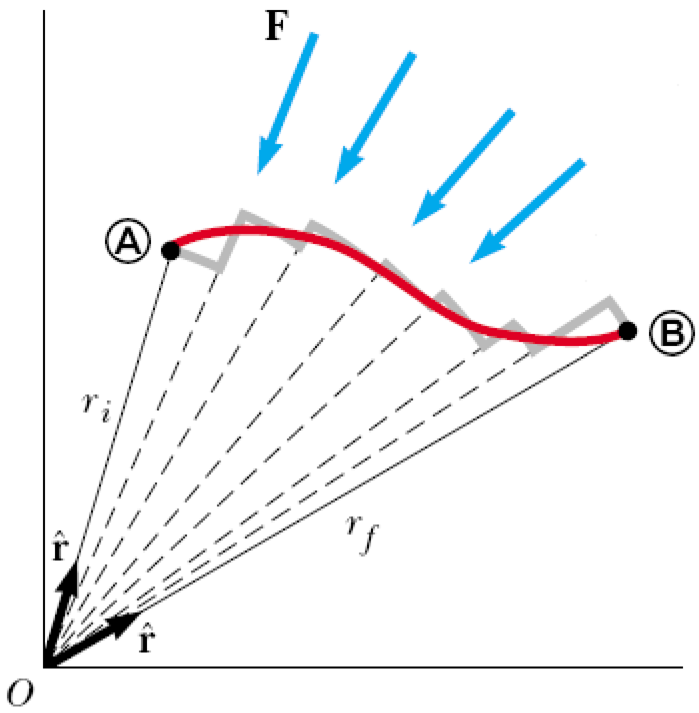




$$\vec{g} = -\frac{GM_T}{r^2}\hat{r} \quad \longrightarrow \quad \vec{g} \approx -\frac{GM_T}{R_T^2}\hat{j} \approx 9.80665\,{}^{m}\!/_{s^2}\left(-\hat{j}\right)$$

5.- Energía potencial gravitatoria.

Antes de calcular la forma general de la energía potencial gravitacional, mostremos que la fuerza gravitacional (y cualquier fuerza central) es conservativa, es decir, el trabajo que realiza sobre un objeto en movimiento es independiente de la trayectoria seguida.



Por definición, una fuerza central SIEMPRE está dirigida a lo largo de uno de los segmentos radiales ***r***, por lo que el trabajo realizado a la largo de cualquier segmento radial es

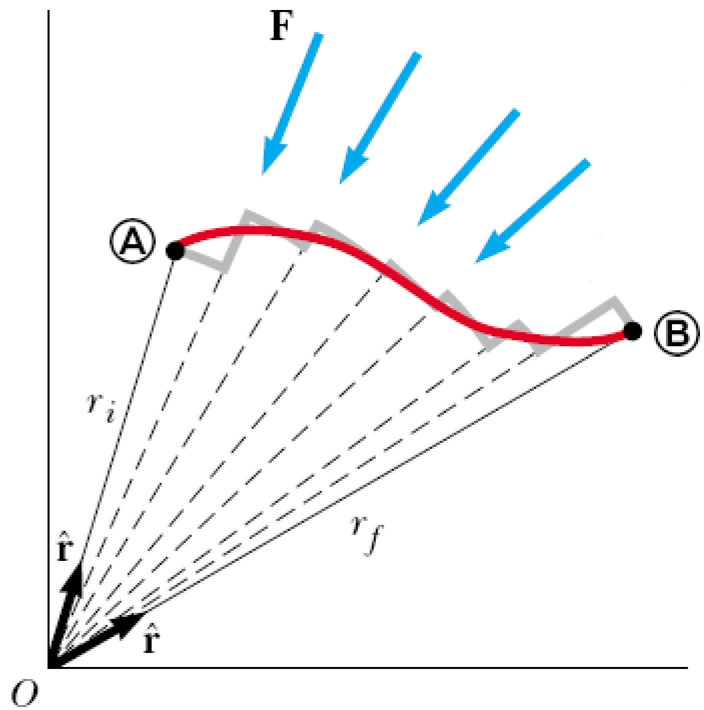
$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F(r)\ dr$$

Mientras que en los segmentos perpendiculares el trabajo es cero.

5.- Energía potencial gravitatoria.

Con lo anterior, el trabajo total es la suma de las contribuciones radiales, es decir

$$W = \int_{r_i}^{r_f} F(r)dr$$



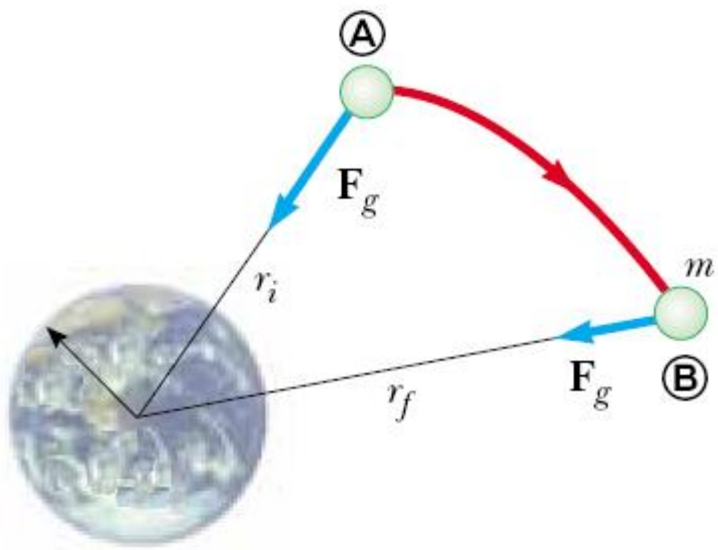
donde los subíndices r_i y r_f se refieren a las posiciones inicial y final, respectivamente.

Puesto que el integrando es sólo función de la posición radial r, esta integral depende sólo de los valores inicial y final del radio vector r, INDEPENDIENTEMENTE de la trayectoria seguida, lo que permite concluir que cualquier fuerza central es conservativa, y la gravitacional, en particular, también lo es.

5.- Energía potencial gravitatoria.

Si a continuación recordamos que el cambio de la energía potencial de un sistema corresponde al trabajo realizado SOBRE el sistema, tenemos que para el caso de la fuerza gravitacional

$$\Delta U_g = U_{gf} - U_{gi} = -\int_{r_i}^{r_f} F_g(r)dr$$



Considerando una partícula de masa m que va del punto A al punto B, podemos calcular el cambio de energía potencial gravitacional como

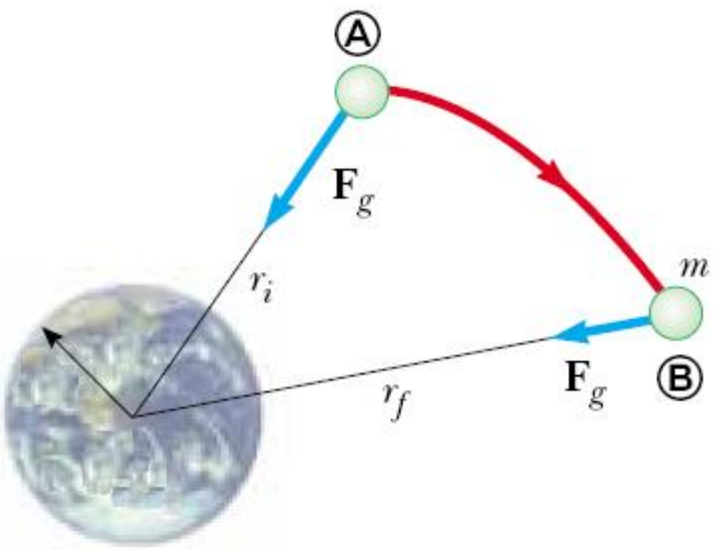
$$U_{gf} - U_{gi} = -\int_{r_i}^{r_f} \left(-\frac{GM_T m}{r^2} \right) dr$$

donde el signo "-" se debe a que se trata de una fuerza atractiva.

5.- Energía potencial gravitatoria.

Evaluando la integral, obtenemos que el cambio de energía potencial gravitatoria es

$$U_{gf} - U_{gi} = -GM_T m\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right)$$



Como la elección de origen para la energía potencial es arbitraria, es común tomar como el cero de la energía el punto donde la fuerza también es cero, lo que significa tomar

$$U_i = 0$$

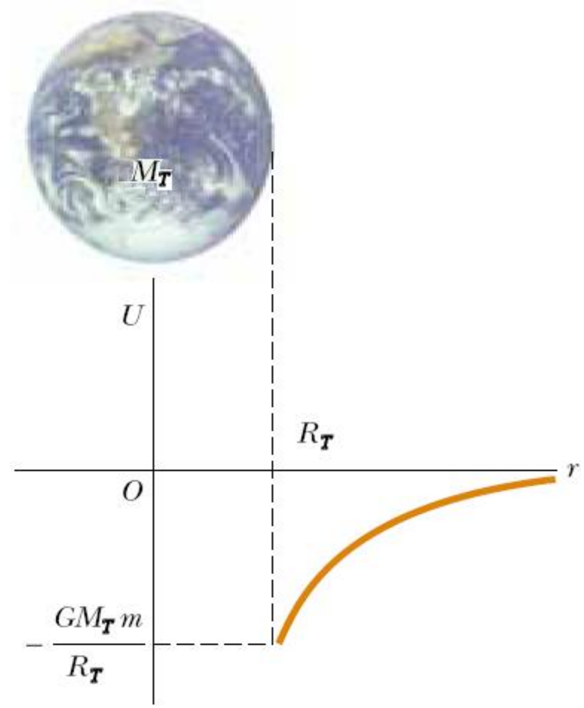
cuando

$$r_i = \infty$$

5.- Energía potencial gravitatoria.

Lo que nos lleva, finalmente, a la expresión para la energía potencial gravitacional

$$\boxed{U_g(r) = -\frac{GM_T m}{r}}$$



Esta expresión aplica para el sistema Tierra-partícula, cuando esta se encuentra a una distancia r ($>R_T$) medida desde el centro de la tierra. Debido a la forma en que fue obtenida, esta expresión NO aplica para posiciones dentro de la Tierra.

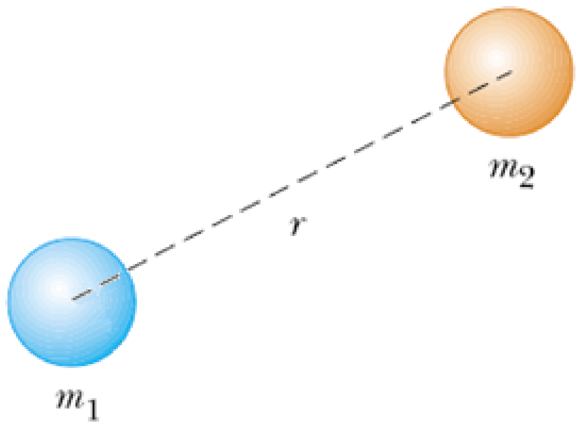
Finalmente, el signo "-" significa que esta siempre será negativa (debido a la forma en que elegimos r_i), con un comportamiento asintótico conforme r crece.

5.- Energía potencial gravitatoria.

Aunque la expresión anterior fue derivada para el sistema Tierra-partícula, esta puede aplicarse a un sistema de dos partículas de masas m_1 y m_2, separadas una distancia r, resultando ser

$$U_g(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

La expresión anterior muestra que la energía potencial entre dos partículas varía con el inverso de la distancia, mientras que la fuerza entre ellas varía con el inverso del cuadrado de la distancia; lo anterior tiene como consecuencia, que la energía potencial gravitacional decrezca menos rápido conforme crece la separación, comparada con la fuerza gravitacional.

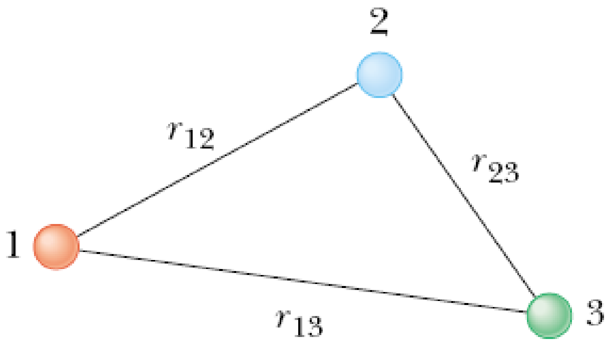


5.- Energía potencial gravitatoria.

Para terminar, es importante mencionar que si queremos calcular la energía potencial gravitacional de un sistema formado por más de dos partículas, será necesario aplicar el principio de superposición y calcular las energías potenciales asociadas con cada una de las parejas existentes en el sistema, y sumarlas para obtener la energía del sistema, a saber

$$\boxed{U_{Total} = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j>i}^{N} -\frac{Gm_i m_j}{r_{ij}}}$$

El valor absoluto de U_{Total} representa el trabajo requerido para separar completamente al sistema.



Por ejemplo, para un sistema de 3 partículas se tiene que

$$U_{Total} = U_{12} + U_{13} + U_{23}$$

5.- Energía potencial gravitatoria. Ejemplos.

1.- Un satélite de la tierra tiene una masa de 100kg y está a una altitud de $2.00x10^6$m. (a) ¿Cuál es la energía potencial del sistema satélite-Tierra? (b) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre el satélite? (c) ¿y la ejercida por el satélite sobre la Tierra?

(a) $U = - 4.77x10^9$ J

(b) F = 569 N

(c) F = 569 N

$R_T = 6.37x10^6$ m
$M_T = 5.98x10^{24}$ kg

5.- Energía potencial gravitatoria. Ejemplos.

2.- Se lanza, desde la superficie terrestre, un proyectil verticalmente hacia arriba con una rapidez de 10.0km/s. ¿Hasta qué altura subirá? Ignore la resistencia del aire y la rotación de la Tierra.

$h = 2.52 \times 10^{7}$ m

$R_T = 6.37 \times 10^{6}$ m

$M_T = 5.98 \times 10^{24}$ kg

5.- Energía potencial gravitatoria. Ejemplos.

3.- ¿Cuánto trabajo efectúa el campo gravitacional de la Luna sobre un meteoro de 1000kg que, viniendo del espacio exterior, impacta en la superficie lunar?

$W = 2.82x10^{9}$ J

$R_L = 1.74x10^{6}$ m

$M_L = 7.36x10^{22}$ kg

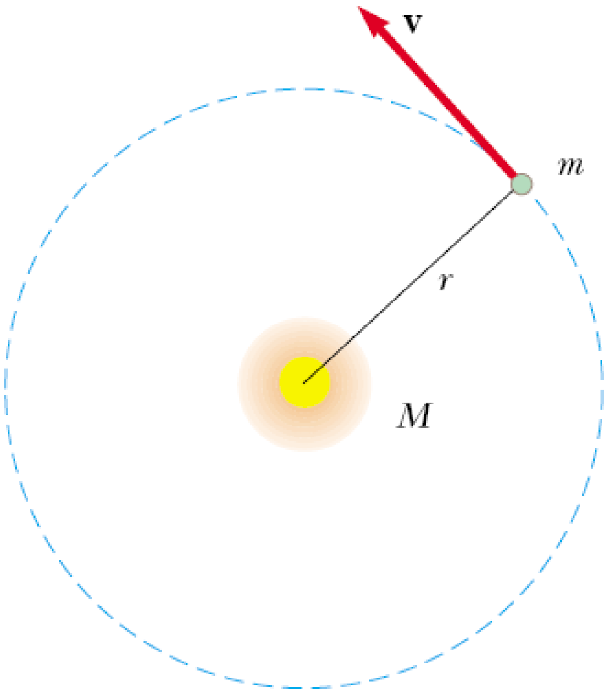
5.- Energía potencial gravitatoria. Ejemplos.

4.- Se suelta un objeto (a partir del reposo) desde una altura h sobre la superficie de la Tierra. (a) Muestre que su rapidez a una distancia r desde el centro de la Tierra, donde $R_T < r < R_T + h$, está dada por

$$v = \sqrt{2GM_T\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_T + h}\right)}$$

6.- Movimiento de planetas y satélites.

A continuación, considere un cuerpo de masa m que se mueve a una rapidez v cerca de un cuerpo de gran masa M donde $M >> m$. El sistema podría ser un planeta que se mueve alrededor del Sol.



Si supone que el cuerpo de masa M está en reposo en un marco de referencia inercial y la separación entre los cuerpos es r, entonces la energía mecánica total E del sistema de los dos cuerpos es la suma de la energía cinética del cuerpo de masa m más la energía potencial del sistema.

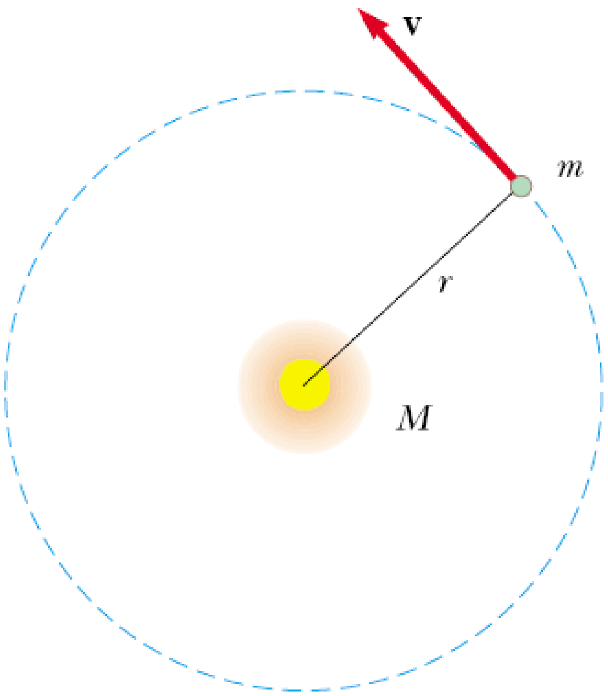
6.- Movimiento de planetas y satélites.

Considerando que los cuerpos estos están separados una distancia r, se tiene que

$$E = K + U$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r}}$$



De la expresión anterior, se puede ver que la energía E puede ser positiva, negativa o cero, dependiendo del valor de v.

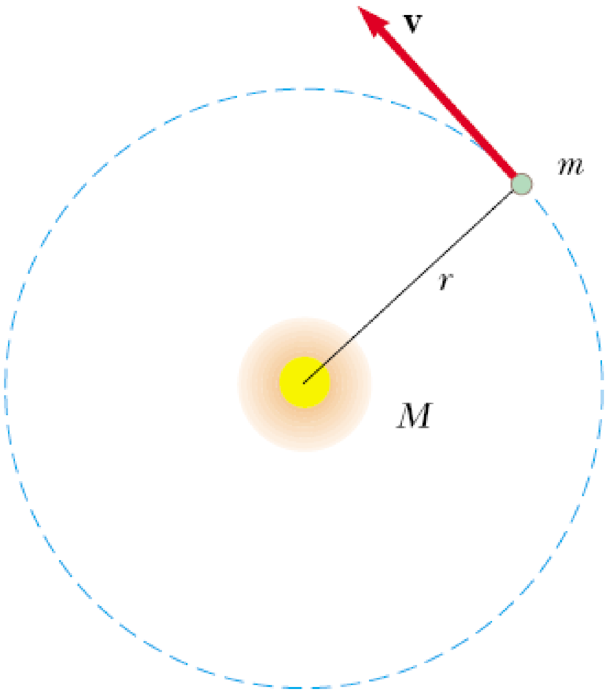
6.- Movimiento de planetas y satélites.

Por otro lado, si aplicamos la segunda ley de Newton al cuerpo de masa m, tenemos

$$F = \frac{GMm}{r^2} = ma_{cp} = m\frac{v^2}{r}$$

de donde

$$\frac{GM}{r} = v^2$$



Con lo anterior, la energía mecánica del sistema resulta ser

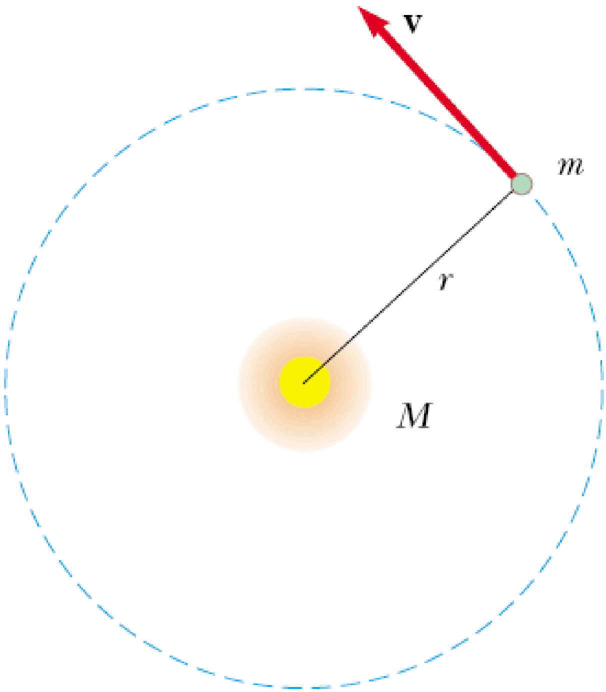
$$E = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} \rightarrow \boxed{E = -\frac{GMm}{2r}}$$

***E* resulta negativa para una órbita circular (movimiento acotado)**

6.- Movimiento de planetas y satélites.

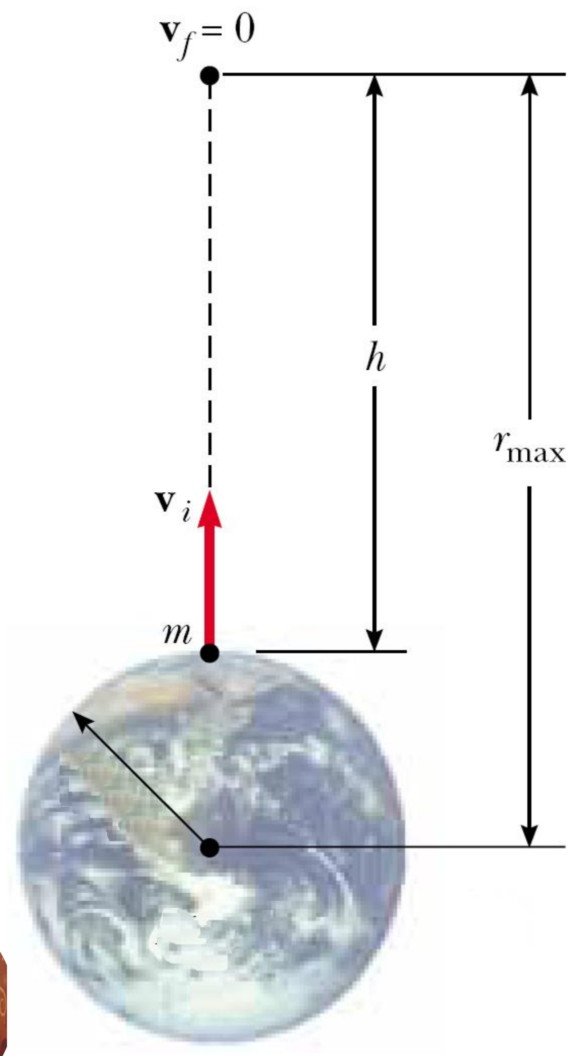
Con lo anterior, es importante notar que para un sistema aislado formado por dos cuerpos que se mueven bajo la acción de la fuerza gravitatoria mutua, se tienen dos constantes de movimiento:

- La energía mecánica total E; y
- El momento angular total L.



En cursos de mecánica más avanzados se mostrará (y demostrará) que lo anterior es cierto para cualquier fuerza central, donde la fuerza gravitacional es un caso particular.

6.- Movimiento de planetas y satélites.



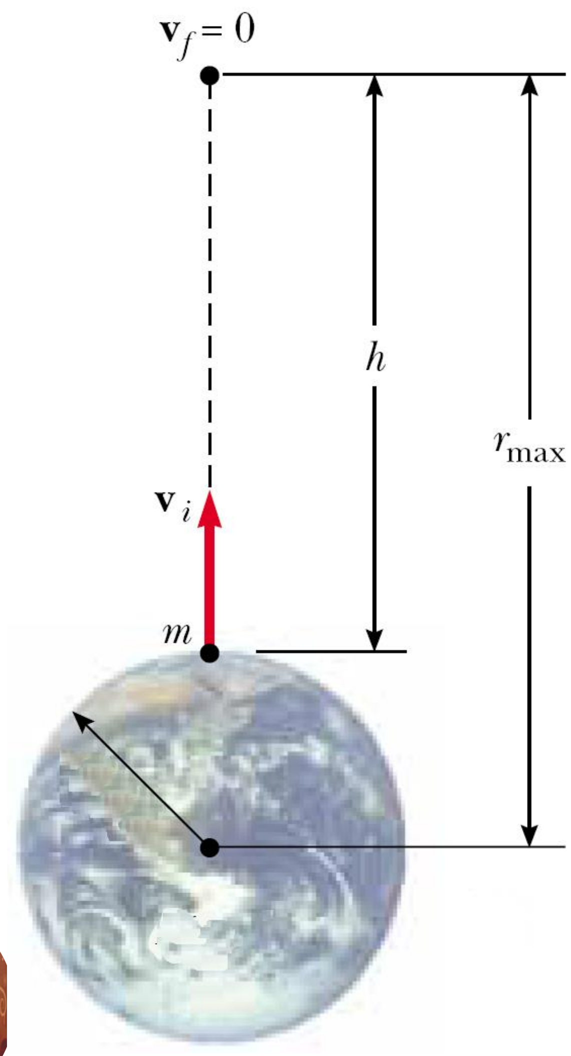
Ahora consideremos un objeto de masa m que se lanza verticalmente hacia arriba desde la superficie terrestre con una rapidez inicial v_i.

Aplicando el principio de conservación de la energía entre el punto de lanzamiento ($r = R_T$) y el punto donde se detiene ($r = r_{max}$) tenemos

$$\frac{mv_i^2}{2} - \frac{GM_T m}{R_T} = -\frac{GM_T m}{r_{max}}$$

Si conocemos la rapidez inicial v_i podemos calcular la altura h que alcanza, ya que $h = r_{max} - R_T$.

6.- Movimiento de planetas y satélites.



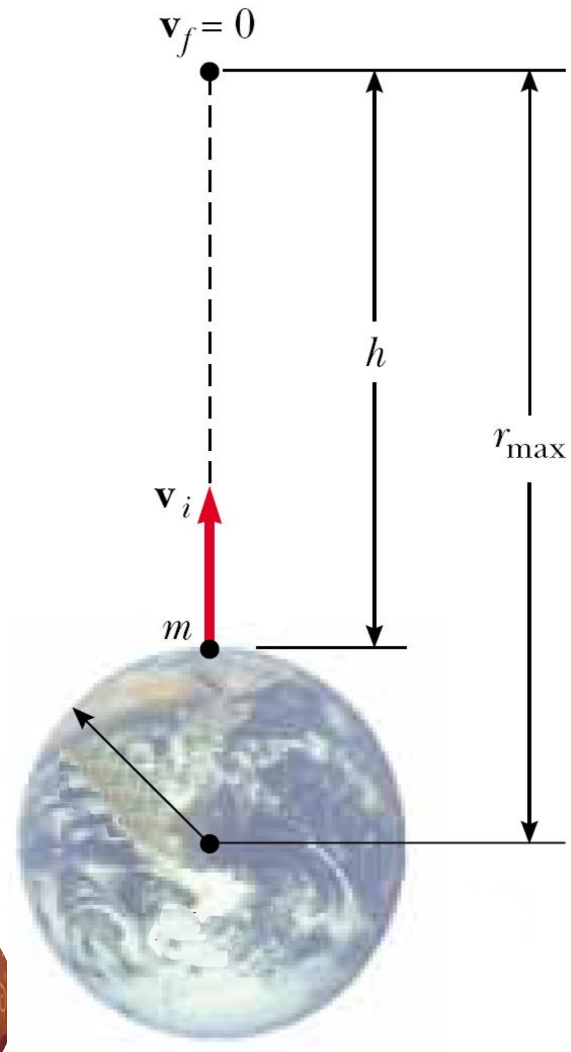
De manera similar podemos despejar la rapidez v_i de la expresión anterior, para obtener

$$v_i = \sqrt{2GM_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r_{max}}\right)}$$

A partir de la expresión anterior estamos en condiciones de calcular cuál es la rapidez mínima (v_{escape}) con que debemos lanzar el objeto para que escape a la atracción gravitacional ejercida por la Tierra, para lograrlo bastará tomar r_{max} como infinita, de tal forma que

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

6.- Movimiento de planetas y satélites.



Al viajar a esta rapidez mínima, el objeto continúa su movimiento cada vez mas lejos de la Tierra, al tiempo que su rapidez tiende asintóticamente a cero.

En general, la rapidez de escape desde la superficie de cualquier planeta de masa M y radio R es:

$$\boxed{v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}}$$

Para la tierra, v_{escape} = 11,193m/s; mientras que para la luna, v_{escape} = 2,376m/s.

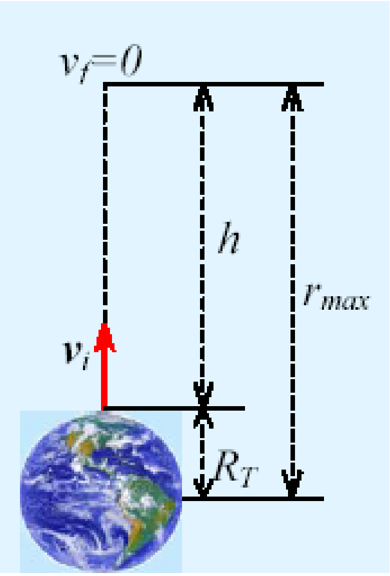
6.- Movimiento de planetas y satélites.

Posibles movimientos de objetos lanzados desde la Tierra

Lanzado en dirección radial (Alejándose del centro de la Tierra)

Usando conservación de energía, para llegar al infinito (escaparse de la tierra) tiene que tener, como mínimo, energía mecánica nula, ya que en infinito U=0 y podría llegar con K=0.

$$K + U = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R} = 0$$



- Si en la superficie de la tierra tiene una energía mecánica menor que 0, no se escapará ya que en algún momento se detendrá y caerá hacia la tierra otra vez.
- Hay una velocidad de lanzamiento mínima para escaparse (velocidad de escape) que se puede encontrar poniendo la energía mecánica igual a cero, de tal forma que

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

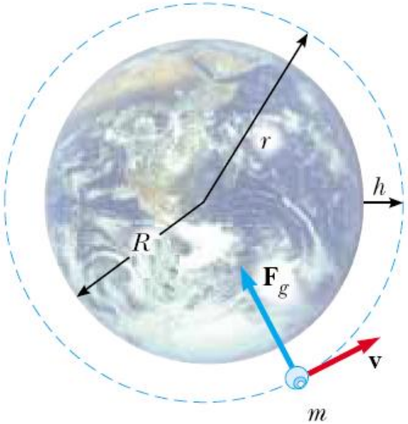
6.- Movimiento de planetas y satélites.

Posibles movimientos de objetos lanzados desde la Tierra

Lanzado en dirección tangencial (Circundando la Tierra)

Aquí también, si la velocidad es muy pequeña, caerá otra vez a tierra; sin embargo, con suficiente velocidad puede moverse en una órbita circular sin caer a tierra.

- Esto ocurre cuando la fuerza de gravedad provee la fuerza centrípeta necesaria para el movimiento circular uniforme. Podemos usar la 2a ley para averiguar qué rapidez se necesita.



$$-\frac{GMm}{r^2} = m\left(-\frac{v^2}{r}\right) \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

- Vale la pena notar que (para una R dada) esta rapidez es más pequeña que la velocidad de escape (por un factor de $\sqrt{2}$). A esta rapidez, el cuerpo no escapa pero puede orbitar sin caer a tierra.

6.- Movimiento de planetas y satélites. Ejemplos.

5.- Un satélite de 500kg está en una órbita circular a una altitud de 500km sobre la superficie terrestre. Debido a la fricción del aire, el satélite eventualmente cae a la superficie terrestre, golpeando con una rapidez de 2.00km/s. ¿Cuánta energía se transforma en energía interna debido a la fricción?

$\Delta E_{int} = 1.58 \times 10^{10} J$

6.- Movimiento de planetas y satélites. Ejemplos.

6.- El planeta Urano tiene una masa aproximadamente 14 veces la masa terrestre y un radio de 3.7 veces el radio terrestre. (a) Utilizando las razones anteriores, encuentre la aceleración de caída libre en Urano. (b) Ignorando la rotación del planeta, encuentre la rapidez de escape para Urano.

(a) $g_{\mathrm{U}} = 10\,\mathrm{m/s^2}$

(b) $v_{\mathrm{escape}} = 21.8\,\mathrm{km/s}$

6.- Movimiento de planetas y satélites. Ejemplos.

7.- Derive una expresión para el trabajo requerido para mover un satélite de la Tierra de masa m desde una órbita circular de radio $2R_T$ a una de radio $3R_T$.

$$W = (1/12)GM_T m/R_T$$

Universidad de Sonora
Departamento de Física

"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

Mecánica II

Dr. Roberto Pedro Duarte Zamorano