FÍSICA

Dr. Roberto Pedro Duarte Zamorano
© 2021 Departamento de Física
Universidad de Sonora

Momento lineal y su conservación

La **cantidad de movimiento** o **ímpetu** de una partícula se define como el producto de la velocidad ***v*** por la masa *m* de la partícula, a saber

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

La segunda ley de Newton establece que el cambio temporal de la cantidad de movimiento de un objeto es igual a la fuerza aplicada sobre él.

En términos de la cantidad de movimiento, la Segunda Ley de Newton se escribe como

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

y si *m* es constante

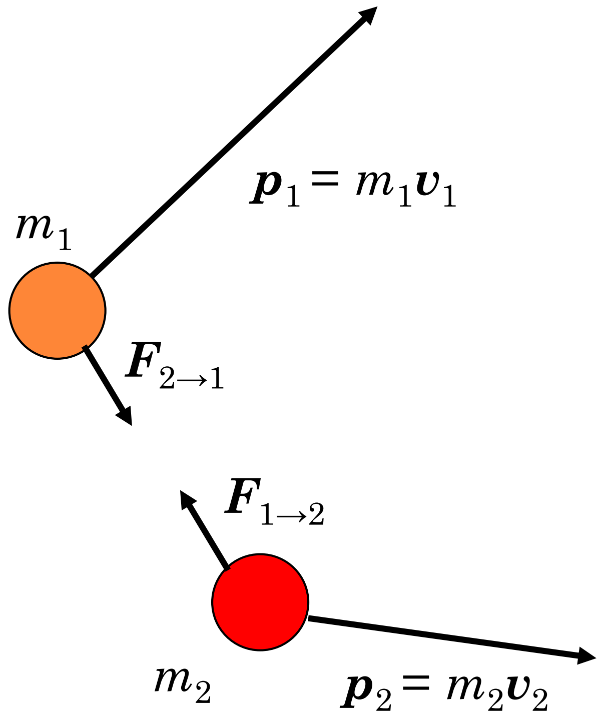
$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad \rightarrow \quad F = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Momento lineal y su conservación

Conservación de la cantidad de movimiento para dos partículas

Para dos partículas aisladas que interactúan mutuamente, de acuerdo con la Segunda Ley de Newton, se cumple que

$$\vec{F}_{2\to1} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} \quad \text{y} \qquad \vec{F}_{1\to2} = \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$



De la Tercera Ley de Newton, tenemos que

$$\vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1}$$

Momento lineal y su conservación

Conservación de la cantidad de movimiento para dos partículas

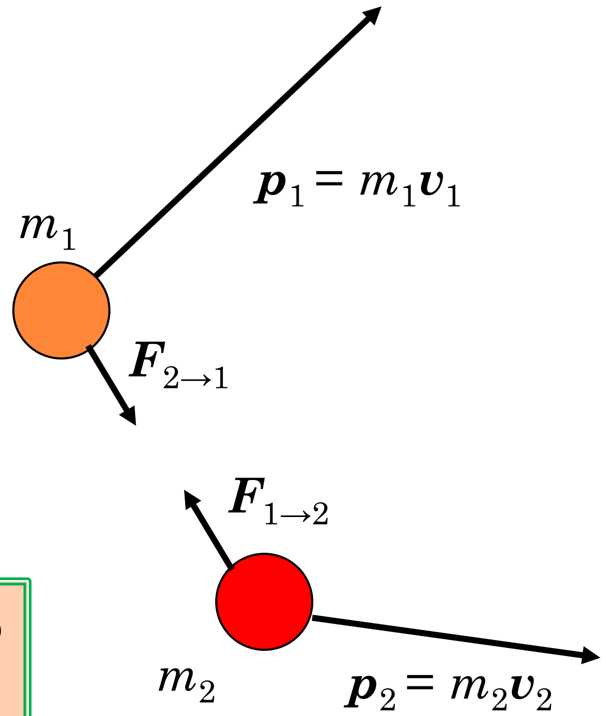
De esta última relación podemos escribir

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt}+\frac{d\vec{p}_2}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\vec{p}_1+\vec{p}_2\right)=0$$

Esto significa que

$$\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{p}_{total}=\text{constante}$$

La ley de conservación del momento lineal *p* establece que "siempre que dos partículas aisladas interactúan entre sí, su momento total $\boldsymbol{p}_{\text{total}}$ permanece constante"



Momento lineal y su conservación

Conservación de la cantidad de movimiento

En una forma más general, podemos enunciar que "**si la suma vectorial de las fuerzas externas sobre un sistema es cero, el momento lineal total del sistema es constante**".

La utilidad de este principio radica en que no depende de la naturaleza detallada de las fuerzas internas que actúan entre miembros del sistema, así que podemos aplicarlo incluso si (como suele suceder) sabemos muy poco acerca de las fuerzas internas.

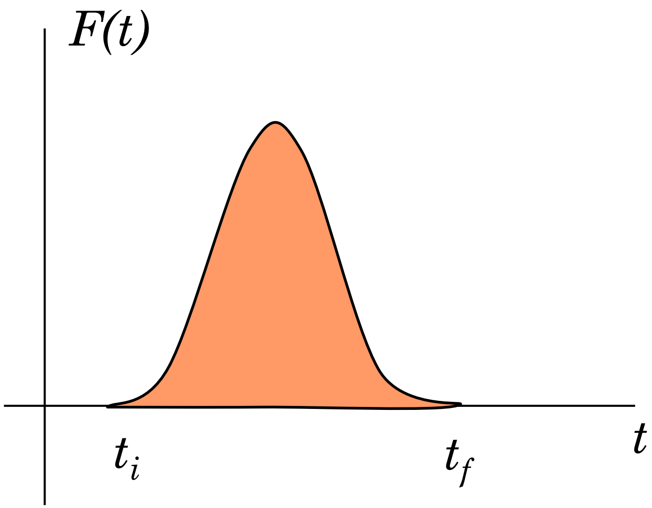
Además, podemos generalizar este principio para un sistema con cualquier número de partículas A, B, C, … que sólo interactúan entre sí. En este caso

$$\boxed{\vec{p}_{total} = \vec{p}_A + \vec{p}_B + \vec{p}_C + \ldots = \text{constante}}$$

Impulso y Momento lineal

Si una fuerza neta constante actúa sobre una partícula durante un intervalo de tiempo Δt (de t_1 a $t_{2)}$, el impulso $\boldsymbol{I}$ de la fuerza neta es el producto de la fuerza neta y el intervalo de tiempo. Por otro lado, y de manera más general, si la fuerza varía con el tiempo, entonces el impulso $\boldsymbol{I}$ se define como la integral de la fuerza neta en el intervalo de tiempo.

$$\boxed{\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt}$$



Con la definición anterior, el impulso es un vector que tiene una magnitud igual al área bajo la curva de fuerza vs tiempo.

Si una fuerza actúa por un tiempo muy corto se le llama *fuerza impulsiva*.

Impulso y Momento lineal

En ocasiones, el impulso se define como el cambio en la cantidad de movimiento de un cuerpo, la razón es la siguiente.

Si uno parte de la definición de impulso, y hace uso de la Segunda Ley de Newton, es posible escribir de manera secuencial

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{d\vec{p}}{dt} \right) dt$$

$$= \vec{p}(t_f) - \vec{p}(t_i)$$

es decir

$$\boxed{\vec{I} = \Delta\vec{p}}$$

Impulso y Momento lineal. Ejemplo

Una pelota de golf de 50 g es golpeada por un palo de golf y esta sale con una velocidad inicial que forma un ángulo de 45° sobre la horizontal, alcanzando una distancia de 200m. (a) Calcule el impulso aplicado por el palo; y (b) suponga que el tiempo de contacto es de 0.45ms, ¿cuál es la fuerza media ejercida por el palo sobre la pelota?

Solución:

La rapidez inicial de la pelota es de 44.2869m/s.

a) 2.214345Ns a 45°.

b) 4920.7667N a 45°.

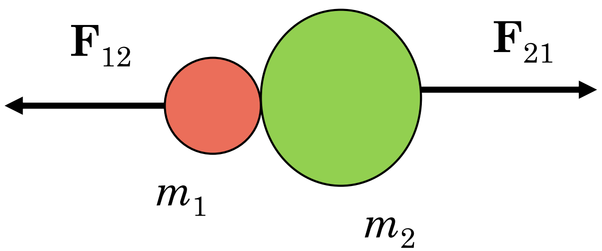
Colisiones

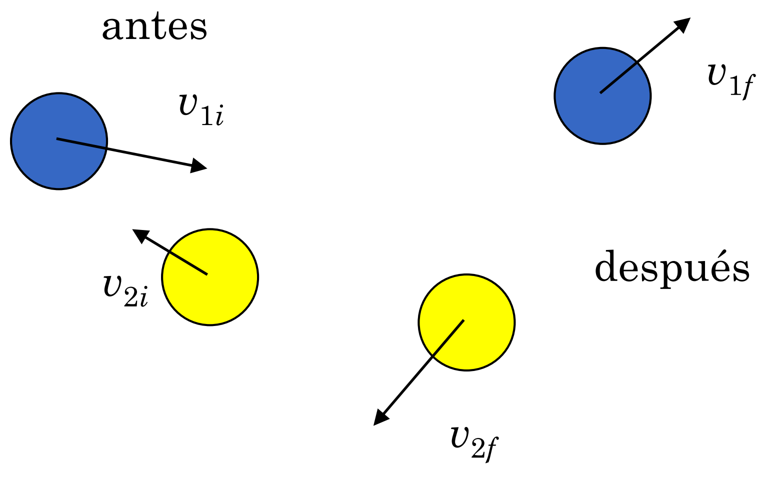
Llamamos colisión a la interacción de dos (o más) cuerpos mediante una fuerza impulsiva.

Si m_1 y m_2 son las masas de los cuerpos, entonces la conservación de la cantidad de movimiento establece que

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

donde v_{1i}, v_{2i}, v_{1f} y v_{2f} son las velocidades iniciales y finales de las masas m_1 y m_2.





Colisiones. Un ejemplo

Un camión con una masa de 1800 kg está detenido esperando la luz verde del semáforo, de repente es golpeado por atrás por un automóvil que se mueve con una rapidez de 60km/h y cuya masa es de 900 kg. Si después de la colisión ambos vehículos quedan enganchados, y desplazándose en la dirección en que se movía originalmente el automóvil, ¿con qué rapidez se mueven justo después de colisionar?

Solución:

Se mueven con una rapidez de 20km/h.

Colisiones y su clasificación.

Las colisiones se clasifican en:

- **Elásticas**: cuando se conserva la energía cinética total, es decir

$$\tfrac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \tfrac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_{2f}^2$$

- **Inelásticas**: cuando parte de la energía cinética total se transforma en energía no recuperable (calor, deformación, sonido, etc.).

- **Perfectamente inelásticas**: cuando los objetos permanecen juntos después de la colisión.

$$\vec{v}_{1f} = \vec{v}_{2f}$$

Colisiones completamente inelásticas.

En el caso de una dimensión, para colisiones perfectamente inelásticas se tiene lo siguiente.

$$v_{1f} = v_{2f} = v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

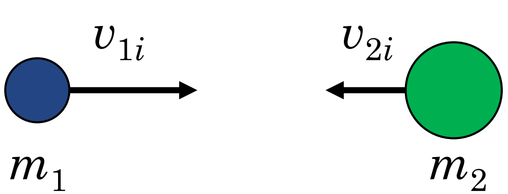
De la expresión para v_f, podemos analizar algunos casos.

Por un lado, si m_2 está inicialmente en reposo, entonces la velocidad final está dada por

$$v_f = \frac{m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2}$$

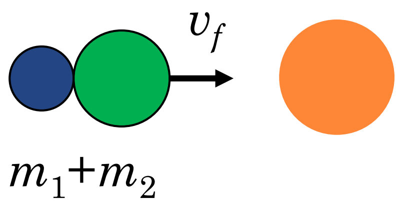
Si $m_1 \gg m_2$, entonces $v \approx v_{1i}$.

Si $m_1 \ll m_2$, entonces $v \approx 0$.



Por otro lado, si $v_{2i} = -v_{1i}$, entonces:

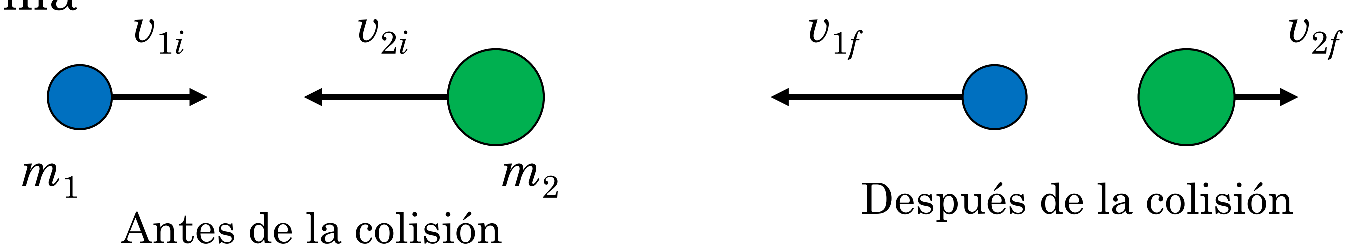
$$v_f = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$



En este caso si $m_1 = m_2$, entonces: $v = 0$

Colisiones perfectamente elásticas.

En una colisión unidimensional se tiene el siguiente esquema



En una colisión elástica se conserva el momento y la energía cinética total, con lo que podemos escribir dos ecuaciones

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

y

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

Es fácil mostrar, a partir de lo anterior, que:

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2i} + v_{2f}$$

Colisiones perfectamente elásticas.

Si denotamos por u la velocidad relativa de los objetos, entonces:

$$u_i = v_{1i} - v_{2i}$$

$$u_f = v_{1f} - v_{2f}$$

$$u_i = -u_f$$

En una colisión elástica la velocidad relativa de los cuerpos en colisión cambia de signo, pero su magnitud permanece inalterada.

Es fácil mostrar que las velocidades finales de los dos objetos están dadas por

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

Colisiones perfectamente elásticas.

En las expresiones anteriores, si consideramos el caso en que $v_{2i} = 0$, obtenemos que

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad \text{y} \quad v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

Igualmente, podemos analizar algunos casos particulares.

- Si $m_1 = m_2$, entonces $v_{1f} = 0$ y $v_{2f} = v_{1i}$. Es decir, dos objetos de masas iguales intercambian sus velocidades.
- Si $m_1 \gg m_2$, entonces $v_{1f} \approx v_{1i}$ y $v_{2f} \approx 2v_{1i}$. Quiere decir que un objeto grande que choca con otro pequeño casi no altera su velocidad pero el objeto pequeño es arrojado con una velocidad aproximadamente del doble de la del masivo.
- Si $m_1 \ll m_2$, entonces $v_{1f} \approx -v_{1i}$ y $v_{2f} \approx (2\, m_1/m_2)v_{1i} \approx 0$. Cuando un objeto ligero choca con otro pesado, adquiere una velocidad opuesta a la que traía.

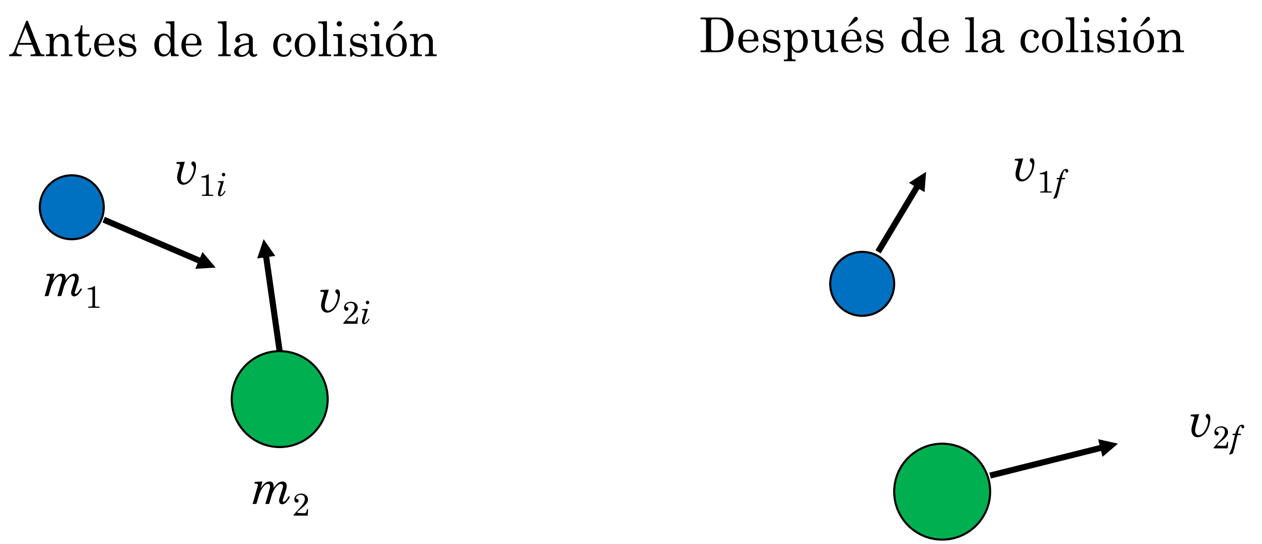
Colisiones bidimensionales.

Para el caso de dos dimensiones, la conservación del momento se expresa para cada componente como dos ecuaciones algebraicas, una para cada componente de los vectores involucrados, a saber

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx}$$

y

$$m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy}$$



Colisiones bidimensionales.

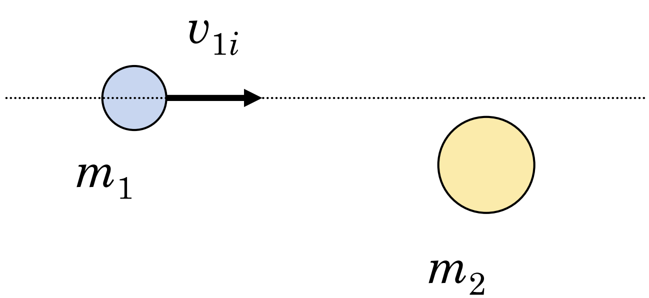
A continuación vamos a considerar el caso en que m_2 está en reposo inicialmente.

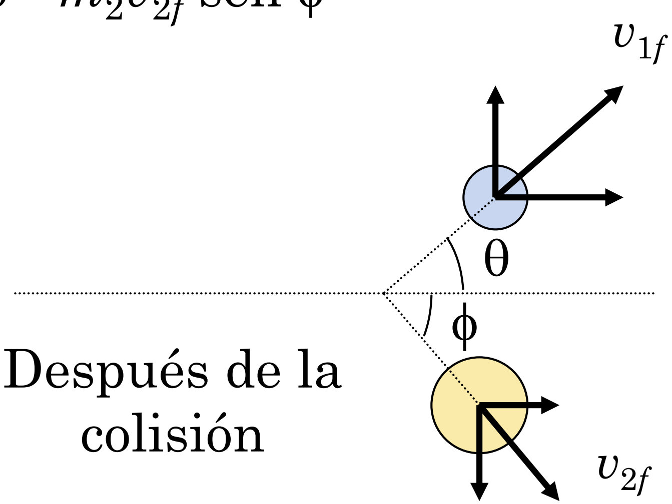
Después del choque m_1 se mueve a un ángulo θ con la horizontal y m_2 se mueve a un ángulo ϕ con la horizontal, con lo que las ecuaciones anteriores quedan como:

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta + m_2 v_{2f} \cos\phi$$

$$0 = m_1 v_{1f} \,\mathrm{sen}\,\theta - m_2 v_{2f} \,\mathrm{sen}\,\phi$$

Antes de la colisión





Después de la colisión

Colisiones bidimensionales.

Por otro lado, la ley de la conservación de la energía nos suministra otra ecuación, a saber

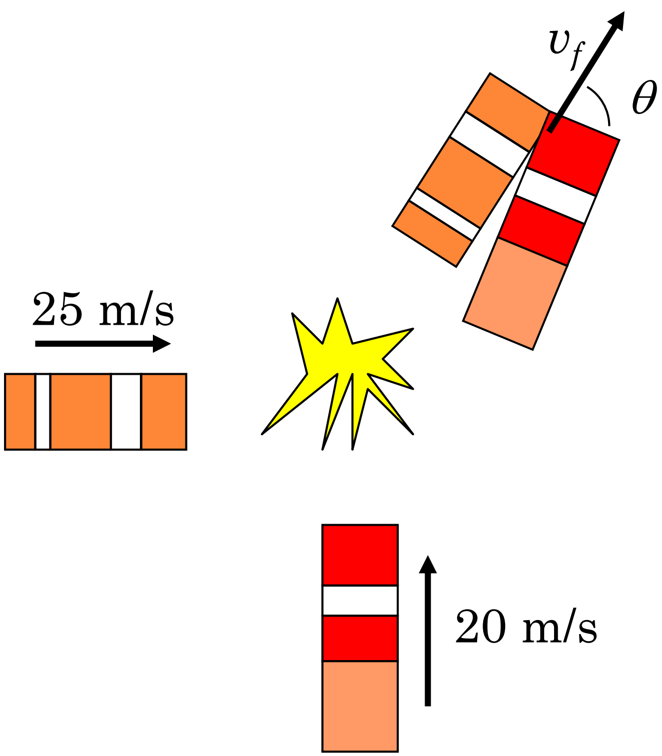
$$\tfrac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 = \tfrac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_{2f}^2$$

Hasta este punto solamente tenemos 3 ecuaciones, pero se mantienen las 4 incógnitas: v_{1f}, v_{2f}, ϕ, θ, considerando que las masas m_1 y m_2, al igual que la velocidad inicial v_{1i}, son datos del problema.

Lo anterior abre dos opciones: (*i*) expresamos tres de ellas en términos de una cuarta; o (*ii*) se nos da alguna de las cantidades restantes v_{1f}, v_{2f}, ϕ, θ; siendo esta segunda opción la que se tiene en la mayoría de los caso.

Colisiones bidimensionales. Ejemplo

Un auto de 1500 kg a 25 m/s hacia el Este choca con una camioneta de 2500 kg que se mueve hacia el Norte a 20 m/s en un cruce. Encuentre la magnitud y dirección de la velocidad de los autos después del choque, suponga un choque completamente inelástico.



Solución: Aplicando la conservación del momento para cada una de las componentes tenemos lo siguiente.

- Para la componente *x* del momento:

Antes = Después

$$(1500\text{ kg})(25\text{ m/s}) = (2500\text{ kg})\, v_f \cos(\theta) + (1500\text{ kg})\, v_f \cos(\theta)$$

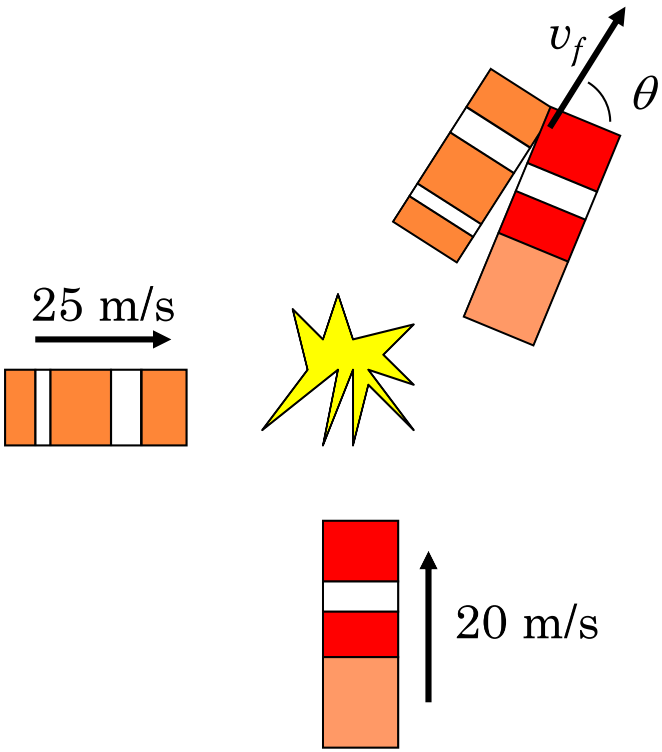
- Para la componente *y* del momento:

Antes = Después

$$(2500\text{ kg})(20\text{ m/s}) = (2500\text{ kg})\, v_f \operatorname{sen}(\theta) + (1500\text{ kg})\, v_f \operatorname{sen}(\theta)$$

Colisiones bidimensionales. Ejemplo

Un auto de 1500 kg a 25 m/s hacia el Este choca con una camioneta de 2500 kg que se mueve hacia el Norte a 20 m/s en un cruce. Encuentre la magnitud y dirección de la velocidad de los autos después del choque, suponga un choque completamente inelástico.



Solución (continuación): Las ecuaciones anteriores se escriben como

$$(1500 \text{ kg})(25 \text{ m/s}) = (4000 \text{ kg})\ v_f \cos(\theta)$$

y

$$(2500 \text{ kg})(20 \text{ m/s}) = (4000 \text{ kg})\ v_f \operatorname{sen}(\theta)$$

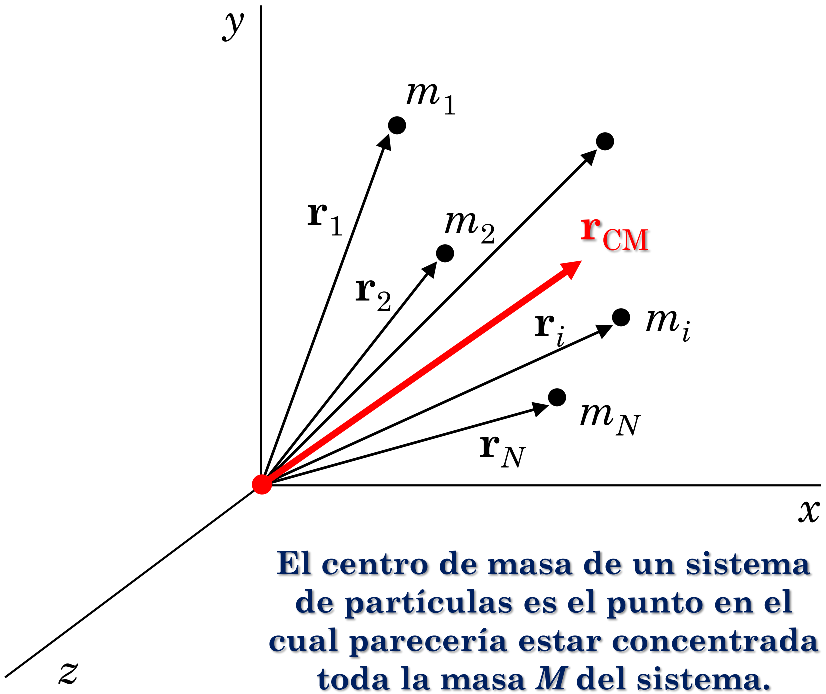
Que al resolverlas simultáneamente nos dan los siguientes valores para las incógnitas

$$\theta = 53.1301° \quad \text{y} \quad v_f = 15.625\text{m/s}$$

Centro de masa de un sistema de partículas.

Podemos replantear el principio de conservación del momento lineal en una forma útil usando el concepto de ***centro de masa***.

Supongamos que tenemos N partículas con masas m_1, m_2, m_3, … , m_N, cuyas posiciones se pueden representar por los vectores $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$, … , $\boldsymbol{r}_N$, respectivamente.



El centro de masa de un sistema de partículas es el punto en el cual parecería estar concentrada toda la masa *M* del sistema.

Definimos el centro de masa de este sistema de N partículas como el punto cuyo vector de posición $\boldsymbol{r}_{CM}$ está dado por

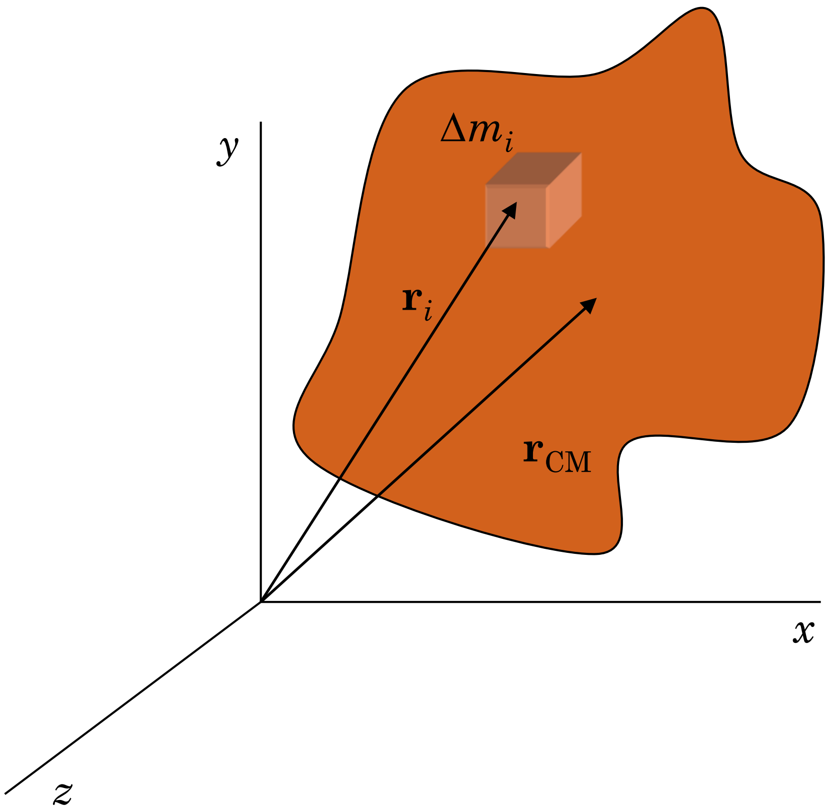
$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M}$$

Centro de masa de un cuerpo extendido

En el caso de cuerpos sólidos, que tienen (al menos en el nivel macroscópico) una distribución continua de materia, la suma de la definición anterior deben sustituirse por una integral, con lo que el centro de masa *CM* se ubica en la posición dada por

$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int_V \vec{r}\,dm}$$

El cálculo de esta integral suele ser complicado, sobretodo si el objeto no tiene algún tipo de simetría; sin embargo, aún podemos decir algo en general acerca de tales problemas.



Centro de masa de un cuerpo extendido

Algunas consideraciones para el centro de masa de un cuerpo extendido.

- Primero, si un cuerpo homogéneo tiene un centro geométrico, como una bola de billar, un terrón de azúcar o una lata de jugo congelado, el centro de masa está en el centro geométrico.

- Segundo, si un cuerpo tiene un eje de simetría, como una rueda o una polea, el centro de masa se ubica sobre dicho eje.

- Tercero, ninguna ley dice que el centro de masa debe estar dentro del cuerpo. Por ejemplo, el centro de masa de una dona está en el centro del agujero.

Movimiento del CM de un sistema de partículas

Finalmente, para analizar el movimiento del Centro de Masa (*CM*) de un sistema de *N* partículas, partiendo de la expresión para la posición del *CM*, a saber

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

calculamos su derivada temporal para tener la expresión para la velocidad del centro de masa

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

Obteniéndose que la velocidad del centro de masa está dada por

$$\boxed{\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}$$

Movimiento del CM de un sistema de partículas

Con lo anterior, es posible escribir el momento del centro de masa como

$$\vec{p}_{CM} = M\vec{v}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \vec{p}_{total}$$

Por otro lado, la aceleración del centro de masa es

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i$$

con lo que la Segunda Ley de Newton se puede escribir como

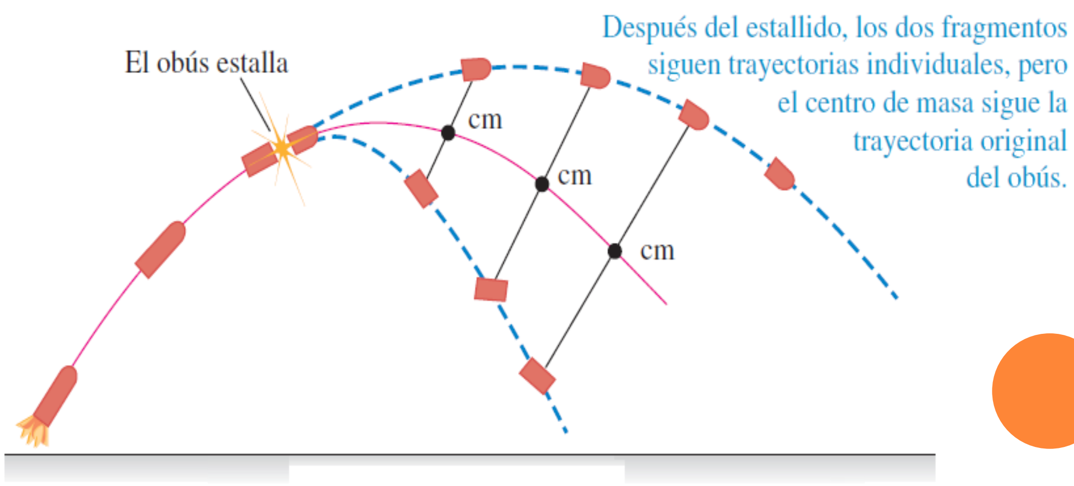
$$M\vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

Movimiento del CM de un sistema de partículas

Finalmente, y tomando en cuenta la Tercera Ley de Newton, advertimos que la sumatoria sólo incluye a las fuerzas externas al sistema, por lo que

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{p}_{tot}}{dt}$$

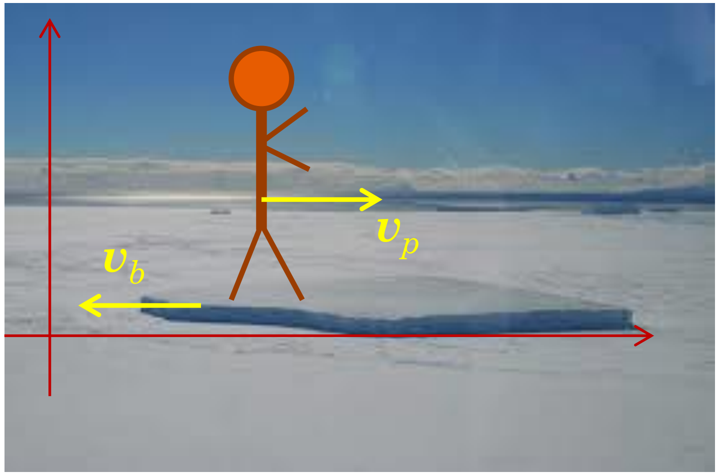
El centro de masa se mueve como una partícula imaginaria de masa *M* bajo la influencia de la fuerza externa resultante sobre el sistema.



Movimiento del CM de un sistema de partículas. Ejemplo

8.101 Imagine que está de pie en una plancha de concreto que descansa sobre un lago congelado. Suponga que no hay fricción entre la plancha y el hielo. La plancha pesa cinco veces más que usted. Si usted comienza a caminar a 2.00 m/s en relación con el hielo, ¿con qué rapidez relativa al hielo se moverá la plancha?

Solución.



Como no hay fuerza neta sobre el sistema, la velocidad del centro de masa es constante, por lo que se mantiene como nula, así que

$$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \frac{m_p \vec{v}_p + m_b \vec{v}_b}{m_p + m_b} = 0$$

de donde

$$m_p \vec{v}_p + m_b \vec{v}_b = 0$$

lleva a

$$m_p v_p + m_b(-v_b) = 0$$

con lo que

$$v_b = \left(\frac{m_p}{m_b}\right) v_p = \left(\frac{m_p}{5m_p}\right)\left(2.00\,\frac{m}{s}\right) = 0.40\,\frac{m}{s}$$

¡Orgullosamente Búhos!

Física

Dr. Roberto Pedro Duarte Zamorano
© 2021 Departamento de Física
Universidad de Sonora