



Universidad de Sonora
Departamento de Física



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

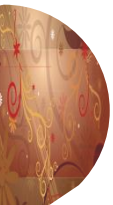
Mecánica II

Dr. Roberto Pedro Duarte Zamorano

© 2021

Temario

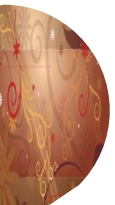
- 1) Cinemática rotacional.
- 2) Dinámica rotacional.
- 3) Las leyes de Newton en sistemas de referencia acelerados.
- 4) La ley de la gravitación de Newton.
- 5) Oscilaciones.
- 6) Movimiento ondulatorio.
- 7) Ondas sonoras.



Temario

2. Dinámica rotacional.

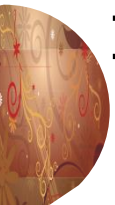
1. La torca y el equilibrio rotacional.
2. La Segunda ley de Newton para la rotación.
3. Trabajo, potencia y energía para las rotaciones.
4. Movimientos de rotación y traslación combinados. Rodamiento.
5. Torca y Momento angular.
6. Conservación del momento angular.
7. Giróscopos, trompos y movimiento de precesión.



I. La torca y el equilibrio rotacional.

¿Por qué las bisagras y la manija están en lados opuestos de una puerta?

Imagínese tratando de girar una puerta mediante la aplicación de una fuerza de magnitud F perpendicular a la superficie de la puerta, pero alejado de las bisagras. Va a lograr un mayor efecto de rotación de la puerta mediante la aplicación de la fuerza cerca de la manija de la puerta que si lo hace cerca de las bisagras.



I. La torca y el equilibrio rotacional.

Si no puede aflojar un tornillo con una llave creciente, ¿qué haría usted en un esfuerzo por aflojar el tornillo?

Seguramente buscaría usar, de manera intuitiva, una llave con un mango más largo o quizás usaría un tubo para alargar el mango de la llave disponible.



Esta situación es similar a la apertura de la puerta, mencionada anteriormente:

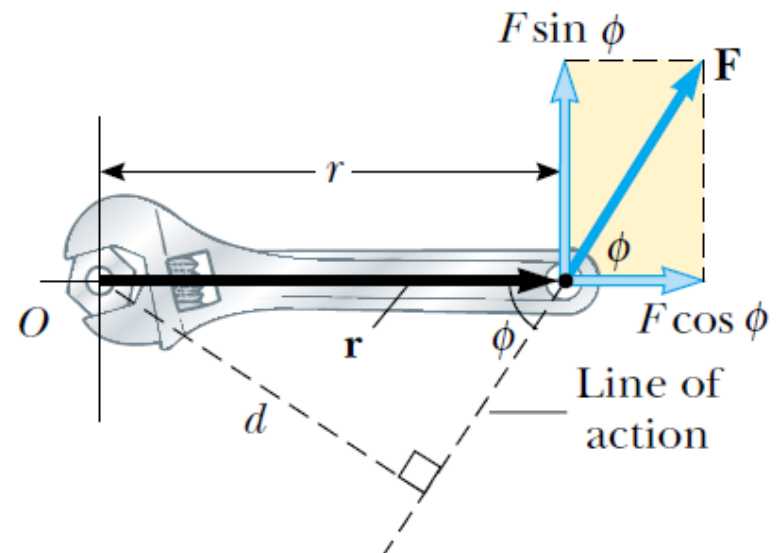
es mejor aplicar la fuerza lo más alejado del eje de rotación.

I. La torca y el equilibrio rotacional.

Cuando se aplica una fuerza a un cuerpo rígido pivotado alrededor de un eje, el objeto tiende a rotar alrededor de dicho eje. La tendencia de una fuerza a rotar un cuerpo alrededor de un eje se mide por una cantidad vectorial llamada torca (τ).

Considere la herramienta mostrada en la figura y pivotada alrededor del eje que pasa por O .

La fuerza aplicada F actúa formando un ángulo ϕ con la horizontal.

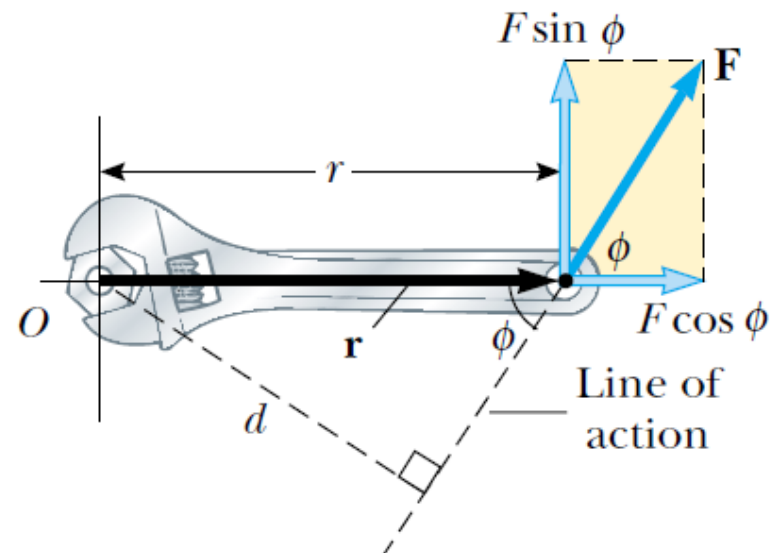


I. La torca y el equilibrio rotacional.

Con lo anterior, definimos la torca τ asociada a la fuerza F como un vector cuya magnitud está dada por

$$\tau \equiv rF \sin \phi = Fd$$

donde r es la magnitud del radio vector r que corresponde a la posición del punto de aplicación de la fuerza de magnitud F , mientras que d es la distancia perpendicular del pivote a la línea de acción de la fuerza.

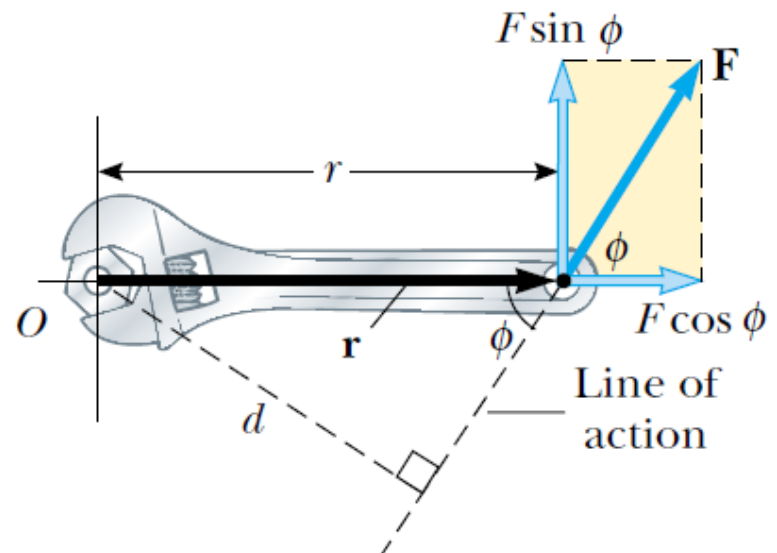


I. La torca y el equilibrio rotacional.

En la figura, la única componente de F que tiende a generar una rotación es $F \sin \phi$, la componente perpendicular al radio vector r del punto de aplicación.

Por otro lado, la componente horizontal $F \cos \phi$ no presenta una tendencia para producir una rotación debido a que su línea de acción pasa por el eje de rotación, o pivote O .

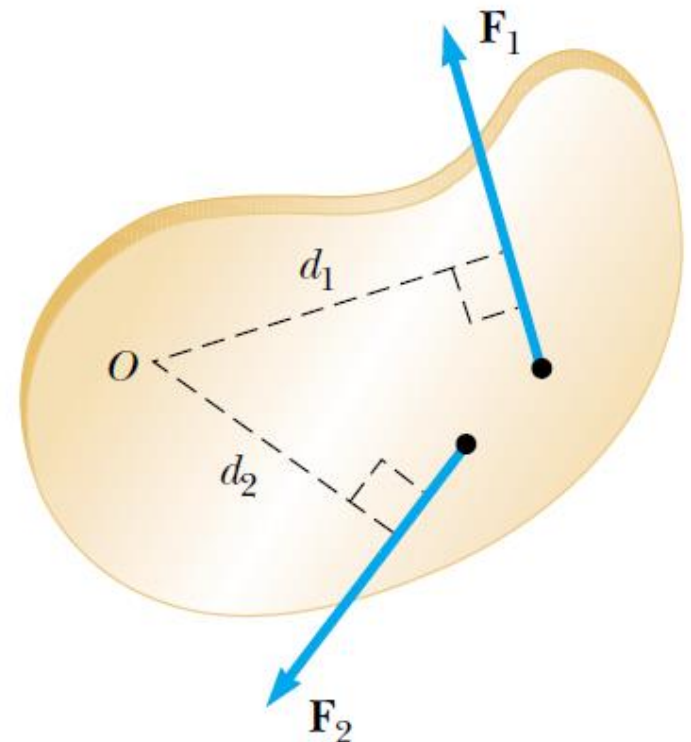
De la definición de torca, vemos que la tendencia rotacional de una fuerza se incrementa, conforme F y d lo hacen



I. La torca y el equilibrio rotacional.

Si dos o mas fuerzas actúan sobre un cuerpo rígido, como se muestra en la figura, cada una tiende a producir una rotación alrededor del eje en O .

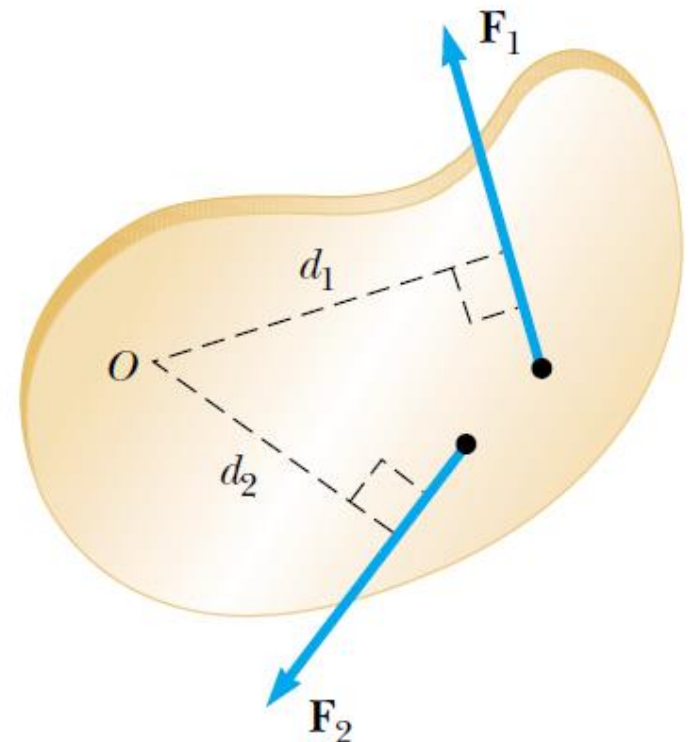
En este caso, la fuerza F_1 tiende a rotar el objeto en dirección contraria a las manecillas del reloj, mientras que la fuerza F_2 tiende a rotarlo en dirección de las manecillas del reloj.



I. La torca y el equilibrio rotacional.

Para tomar en cuenta estas dos posibilidades, usaremos la siguiente convención de signos para la torca ejercida por una fuerza:

- La torca será positiva si esta tiende a rotar el objeto en dirección contraria a las manecillas del reloj.
- La torca será negativa si esta tiende a rotarlo en dirección de las manecillas del reloj.



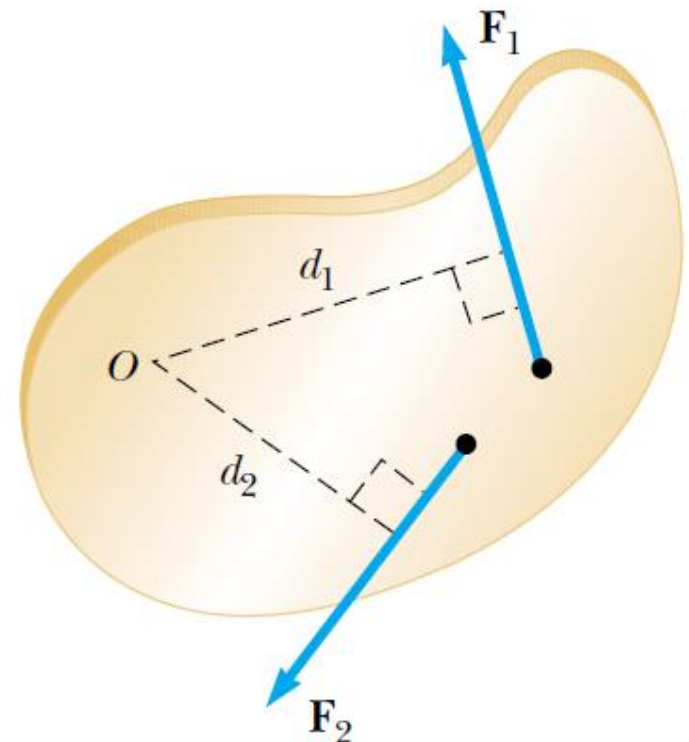
I. La torca y el equilibrio rotacional.

En el caso mostrado en la figura, como ambas fuerzas ejercen su respectiva torca, podemos considerar que ambas torcas dan lugar a una torca resultante.

La torca resultante de F_1 es positiva y está dada por d_1F_1 , mientras que la torca resultante de F_2 es negativa y está dada por d_2F_2 ; por lo que la torca neta será

$$\tau_{Neta} = \sum \tau = \tau_1 + \tau_2 = (d_1F_1) + (-d_2F_2)$$

$$\tau_{Neta} = d_1F_1 - d_2F_2$$

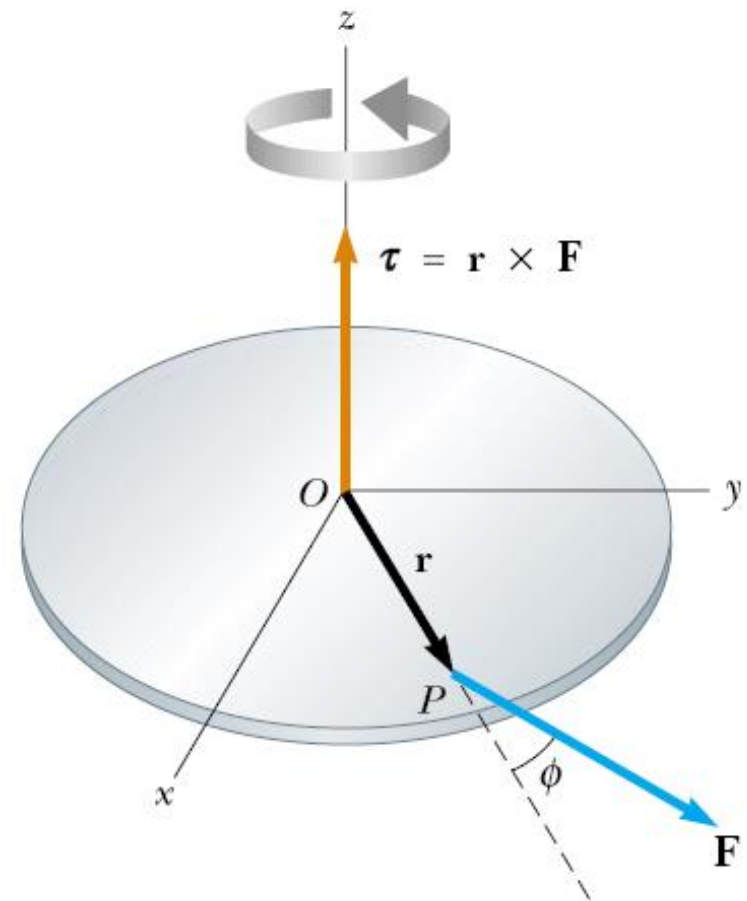


I. La torca y el equilibrio rotacional.

Como se ha mencionado anteriormente, la torca es una cantidad que puede expresarse como un producto vectorial; para visualizar lo anterior podemos considerar el esquema adjunto.

La fuerza F aplicada en el punto P tiende a hacer girar la rueda en dirección contrarreloj, ejerciendo una torca τ que podemos escribir, usando la definición, como

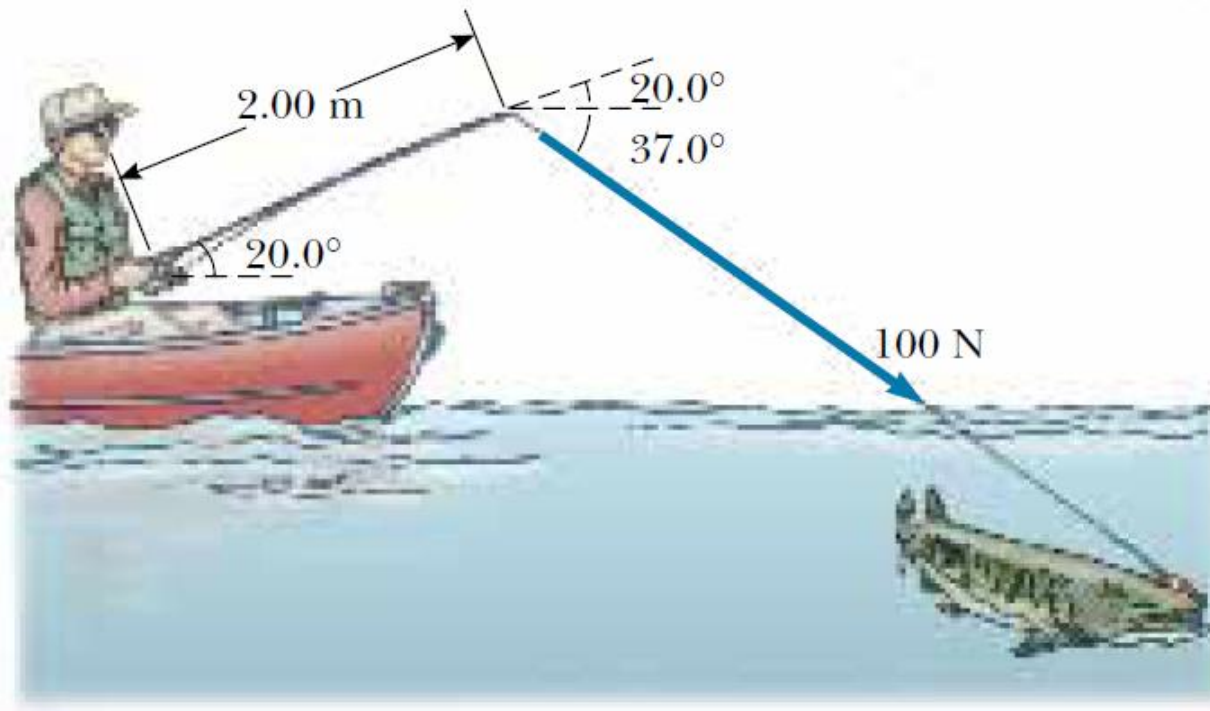
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$



I. La torca y el equilibrio rotacional.

Ejemplos

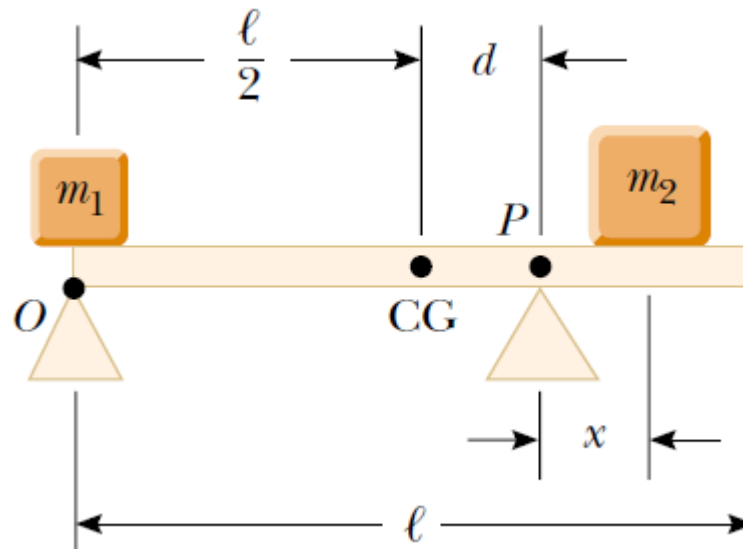
- 1.- La caña de pescar de la figura forma un ángulo de 20.0° con la horizontal. ¿Qué torca ejerce el pez alrededor de un eje perpendicular a la figura y que pasa por la mano del pescador?



I. La torca y el equilibrio rotacional.

Ejemplos

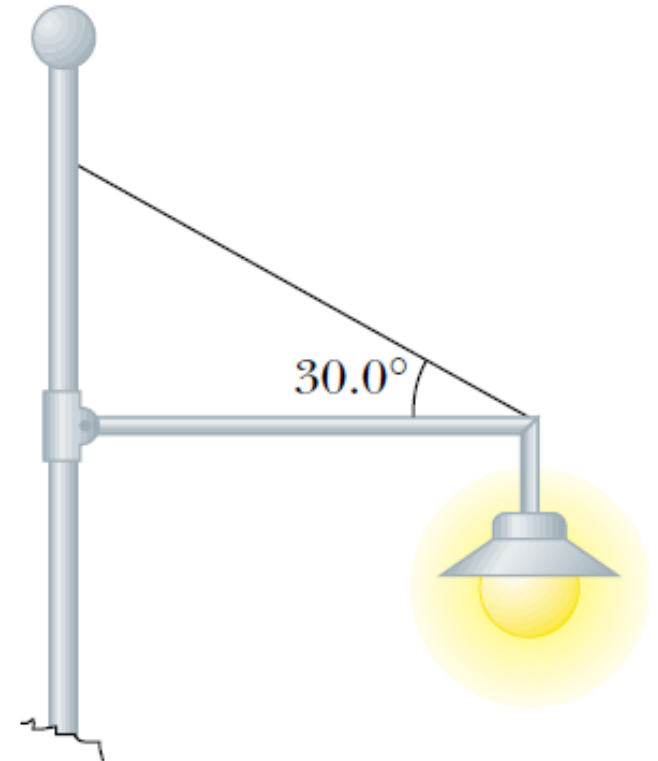
2. Una barra uniforme de masa m_b y longitud l soporta dos bloques de masas m_1 y m_2 tal como se muestra. La barra permanece en reposo sobre dos soportes puntiagudos. ¿Para qué valores de x la barra permanecerá balanceada sobre P , tal que la fuerza normal en O sea cero?



I. La torca y el equilibrio rotacional.

Ejemplos

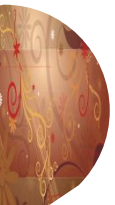
3. Una lámpara de un parque, con una masa de 20.0kg , es sostenida al final de una barra horizontal de masa despreciable como se muestra en la figura. Para soportar el peso de la lámpara se utiliza un cable que forma un ángulo de 30.0° con la barra. Encuentre (a) la tensión en el cable; y (b) las fuerzas horizontal y vertical ejercidas por la barra sobre el poste.



2. La segunda ley de Newton para la rotación.

Cuando estudiamos el movimiento lineal de una partícula aprendimos que una fuerza neta sobre un objeto le causa una aceleración que es proporcional a dicha fuerza neta (Segunda ley de Newton).

En esta parte demostramos el análogo rotacional de la Segunda ley de Newton: “la aceleración angular de un cuerpo rígido que rota sobre un eje fijo es proporcional a la torca neta que actúa sobre ese eje”.



2. La segunda ley de Newton para la rotación.

Para iniciar, consideremos el movimiento circular no uniforme de una partícula de masa m , en este caso tenemos la existencia de dos fuerzas: F_t y F_r .

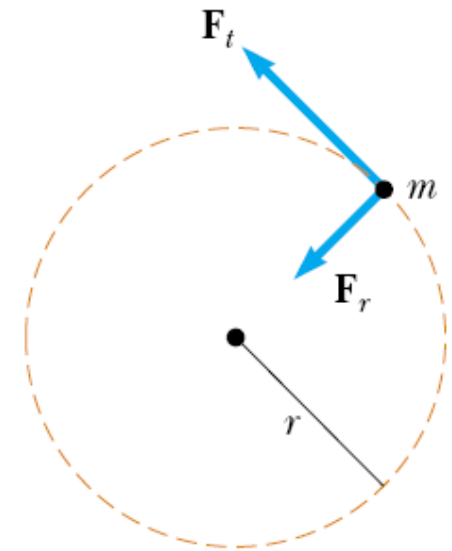
Aplicando la Segunda Ley encontramos que

$$F_t = ma_t = m(r\alpha)$$

$$F_r = ma_r = m(\omega^2 r)$$

Por otro lado, si calculamos la torca neta sobre la partícula alrededor del centro de giro, tenemos que

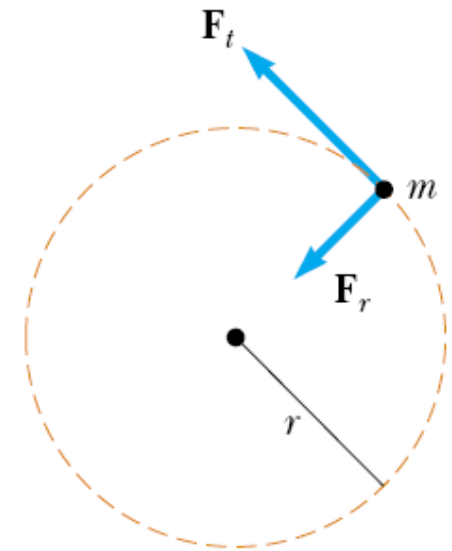
$$\sum \tau = F_t r \text{Sen}90^\circ = [m(r\alpha)]r$$



2. La segunda ley de Newton para la rotación.

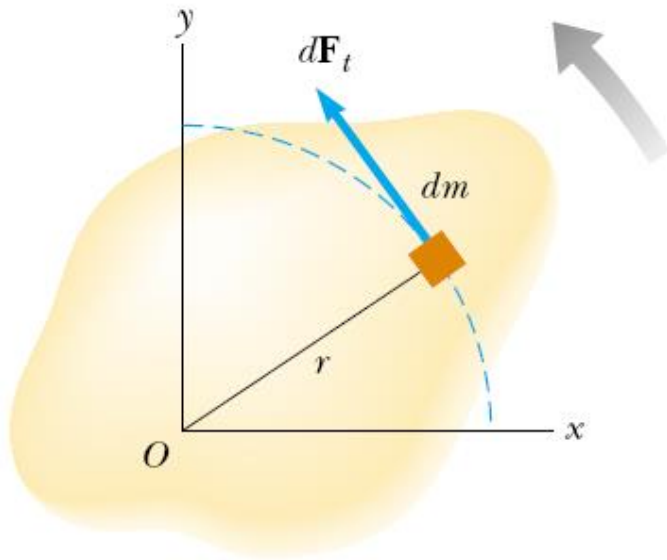
La expresión anterior puede ser reescrita en términos del momento de inercia, es decir

$$\tau_{Total} = I\alpha$$



Demostrando con ello el análogo rotacional de la Segunda ley de Newton: “la aceleración angular de un cuerpo rígido que rota sobre un eje fijo es proporcional a la torca neta que actúa sobre ese eje”.

2. La segunda ley de Newton para la rotación.

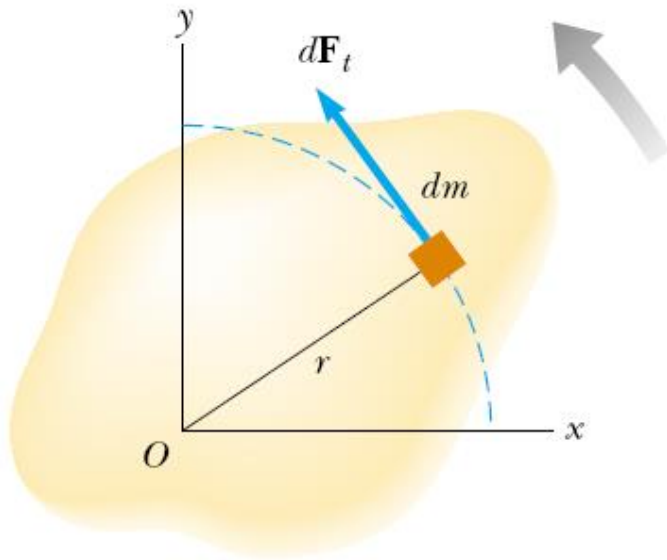


El resultado anterior puede ser generalizado para el caso de un cuerpo rígido de la siguiente forma:

Consideremos al cuerpo rígido como formado por un número infinito de partículas de masa dm , de tamaño infinitesimal.

Colocando un sistema de coordenadas cartesianas en el cuerpo, es fácil visualizar que cada elemento del cuerpo se mueve describiendo un movimiento circular bajo la acción de una fuerza dF_t .

2. La segunda ley de Newton para la rotación.



Para cualquier elemento, la Segunda Ley de Newton nos permite escribir

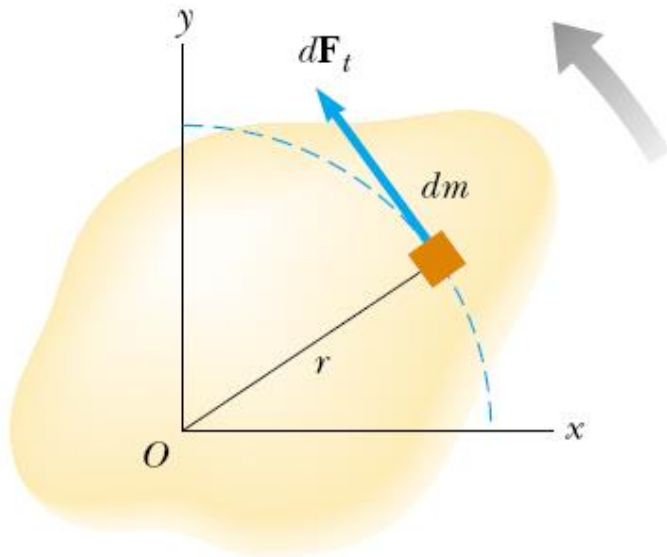
$$dF_t = dm a_t = dm(r\alpha)$$

Con lo que la torca alrededor del centro de giro es

$$d\tau = r dF_t = r a_t dm = r^2 \alpha dm$$

Aunque cada elemento dm tiene diferente aceleración tangencial a_t , todos ellos tienen la MISMA aceleración angular α .

2. La segunda ley de Newton para la rotación.



Con esto en mente, podemos integrar la expresión anterior para encontrar la torca total alrededor del pivote O ,

$$\tau_{Total} = \int d\tau = \int r^2 \alpha dm$$

Que al considerar que α es una constante, puede ser sacada de la integral, resultando

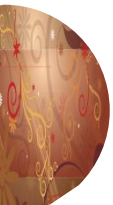
$$\tau_{Total} = \alpha \int r^2 dm \quad \Rightarrow \quad \tau_{Total} = I\alpha$$

2. La segunda ley de Newton para la rotación.

Así pues, vemos otra vez que la torca neta sobre un cuerpo alrededor del eje de rotación es proporcional a la aceleración angular experimentada por el objeto, siendo el momento de inercia I el factor de dicha proporcionalidad, y el cual depende del eje de rotación y del tamaño y forma del objeto.

$$\tau_{Total} = I\alpha$$

Segunda Ley de
Newton para la
rotación



2. La segunda ley de Newton para la rotación.

Es importante mencionar que la expresión anterior también se aplica cuando las fuerzas que actúan sobre los elementos de masa tienen componentes tanto radiales como tangenciales.

Esto es porque la línea de la acción de todos los componentes radiales debe pasar por el eje de rotación, y por lo tanto, todos los componentes radiales producen una torca igual a cero sobre ese eje.

$$\tau_{Total} = I\alpha$$

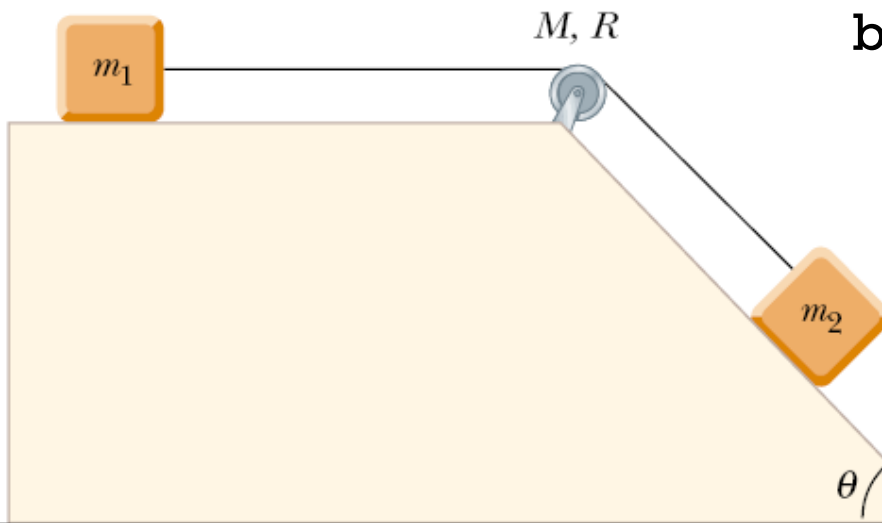
Segunda Ley de
Newton para la
rotación

2. La segunda ley de Newton para la rotación. Ejemplos.

4.- Dos bloques de masas m_1 y m_2 se conectan mediante una cuerda sin masa, que pasa a través de una polea en forma de un disco sólido que tiene radio R y masa M , tal como se muestra. El coeficiente de fricción cinética es μ_k para ambos bloques.

a) Dibuje los diagramas de cuerpo libre de ambos bloques y de la polea.

b) Determine la aceleración de los dos bloques y las tensiones en la cuerda a ambos lados de la polea.



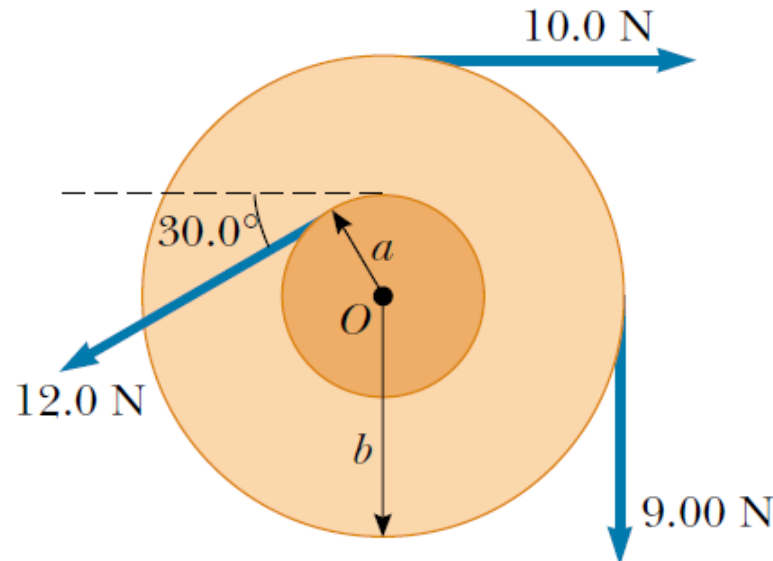
$$a = \frac{m_2 \sin \theta - \mu(m_1 + m_2 \cos \theta)}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M} g$$

$$T_1 = m_1(a + \mu g)$$

$$T_2 = m_2[g(\sin \theta - \mu \cos \theta) - a]$$

2. La segunda ley de Newton para la rotación. Ejemplos.

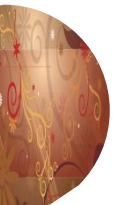
- 5.- La polea mostrada en la figura está formada por dos discos sólidos, soldados al mismo eje, y de radios a y b , respectivamente. Tomando $a = 8.00\text{cm}$, $b = 20.0\text{cm}$, $M_a = 2.00\text{kg}$ y $M_b = 5.00\text{kg}$, ¿cuál es la velocidad que tendrá el sistema de poleas en $t = 1.50\text{s}$, si consideramos que parte del reposo en $t_0 = 0\text{s}$?



3. Trabajo, potencia y energía para las rotaciones.

Hasta ahora, la discusión de la dinámica del movimiento rotacional se ha enfocado en el análisis de las fuerzas, lo que ha llevado al empleo de la torca sobre un cuerpo rígido, y su relación con la aceleración angular y el momento de inercia.

Sin embargo, en muchas ocasiones es más fácil estudiar la dinámica del cuerpo rígido empleando un enfoque energético, lo que nos lleva a revisar conceptos como trabajo, potencia y energía mecánica, aplicados a la rotación de un cuerpo rígido.



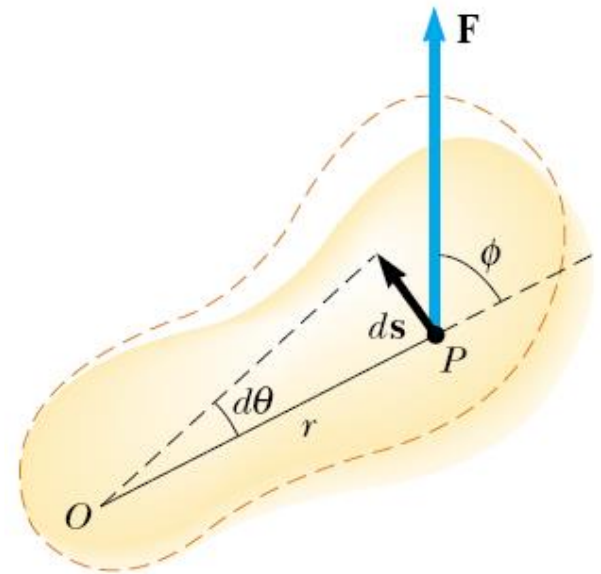
3. Trabajo, potencia y energía para las rotaciones.

Si a continuación consideremos el cuerpo rígido mostrado en la figura, el cual puede rotar alrededor del pivote O .

El trabajo dW realizado por la fuerza F aplicada en el punto P , al girar al cuerpo un ángulo $d\theta$ está dado por

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = (F \text{ Sen } \phi) r d\theta$$

donde $F \text{ Sen } \phi$ es la componente tangencial de la fuerza F (es decir, en la dirección del desplazamiento dS).

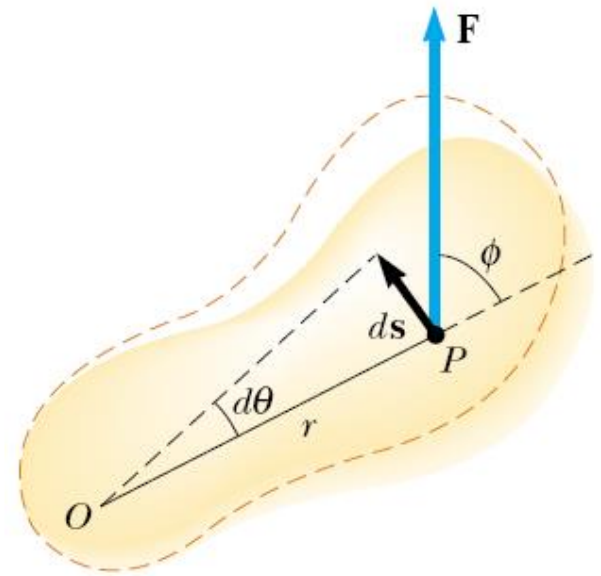


3. Trabajo, potencia y energía para las rotaciones.

Observando la expresión anterior, podemos advertir que los primeros 3 factores corresponden a la magnitud de la torca alrededor de O , con lo que el trabajo dW resulta ser

$$dW = \tau d\theta$$

De nuevo, hay una analogía en forma con la expresión obtenida para el trabajo en la dinámica traslacional.

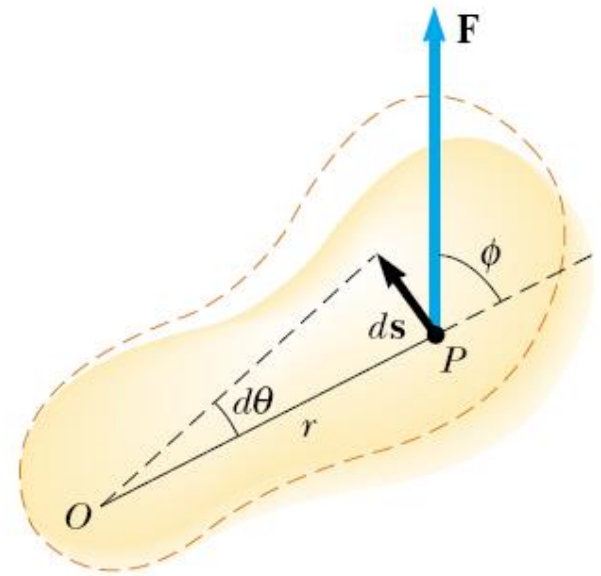


3. Trabajo, potencia y energía para las rotaciones.

Para calcular el trabajo total es necesario realizar la integración sobre la trayectoria, en este caso, angular; con ello, el trabajo realizado sobre el cuerpo rígido es

$$W_{A \rightarrow B} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \tau d\theta$$

Resulta importante notar que la torca τ puede ser una función del ángulo θ , por lo que la integral puede resultar no trivial.



3. Trabajo, potencia y energía para las rotaciones.

Una vez que hemos encontrado la expresión para el trabajo en el movimiento rotacional, podemos escribir la forma que toma la potencia.

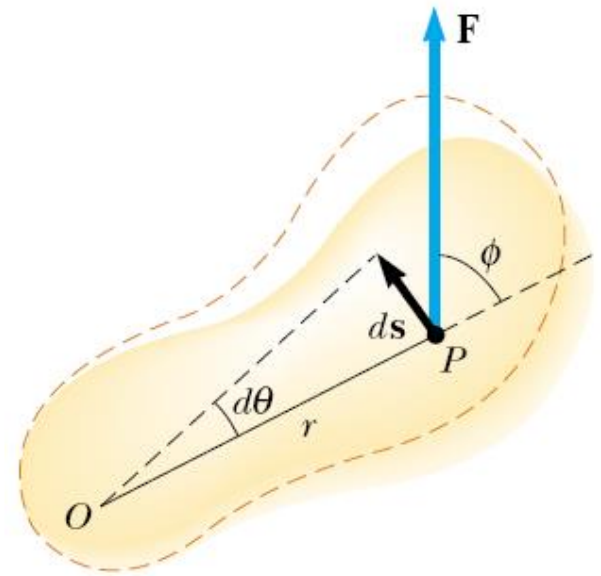
Recordando que la potencia es la rapidez con que la fuerza F realiza trabajo sobre el cuerpo, es decir

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\tau d\theta}{dt}$$

encontramos que

$$P = \tau\omega$$

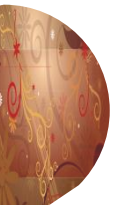
Potencia instantánea en el movimiento rotacional



3. Trabajo, potencia y energía para las rotaciones.

Al estudiar el movimiento lineal, encontramos que el enfoque energético es extremadamente útil al describir el movimiento de un sistema.

De lo aprendido sobre el movimiento lineal, es razonable suponer que podemos encontrar que “cuando un objeto simétrico rota sobre un eje fijo, el trabajo hecho por las torcas (producidas por fuerzas) externas es igual al cambio en la energía cinética rotacional”, es decir la existencia de un teorema de trabajo - energía cinética (rotacional, en este caso).



3. Trabajo, potencia y energía para las rotaciones.

Si partimos de la expresión de la segunda ley de Newton para rotaciones

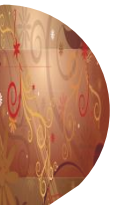
$$\tau_{Total} = \sum_i \tau_i = I\alpha$$

podemos aplicar la regla de la cadena para escribir

$$\tau_{Total} = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = I \frac{d\omega}{d\theta} \omega$$

lo que permite escribir

$$\tau_{Total} d\theta = I\omega d\omega$$

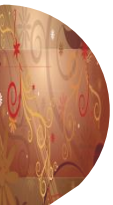


3. Trabajo, potencia y energía para las rotaciones.

Esta expresión, al ser integrada en ambos lados, nos lleva a que el trabajo total hecho por la fuerza externa resultante satisface que

$$W_{Total} = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I \omega d\omega = \frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2$$

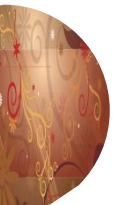
cuando la rapidez angular cambia de ω_i a ω_f . Esta expresión corresponde al teorema del trabajo - energía cinética para el movimiento rotacional que establece que “el trabajo neto realizado por las torcas externas al hacer girar un cuerpo rígido simétrico alrededor de un eje fijo es igual al cambio en la energía rotacional del objeto”.



3. Trabajo, potencia y energía para las rotaciones.

En general, combinando este resultado con la forma traslacional del teorema del trabajo – energía cinética, podemos establecer que el trabajo neto hecho por las fuerzas externas sobre un objeto es igual al cambio en su energía cinética total, que es la suma de las energías cinéticas de traslación y de rotación.

Por ejemplo, cuando un pitcher lanza una pelota, el trabajo hecho por las manos del pitcher aparece como energía cinética asociada al desplazamiento de la bola a través del espacio así como energía cinética rotacional asociada al giro de la bola.



3. Trabajo, potencia y energía para las rotaciones. Un ejemplo.

6.- El trompo mostrado en la figura P10.62 tiene un momento de inercia de $4.00 \times 10^{-4} \text{kg} \cdot \text{m}^2$ y está inicialmente en reposo. Es libre de rotar alrededor del eje estacionario AA' . Una cuerda, enrollada en la parte superior del mismo, es jalada de tal forma que ejerce una tensión constante de 5.57N . Si la cuerda no se resbala en lo que se desenrolla, ¿cuál es la rapidez angular del trompo después de que se han desenrollado 80.0cm de la cuerda?

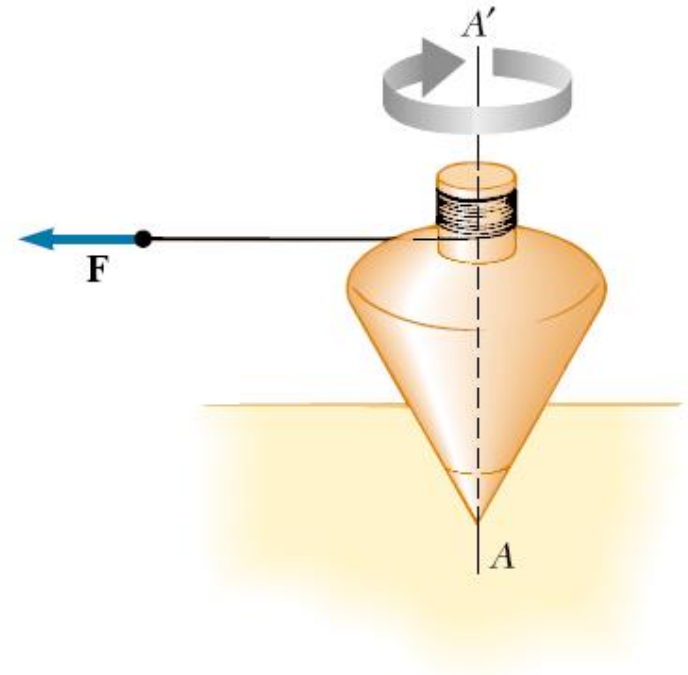


Figure P10.62

3. Trabajo, potencia y energía para las rotaciones. Un ejemplo.

Con la información dada, podemos calcular el trabajo externo realizado sobre el trompo, a saber

$$W_T = Fd \cos\theta = (5.57\text{ N})(0.80\text{ m}) = 4.456\text{ J}$$

este trabajo debe ser igual al cambio de energía cinética, por lo que

$$W_T = \frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2 = \frac{1}{2} I \omega_f^2$$

de donde

$$\omega_f = \sqrt{\frac{2W_T}{I}} = \sqrt{\frac{2(4.456\text{ J})}{4.00 \times 10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}^2}}$$

es decir

$$\omega_f = 149.2649 \text{ rad/s}$$

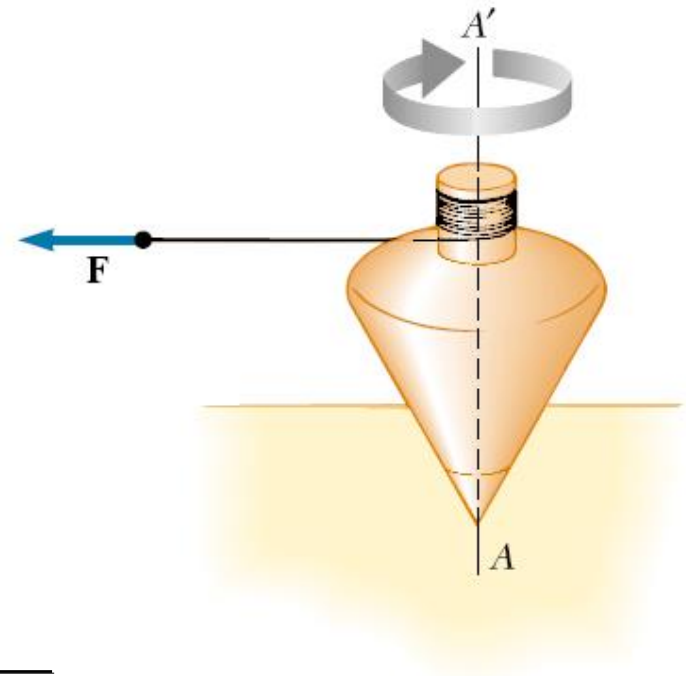
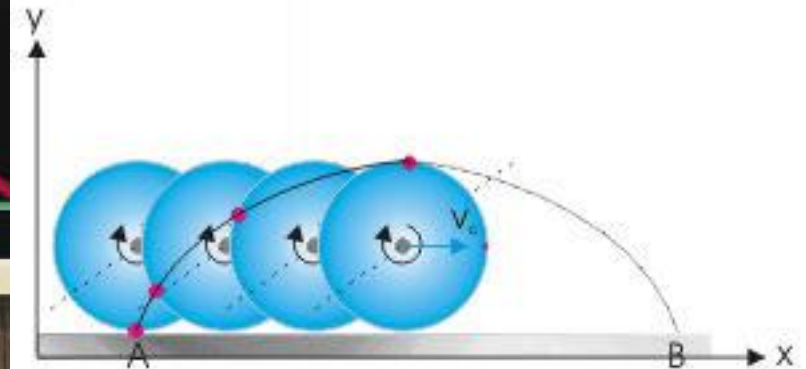
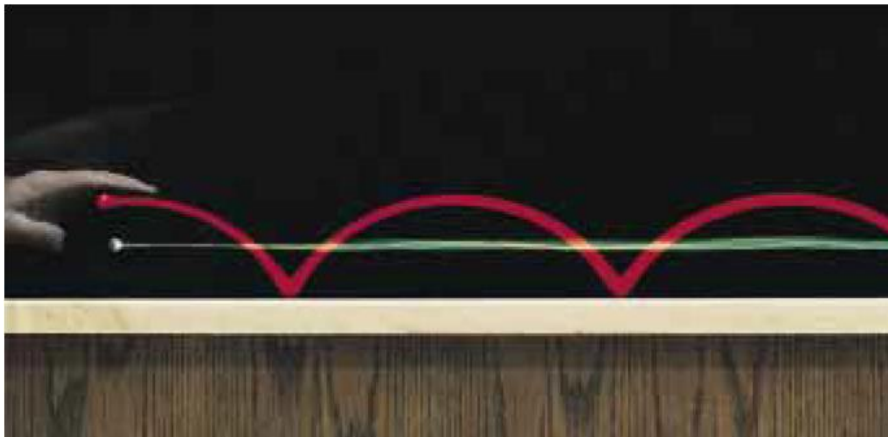


Figure P10.62

4. Movimientos de rotación y traslación combinados. Rodamiento.

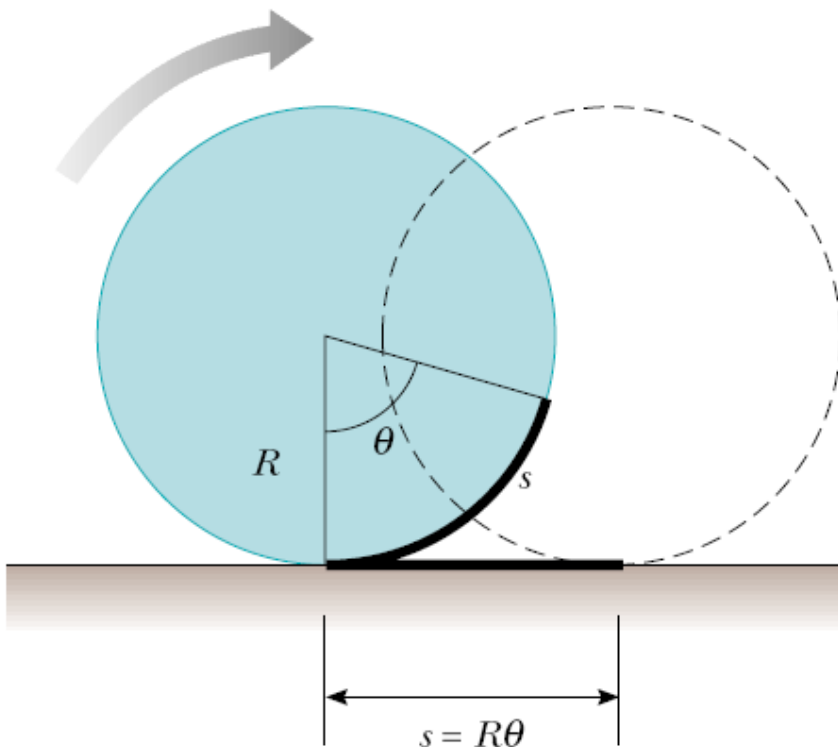
En general, el movimiento combinado de un cuerpo rígido es complejo. Si consideramos el movimiento de un cilindro que rueda, encontramos que un punto en la periferia describe una cicloide, mientras que el centro de masa una trayectoria rectilínea.



Si uno considera un movimiento de rodamiento puro (que el objeto ruede sin resbalar) la descripción se simplifica.

4. Movimientos de rotación y traslación combinados. Rodamiento.

Con la idea anterior, consideremos un cilindro de radio R que rueda sin resbalar sobre una superficie.



Cuando el cilindro rota un ángulo θ , el centro de masa se desplaza una distancia $s = R\theta$, de tal forma que la velocidad del centro de masas, v_{CM} es

$$v_{CM} = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt}$$

4. Movimientos de rotación y traslación combinados. Rodamiento.

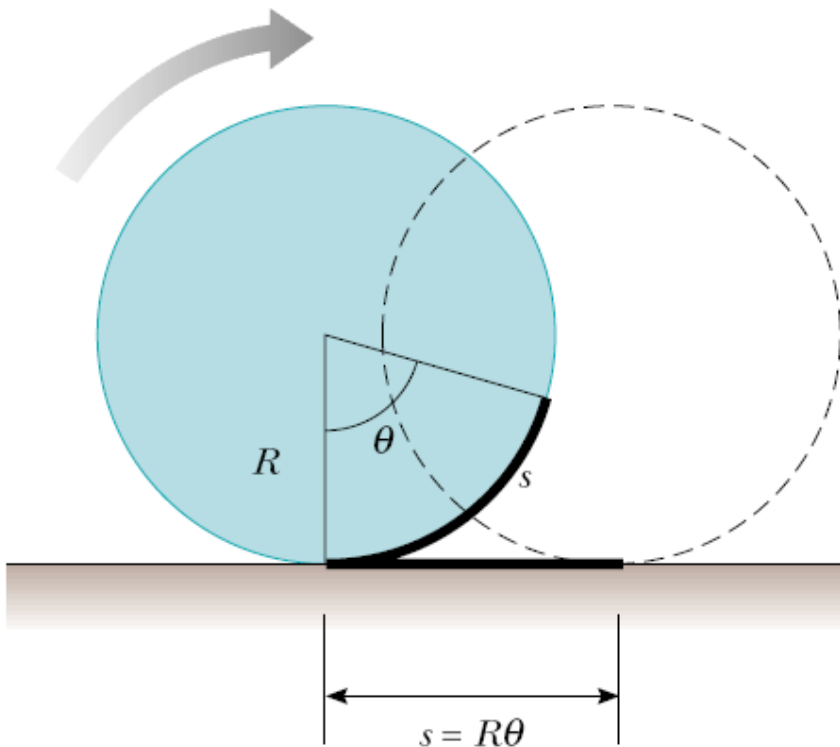
La expresión anterior nos conduce a la llamada *condición de rodamiento puro*

$$v_{CM} = R\omega$$

donde ω es la rapidez angular del cilindro (aplicable también para una esfera).

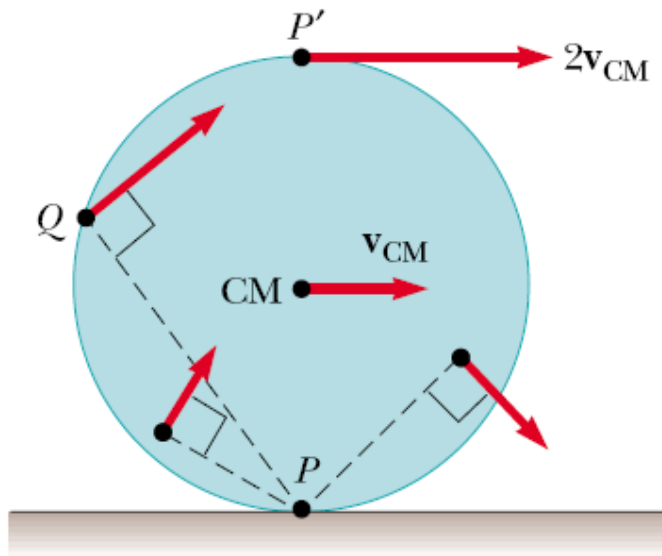
Con lo anterior, la aceleración del centro de masa es

$$a_{CM} = R\alpha$$



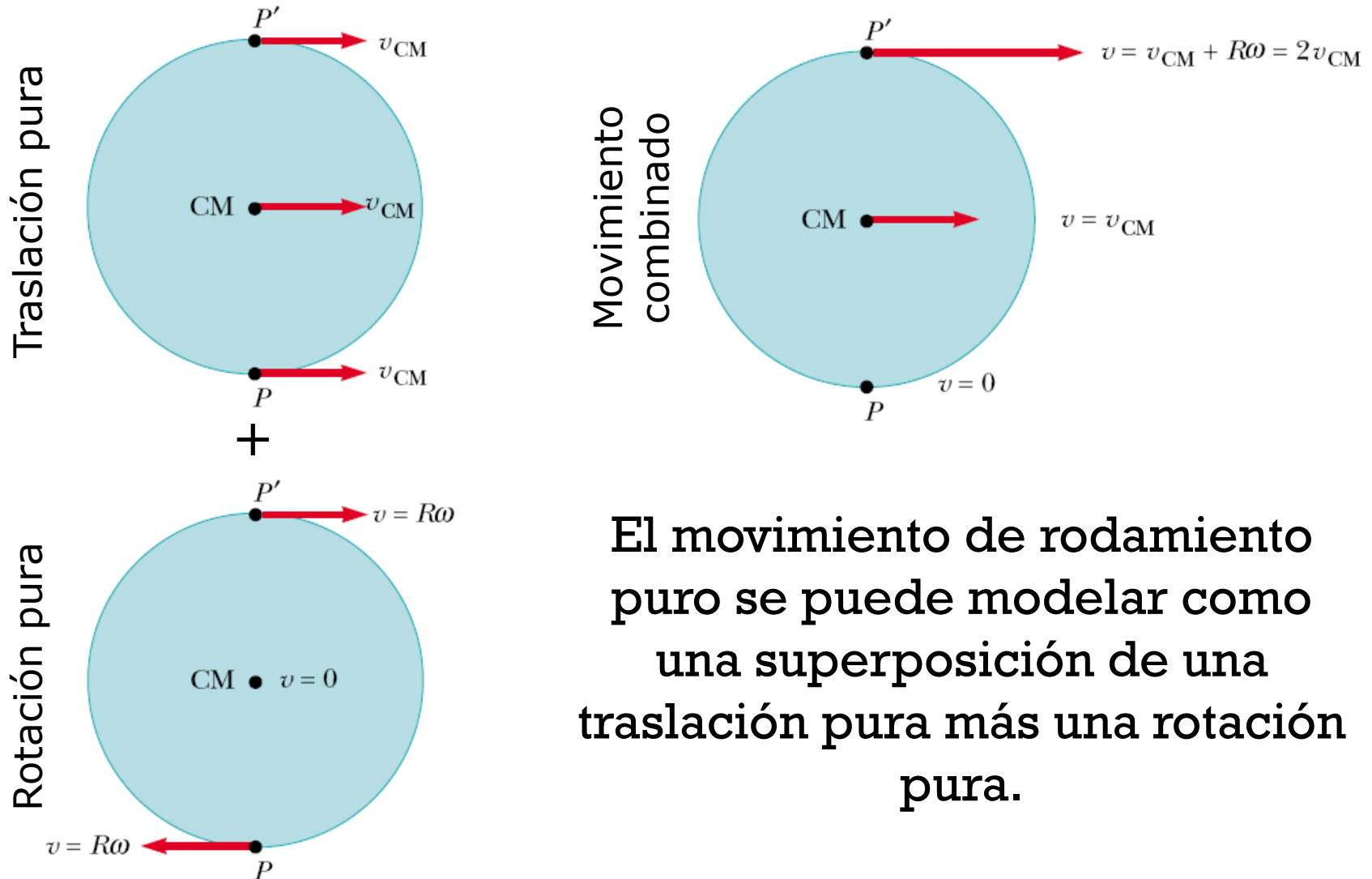
4. Movimientos de rotación y traslación combinados. Rodamiento.

En un instante dado, el punto que está en contacto con el piso está, momentáneamente, en reposo, así que podemos considerarlo como un pivote alrededor del cual, el cuerpo está rotando.



Con lo anterior, podemos establecer que cualquier punto del objeto tiene una velocidad perpendicular a un eje que pasa por dicho punto y por el pivote, tal como se muestra en el esquema anexo.

4. Movimientos de rotación y traslación combinados. Rodamiento.



El movimiento de rodamiento puro se puede modelar como una superposición de una traslación pura más una rotación pura.

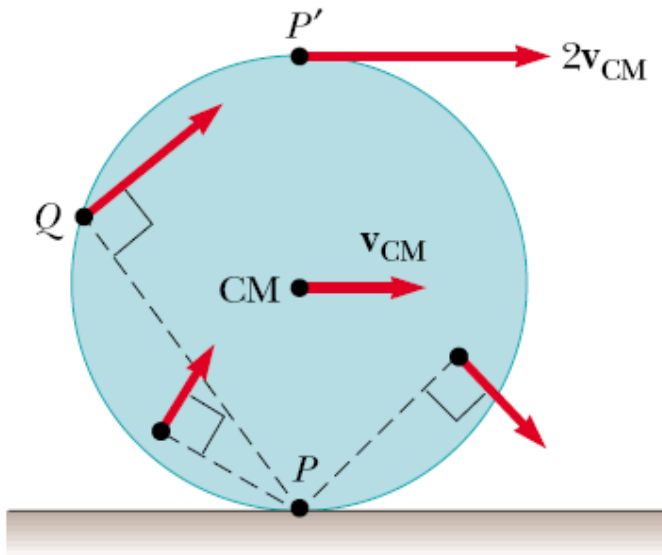
4. Movimientos de rotación y traslación combinados. Rodamiento.

Si regresamos al esquema inicial, en el que hemos supuesto el punto de contacto con la superficie instantáneamente fijo, podemos calcular la energía cinética como

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2$$

y aplicando el teorema de ejes paralelos, podemos escribir

$$K = \frac{1}{2} (I_{CM} + MR^2) \omega^2$$

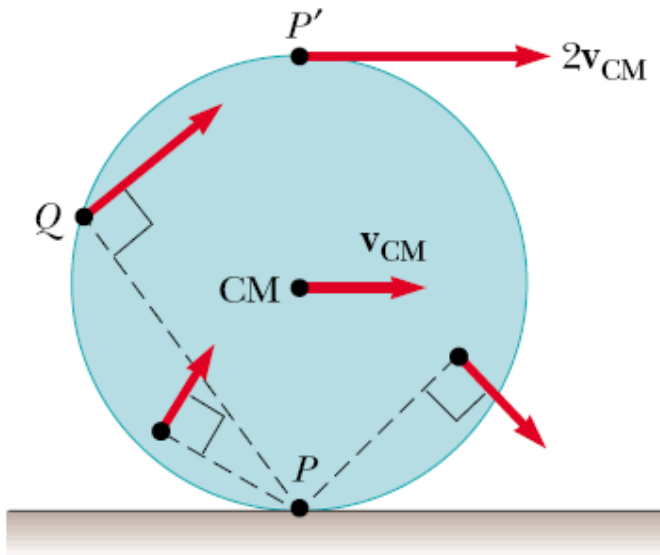


4. Movimientos de rotación y traslación combinados. Rodamiento.

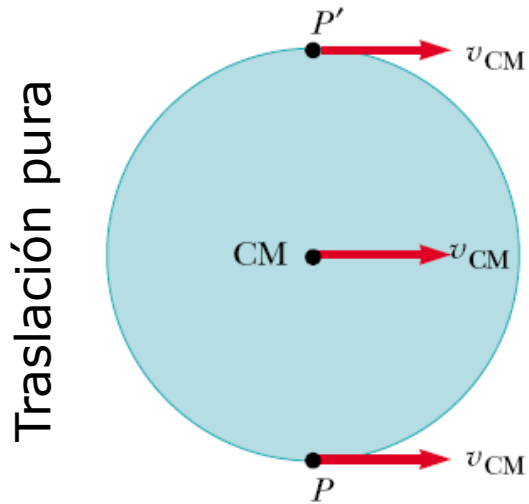
La expresión anterior puede ser reescrita, usando la condición de rodamiento puro, como

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

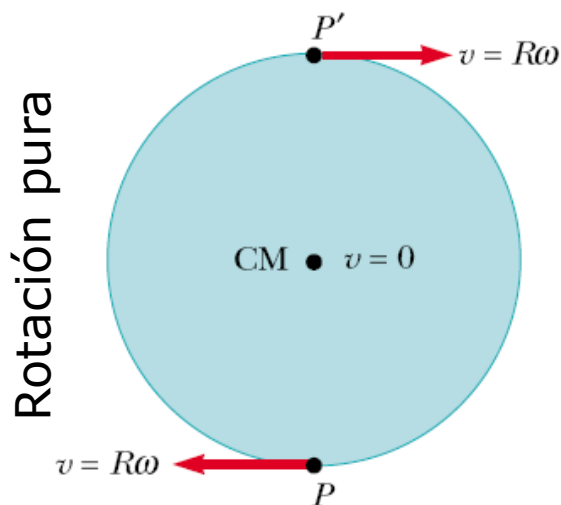
La energía cinética total de un cuerpo en rodamiento puro es la suma de la energía cinética rotacional alrededor de su centro de masa mas la energía cinética traslacional de su centro de masa.



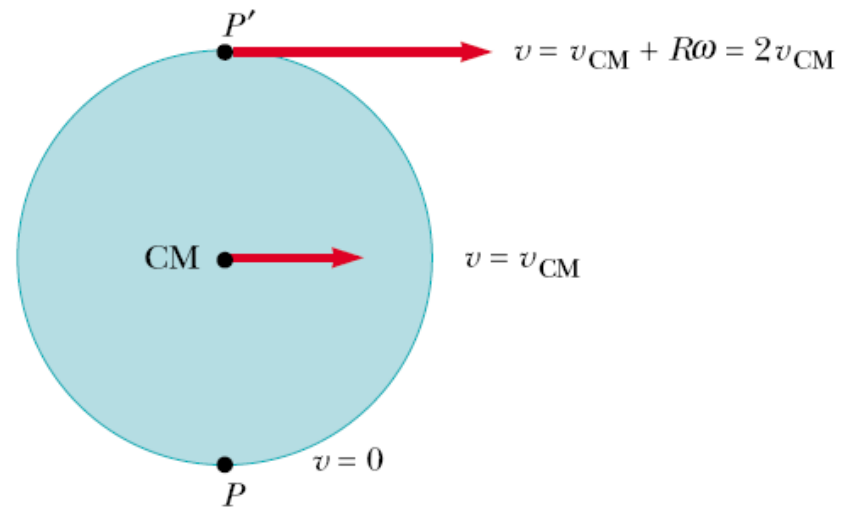
4. Movimientos de rotación y traslación combinados. Rodamiento.



+



Movimiento
combinado



De nueva cuenta, el movimiento de rodamiento puro se puede modelar como la superposición de una traslación pura más una rotación pura.

$$K_{Traslacional} + K_{Rotacional} = K_{Rodamiento}$$

4. Movimientos de rotación y traslación combinados. Rodamiento. Un ejemplo.

7.- Una pelota de tenis es una esfera hueca con una pared delgada. Se pone a rodar sin deslizar a 4.03m/s sobre la sección horizontal de una pista, como se muestra en la Figura P10.56. Rueda por la parte interior de un trazo circular vertical de 90.0cm de diámetro y finalmente abandona la pista en un punto 20.0cm por debajo de la sección horizontal.

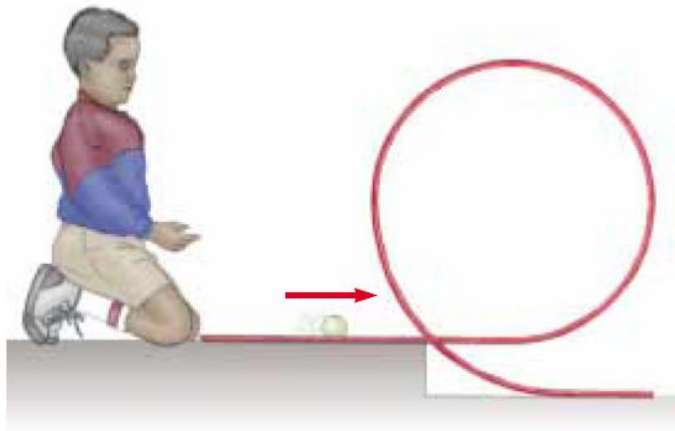


Figure P10.56

(a) Encuentre la rapidez de la pelota en la parte superior del trazo vertical. Demuestre que no se cae de la pista. (b) Encuentra su rapidez al abandonar la pista. (c) ¿Qué pasa si supone que la fricción estática entre la pelota y la pista es despreciable, tal que la pelota en vez de rodar, se desliza? ¿Cómo sería la velocidad en la parte superior del trazo vertical? ¿Mayor, menor o igual? Explique

4. Movimientos de rotación y traslación combinados. Rodamiento. Un ejemplo.

(a) Iniciamos con un análisis de la energía al inicio y al momento de alcanzar el punto más alto, considerando el sistema de coordenadas mostrado, lo que permite escribir

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega_2^2 + mgy_2$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}mR_p^2\right)\left(\frac{v_1}{R_p}\right)^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}mR_p^2\right)\left(\frac{v_2}{R_p}\right)^2 + mg(2R)$$

es decir

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{3}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{3}mv_2^2 + mg(2R)$$

de donde

$$v_2 = \sqrt{\frac{5v_1^2 - 12gR}{5}}$$

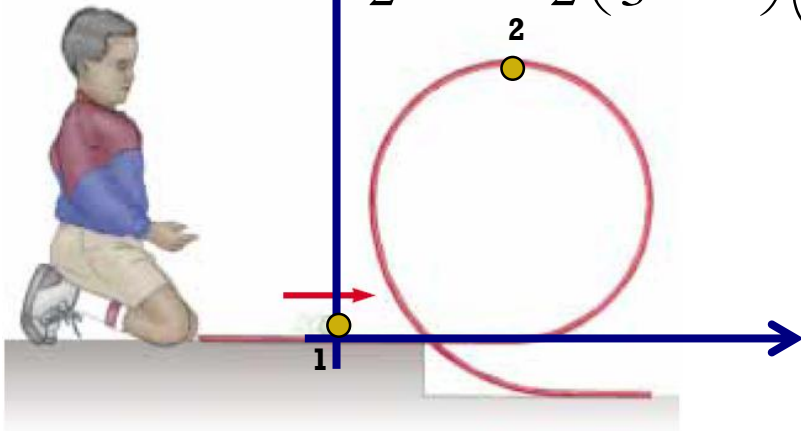


Figure P10.56

4. Movimientos de rotación y traslación combinados. Rodamiento. Un ejemplo.

Numéricamente

$$v_2 = \sqrt{\frac{5(4.03 \text{ m/s})^2 - 12(9.80665 \text{ m/s}^2)(0.45 \text{ m})}{5}} = 2.3769 \text{ m/s}$$

Para demostrar que no cae, basta hacer un análisis de fuerzas en el punto 2, a saber

$$\sum F_y = -N - mg = -m \frac{v_2^2}{R}$$

de donde

$$N = m \left(\frac{v_2^2}{R} - g \right) > 0$$

Por lo que al existir una fuerza Normal tenemos que el contacto se mantiene.

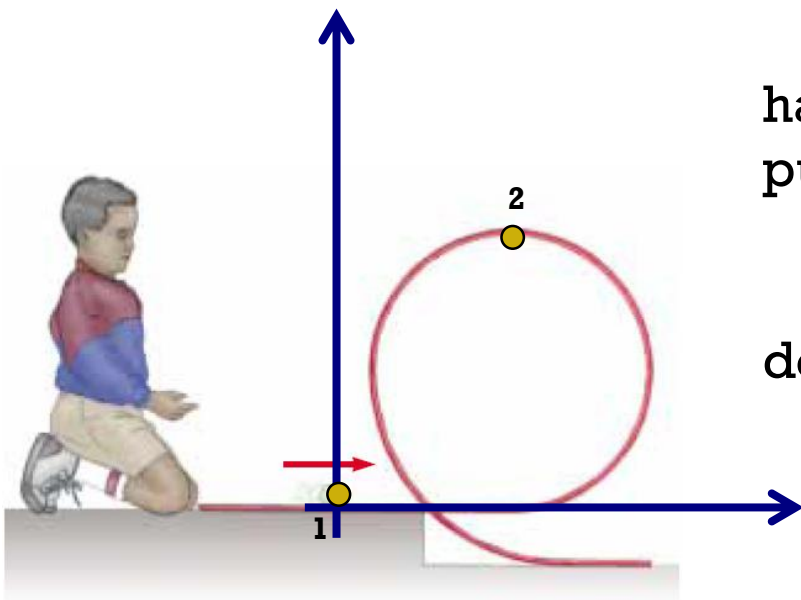


Figure P10.56

4. Movimientos de rotación y traslación combinados. Rodamiento. Un ejemplo.

(b) Para esta parte, hagamos ahora el análisis de la energía al inicio (punto 1) y al momento de abandonar la pista (punto 3), considerando el sistema de coordenadas ya mostrado, para escribir

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_3^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega_3^2 + mgy_3$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}mR_p^2\right)\left(\frac{v_1}{R_p}\right)^2 = \frac{1}{2}mv_3^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}mR_p^2\right)\left(\frac{v_3}{R_p}\right)^2 + mgy_3$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{3}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_3^2 + \frac{1}{3}mv_3^2 + mgy_3$$

de donde

$$v_3 = \sqrt{\frac{5v_1^2 - 6gy_3}{5}}$$

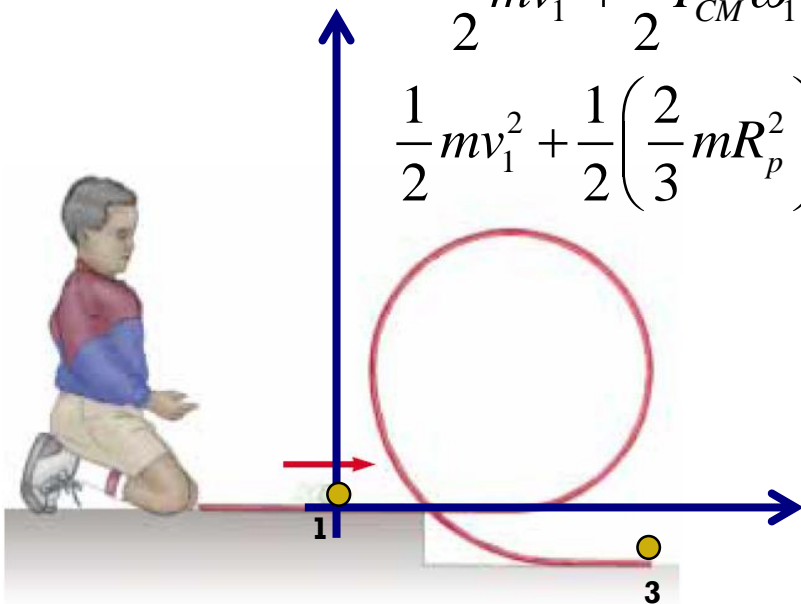


Figure P10.56

4. Movimientos de rotación y traslación combinados. Rodamiento. Un ejemplo.

Numéricamente

$$v_3 = \sqrt{\frac{5(4.03 \text{ m/s})^2 - 6(9.80665 \text{ m/s}^2)(-0.20 \text{ m})}{5}}$$

Es decir

$$v_3 = 4.3121 \text{ m/s}$$

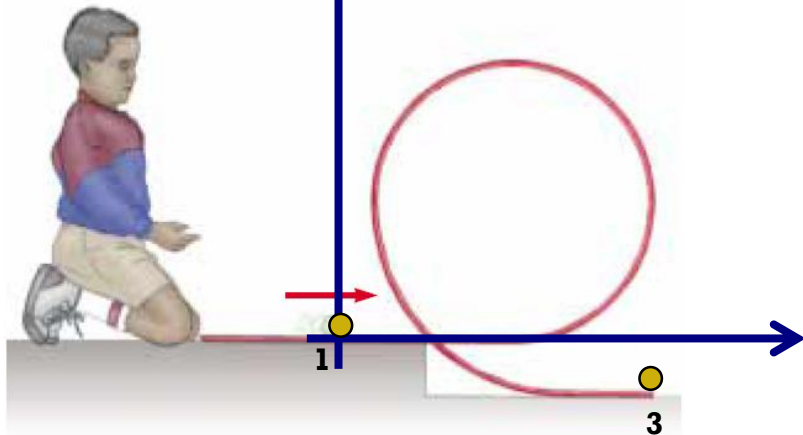


Figure P10.56

Que corresponde a una velocidad mayor a la inicial (como era de esperarse, al perder energía potencial).

4. Movimientos de rotación y traslación combinados. Rodamiento. Un ejemplo.

(c) Finalmente, si consideramos que no hay fricción y que la pelota resbala, en vez de deslizar, tenemos que el análisis de la energía al inicio y al momento de alcanzar el punto más alto, considerando el sistema de coordenadas ya mostrado, resulta ser

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2$$

es decir

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mg(2R)$$

de donde

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - 4gR} = \sqrt{-1.4111 \frac{m^2}{s^2}}$$

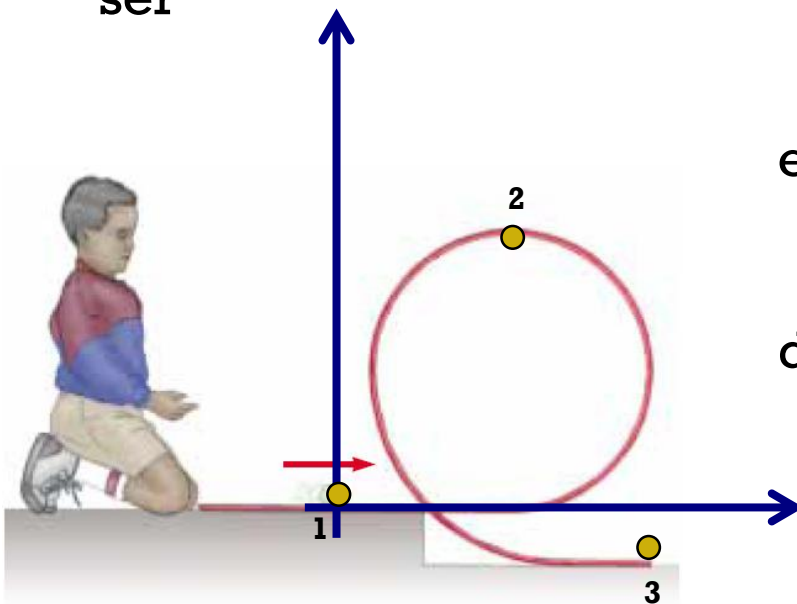


Figure P10.56

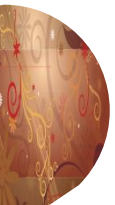
Numéricamente, v_2 resulta ser imaginario, lo que significa que no alcanza a llegar al punto más alto.

5. Torca y Momento angular.

El momento angular es una cantidad fundamental en la dinámica rotacional.

En lo que sigue, veremos algunos aspectos importantes del momento angular L y su conservación.

Antes de introducir este concepto, haremos un resumen del producto de dos vectores conocido como producto vectorial o *producto cruz*, debido a la naturaleza vectorial del momento angular, producto de su relación con el momento lineal, p .

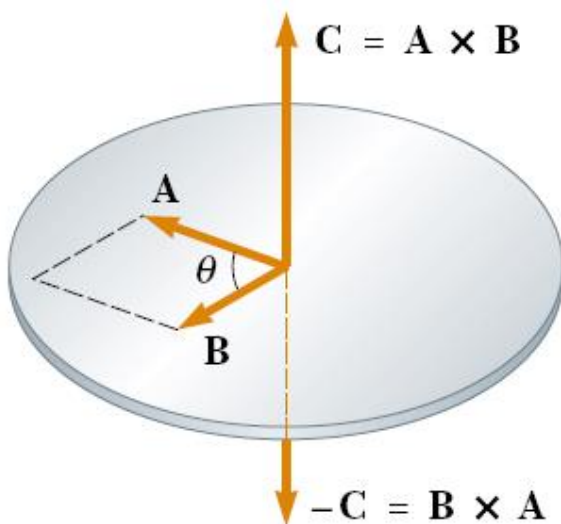


5. Torca y Momento angular.

En general, el producto vectorial o producto cruz de dos vectores A y B se define como otro vector $C = A \times B$ cuya magnitud es

$$C = |\vec{A} \times \vec{B}| = AB \text{Sen} \theta$$

donde θ es el ángulo entre A y B ; y cuya dirección es



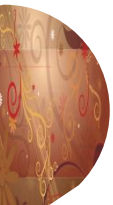
perpendicular al plano formado por los vectores A y B de acuerdo con la regla de la mano derecha.

5. Torca y Momento angular.

De la definición anterior, podemos advertir que el producto cruz tiene las siguientes propiedades:

- A diferencia del producto escalar, el producto vectorial NO es conmutativo, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$.
- Si los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} son paralelos, entonces $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|=0$; lo anterior garantiza que $\mathbf{A} \times \mathbf{A}=\mathbf{0}$.
- Si los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} son perpendiculares, entonces $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|=AB$.
- El producto vectorial satisface la propiedad distributiva, $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$.
- La derivada de un producto vectorial se escribe como

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}$$



5. Torca y Momento angular.

Aplicando estas propiedades a los vectores unitarios \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} , encontramos las siguientes relaciones:

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

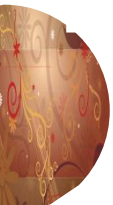
$$\hat{i} \times \hat{j} = -\hat{j} \times \hat{i} = \hat{k}$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = -\hat{k} \times \hat{j} = \hat{i}$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = -\hat{i} \times \hat{k} = \hat{j}$$

Operativamente podemos calcular el producto vectorial como

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

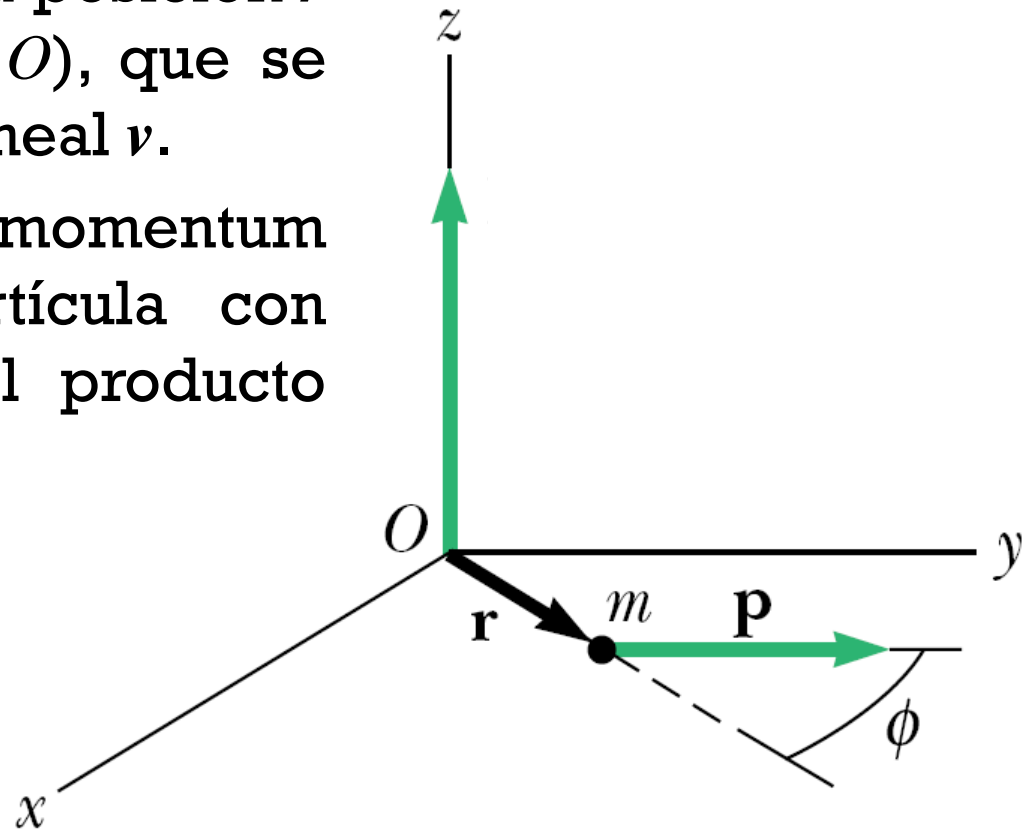


5. Torca y Momento angular.

Supongamos una partícula con masa m , localizada en la posición r (respecto a un origen O), que se mueve con velocidad lineal v .

Definimos el momentum angular L de la partícula con respecto a O como el producto vectorial

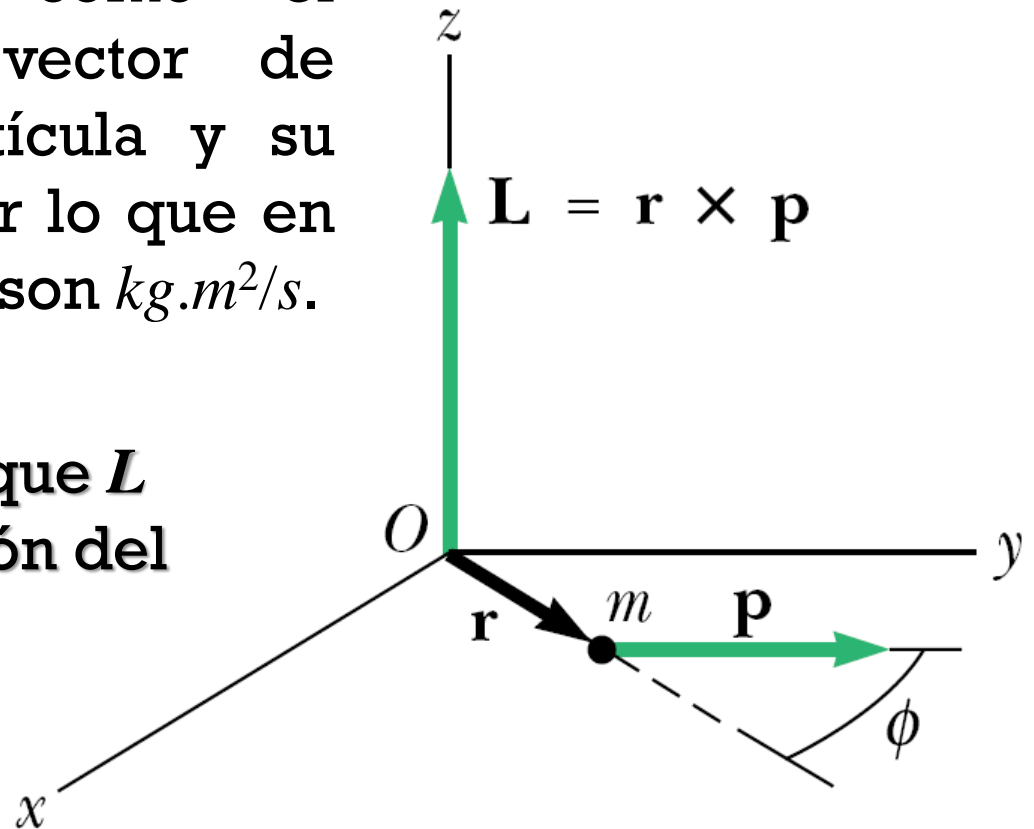
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$



5. Torca y Momento angular.

En palabras, el momentum angular se define como el producto cruz del vector de posición r de la partícula y su momentum lineal p ; por lo que en el SI, las unidades de L son $kg.m^2/s$.

Es importante notar que L depende de la elección del origen.



5. Torca y Momento angular.

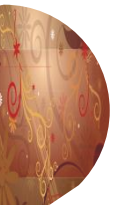
Continuando con la idea vectorial, recordemos que la Segunda Ley de Newton para el movimiento traslacional de una partícula se escribe como

$$\sum_i \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

donde el momento lineal \mathbf{p} está dado por

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Ahora vamos a mostrar que la torca neta que actúa sobre una partícula es igual al cambio temporal del momento angular \mathbf{L} .



5. Torca y Momento angular.

Para demostrar lo anterior, partamos de la definición de momento angular para calcular su derivada temporal

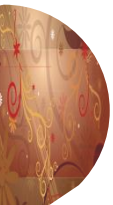
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

El primer término se anula (¿porqué?), con lo que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

y usando la Segunda Ley, podemos reescribir

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \left(\sum_i \vec{F} \right)$$



5. Torca y Momento angular.

El término de la derecha puede ser identificado como la suma de torcas (o torca total), con lo que llegamos al resultado que se busca

$$\sum_i \vec{\tau} = \vec{\tau}_{Total} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

La rapidez del cambio del momentum angular de una partícula es igual a la torca neta aplicada a ella.

Este resultado es el equivalente rotacional de la Segunda Ley de Newton para una partícula, escrita en su forma más general y válida sólo en un marco de referencia inercial.

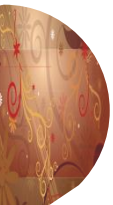
5. Torca y Momento angular.

El resultado anterior es válido para el caso de un sistema de partículas. Si consideramos un sistema de n partículas, cada una con un momento angular L_i , el momento angular total se define como la suma vectorial

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i$$

mientras que la torca neta es igual a la torca externa, así que

$$\vec{\tau}_{Ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

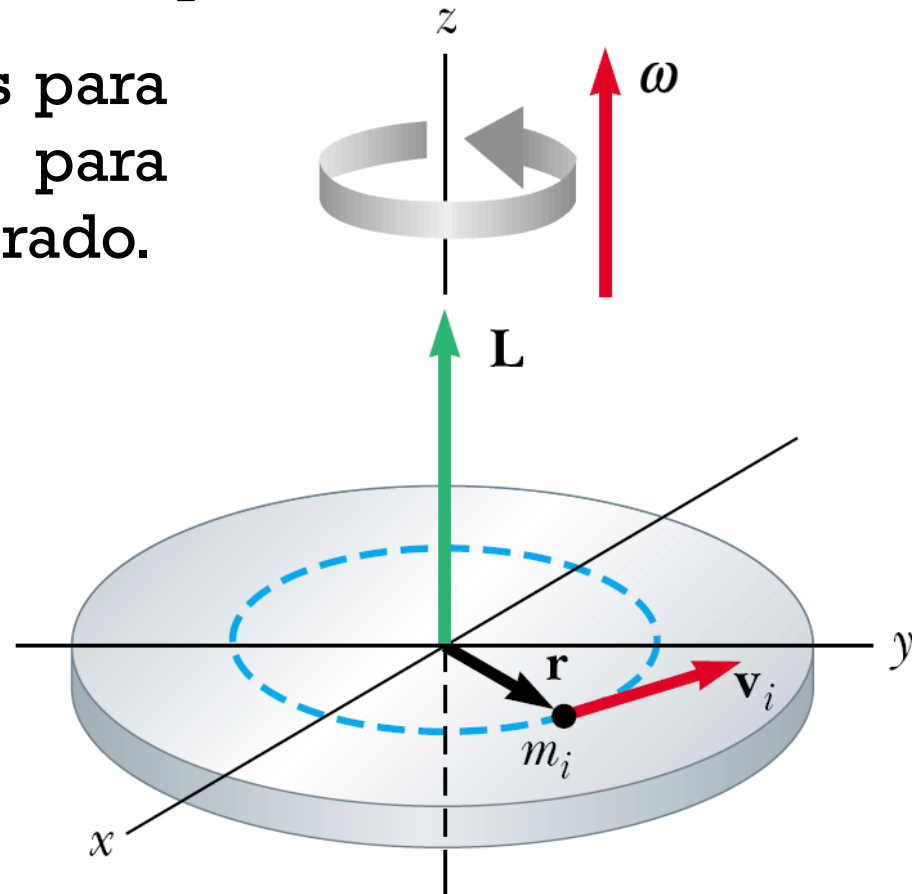


5. Torca y Momento angular.

Hasta este momento hemos considerado el caso de una partícula y el de un sistema de partículas.

A continuación lo haremos para un cuerpo rígido que rota; para ello usemos el esquema mostrado.

Considerando que el cuerpo rota con una rapidez angular ω , podemos dividirlo en un gran número de partículas de masa m_i que giran con la misma rapidez ω .



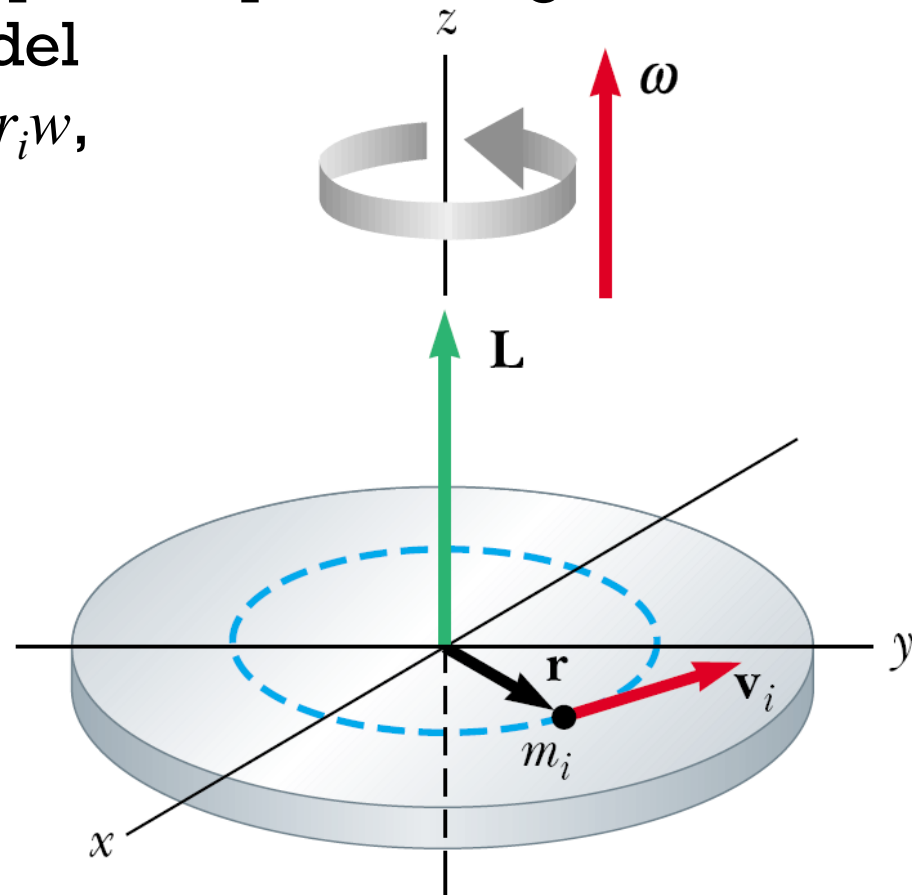
5. Torca y Momento angular.

Cada partícula rota en el plano xy con una rapidez angular ω en torno al eje z , por lo que la magnitud del momento angular alrededor del origen es $r_i(m_i v_i)$, y como $v_i = r_i \omega$, podemos escribir

$$L_i = m_i r_i^2 \omega$$

dirigido en la dirección z , tal como se muestra.

Para considerar al cuerpo rígido en toda su extensión será necesario sumar sobre todas las partículas de masa m_i .



5. Torca y Momento angular.

Dicha sumatoria resulta ser

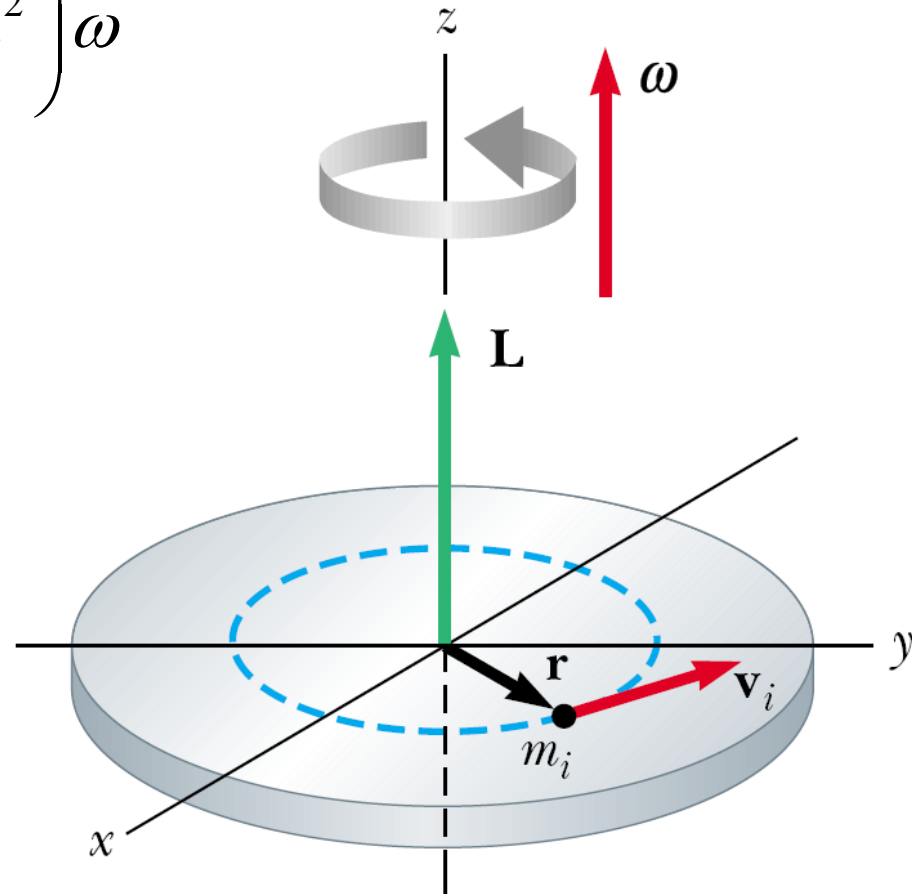
$$L = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega$$

o

$$L = I\omega$$

Que es un vector dirigido en la dirección z , tal como se muestra, pudiendo reescribirse como

$$\vec{L} = L_z \hat{k} = I\omega \hat{k} = I\vec{\omega}$$



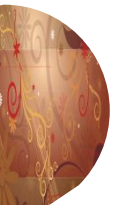
6. Conservación del momento angular.

El momento angular es un concepto importante en la Física porque, bajo ciertas condiciones, es una cantidad que se conserva. La pregunta es: ¿cuáles son estas condiciones?

Para responder esta pregunta, es necesario retomar la expresión previamente estudiada, y válida para una rotación alrededor de un eje fijo, a saber

$$\vec{\tau}_{Ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

de donde vemos que si $\tau_{Ext} = 0$, entonces L es constante.



6. Conservación del momento angular.

Con ello, podemos decir que “el momentum angular total de un cuerpo en rotación permanece constante si la torca total externa que actúa sobre él es cero”, lo que se conoce el **principio de conservación del momento angular**.

Cuando se tiene una torca neta nula sobre un cuerpo y este está rotando respecto a un eje fijo o respecto a un eje a través de su CM, de tal manera que su dirección no cambia, podemos escribir

$$L = I\omega = I_0\omega_0 = \text{constante}$$

donde se toma en cuenta la posibilidad de que el momento de inercia cambie en el tiempo.



6. Conservación del momento angular.

Un ejemplo de que el momentum angular se conserva, es el movimiento de una patinadora.

En este caso, podemos considerar que el sistema está aislado (si la fricción es despreciable) por lo que, como el momento de inercia I cambia, la rapidez angular ω cambia para mantener constante el momento angular L .

FÍSICA APLICADA

Patinadoras y clavadistas girando

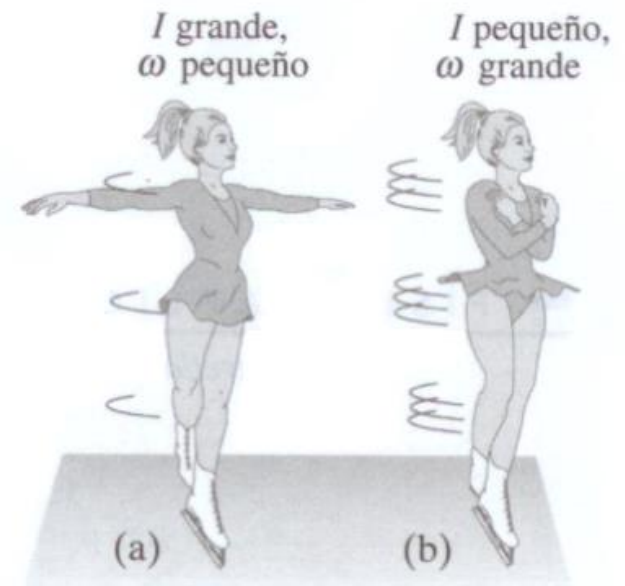


FIGURA 10-29 Una patinadora girando sobre hielo ilustra la conservación del momentum angular: en (a), I es grande y ω es pequeño; en (b), I es más pequeño por lo que ω es mayor.

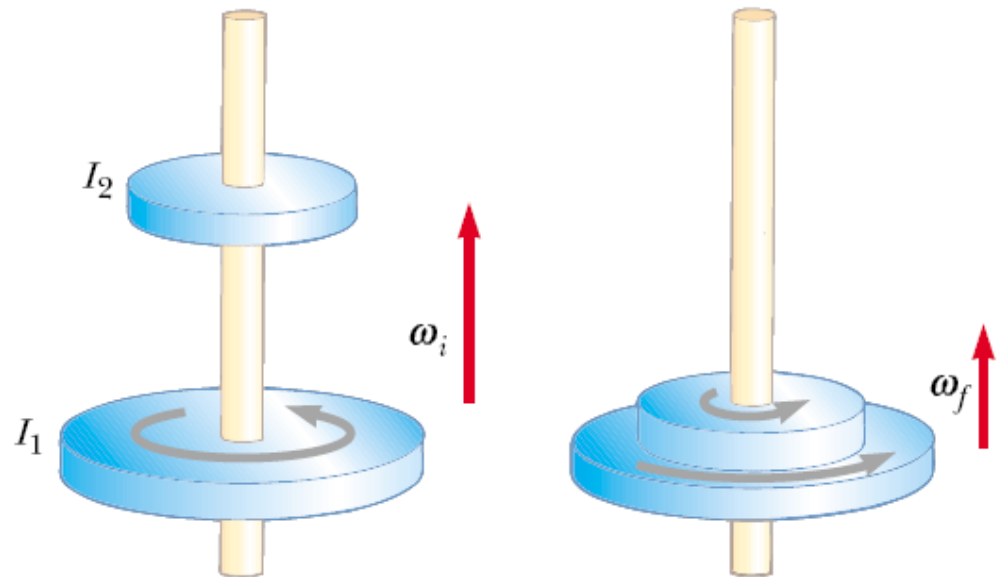
6. Conservación del momento angular.

En el caso de que el sistema esté formado por n partículas (u objetos), la conservación del momento angular nos lleva a escribir

$$\sum_{i=1}^n L_i = \sum_{i=1}^n I_i \omega_i = \sum_{i=1}^n I_{i0} \omega_{i0} = \text{constante}$$

Por ejemplo, para el esquema anexo, se tiene que

$$I_1 \omega_{1i} + I_2 \omega_{2i} = (I_1 + I_2) \omega_f$$



6. Conservación del momento angular.

Con la conservación del momento angular, tenemos tres principios de conservación para un sistema aislado, de gran utilidad en la mecánica clásica, a saber

- conservación de la energía

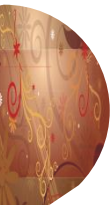
$$E_i = E_f$$

- conservación del momento lineal

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f$$

- conservación del momento angular

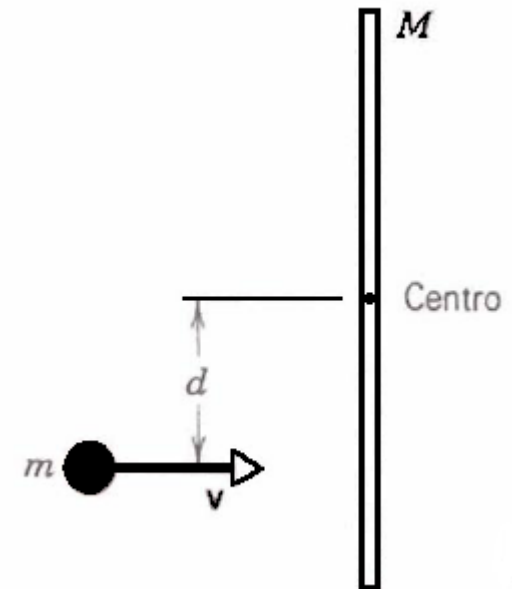
$$\vec{L}_i = \vec{L}_f$$



6. Conservación del momento angular. Ejemplos.

8.- Un barrote de longitud L y masa M está sobre una mesa horizontal sin fricción sobre la cual puede moverse libremente de cualquier modo. Un disco de hule, de los usados en hockey sobre hielo, de masa m y que se mueve con velocidad v , tal como se muestra en la figura, choca elásticamente con el barrote.

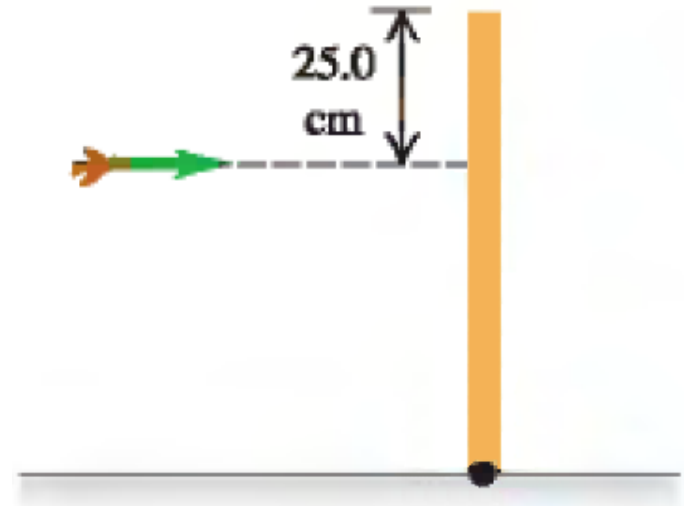
- ¿Qué cantidades se conservan en la colisión?
- ¿Cuál debe ser la masa m del disco de hule con el fin de que permanezca en reposo inmediatamente después de la colisión?



6. Conservación del momento angular. Ejemplos.

9.- Un pájaro con una masa de 500.0g está volando horizontalmente a 2.25m/s, sin poner mucha atención. Repentinamente choca contra una barra vertical a 25.0cm por debajo de su extremo superior. La barra es uniforme, de 0.750m de largo y con una masa de 1.5kg, con una bisagra en su base. La colisión aturde al pájaro, de tal forma que este cae verticalmente, aunque rápidamente se recupera y continua su vuelo.

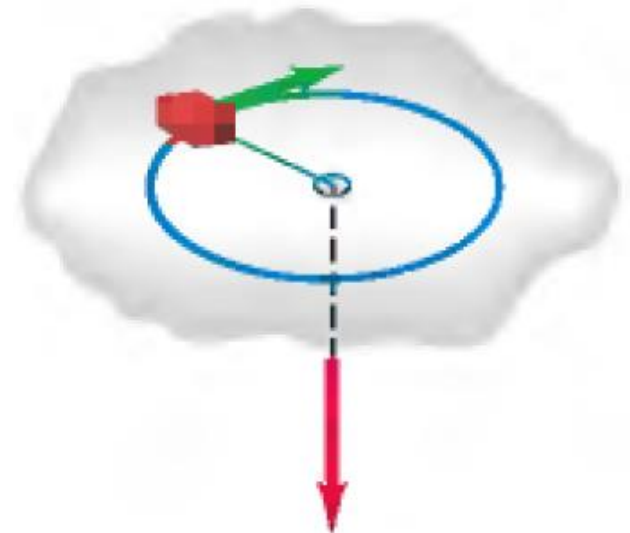
¿Cuál es la velocidad angular de la barra (a) justo después de que es golpeada por el pájaro, y (b) justo cuando golpea el suelo?



6. Conservación del momento angular. Ejemplos.

10.- Un bloque pequeño sobre una superficie horizontal sin fricción tiene una masa de 25.0g está atado a una cuerda sin masa que pasa a través de un agujero en la superficie. El bloque originalmente gira a una distancia de 30cm del agujero con una rapidez angular de 1.75rad/s. A continuación el cordón es jalado a través del agujero, de tal forma que el radio de giro se reduce a 15.0cm. Considere al bloque como una partícula.

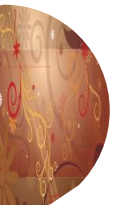
- ¿Se conserva el momento angular?
- ¿Cuál es la nueva rapidez angular?
- ¿Cuánto trabajo se realiza al jalar la cuerda?



6. Conservación del momento angular. Ejemplos.

11.- Una barra uniforme de masa M y longitud L , que permanece en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción, está pivotada en uno de sus extremos mediante un balero sin fricción. Una bala de masa m perpendicular a la barra, la golpea en su centro con una rapidez v quedando incrustada en ella.

- a) ¿Cuál es la rapidez angular final del sistema barra-bala?
- b) Considerando el caso en que la masa de la barra es n veces la masa de la bala, que viaja paralela a la superficie horizontal y, ¿cuál es la razón de la energía cinética del sistema después de la colisión respecto a la energía cinética antes de la colisión?



6. Conservación del momento angular.

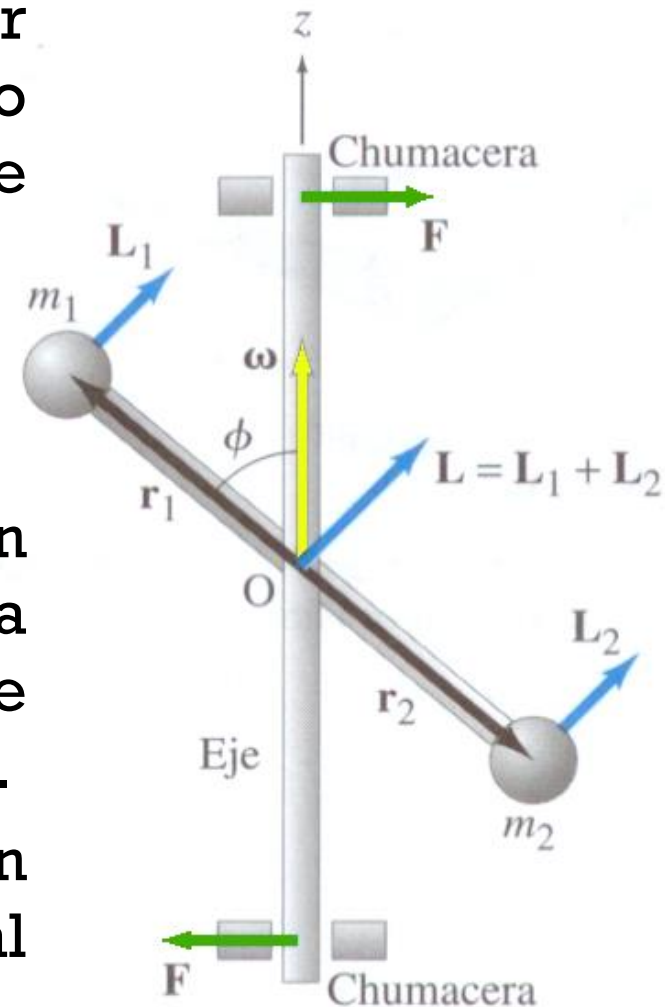
Finalmente es importante analizar qué pasa cuando el cuerpo rígido no es simétrico respecto a su eje de rotación, como se esquematiza.

En este caso, la relación

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

pierde validez ya que L y ω NO son paralelos; por lo que sólo aplica cuando el eje de rotación corresponde a un eje de simetría del cuerpo rígido.

Para poderse utilizar la expresión anterior, se debe considerar al momento de inercia como una matriz.



7. Giróscopos, trompos y el movimiento de precesión.

¿Qué es un giróscopo?

Un giróscopo es un dispositivo mecánico que muestra el principio de conservación del momento angular.



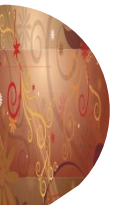
Consiste en una masa con forma de rueda girando alrededor de un eje que, a su vez, está montado sobre un sistema que permite que el eje pueda tomar cualquier orientación. Una vez que está girando tiende a resistirse a los cambios en la orientación del eje de rotación

7. Giróscopos, trompos y el movimiento de precesión.

Una rueda que puede girar libremente sobre un eje, es otro tipo de giróscopo.

Esto permite a personas sin cualidades de equilibristas, conducir bicicletas y motocicletas.

Pocas personas son capaces de mantenerse en equilibrio sobre una bicicleta parada



7. Giróscopos, trompos y el movimiento de precesión.

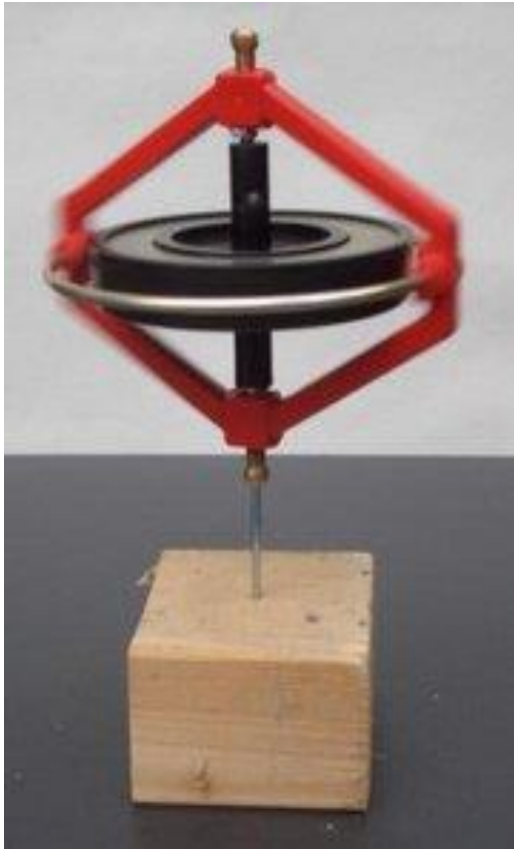


Imagen de un giróscopo girando



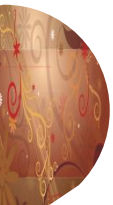
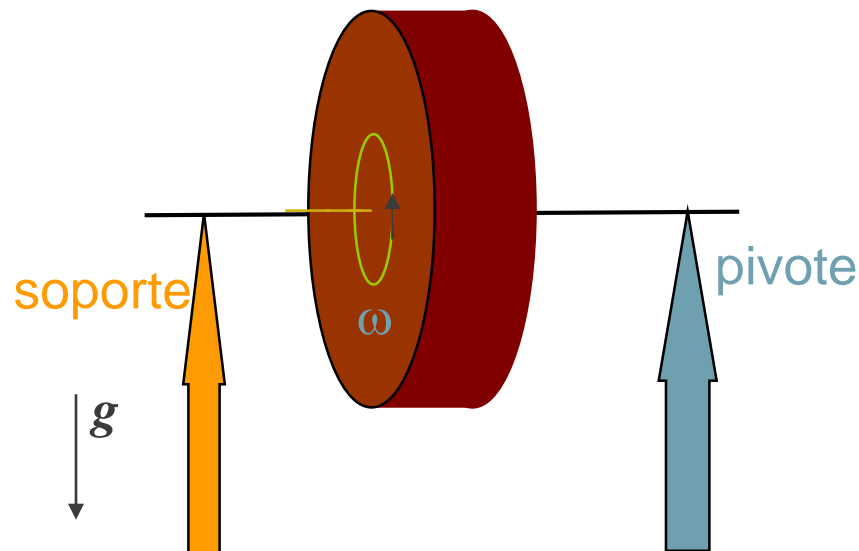
El ciclismo acrobático es posible gracias al efecto giroscópico



7. Giróscopos, trompos y el movimiento de precesión.

Suponga que se tiene un giróscopo girando en la forma esquemática mostrada

Si el soporte de la izquierda se remueve, ¿qué sucederá?



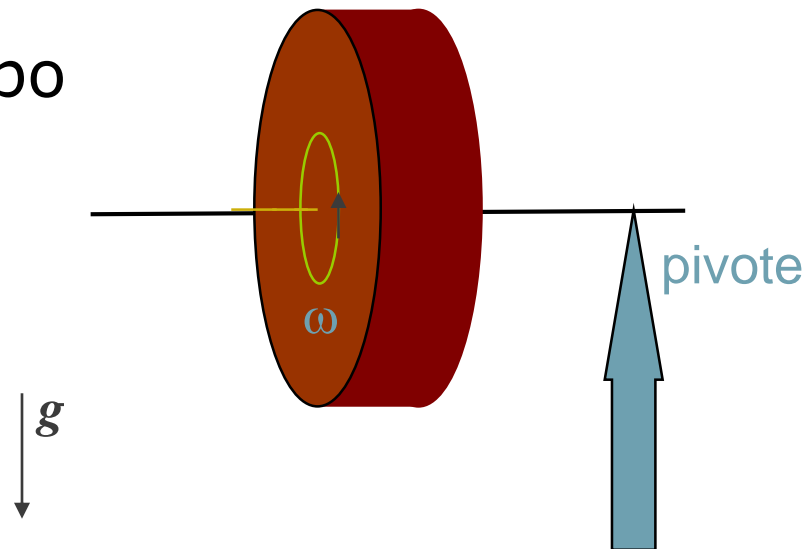
7. Giróscopos, trompos y el movimiento de precesión.

Suponga que se tiene un giróscopo girando en la forma esquemática mostrada

Si el soporte de la izquierda se remueve, ¿qué sucederá?



ii El giróscopo
NO cae !!

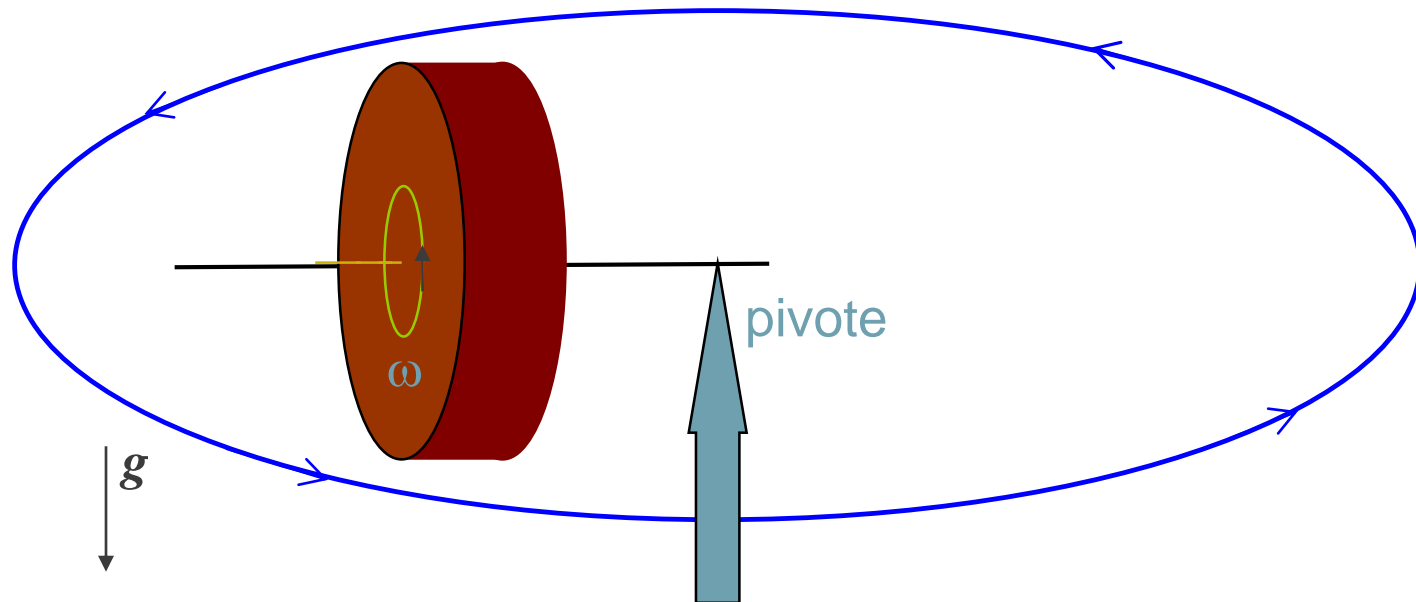


7. Giróscopos, trompos y el movimiento de precesión.

En lugar de caer... precesa alrededor del eje que pasa por el pivote.

Este comportamiento extraño se puede entender fácilmente mediante la relación entre torca y momento angular.

$$\tau_{Ext} = \frac{dL}{dt}$$

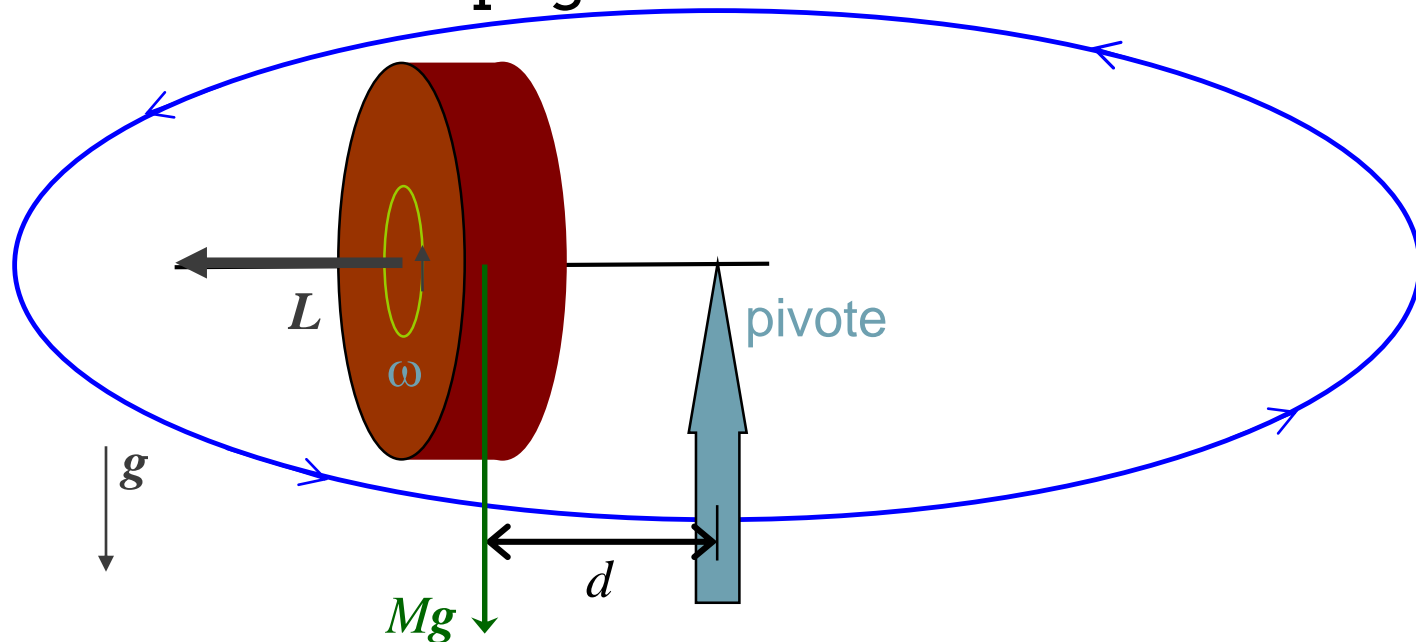


7. Giróscopos, trompos y el movimiento de precesión.

La magnitud de la torca externa, alrededor del pivote, es $\tau_{\text{Ext}} = Mgd$.

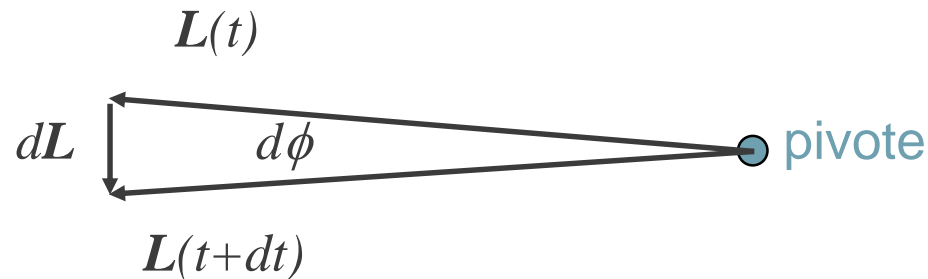
Instantáneamente, el momento angular L tiene la dirección mostrada; sin embargo, su cambio tiene dirección hacia afuera de la página.

$$\tau_{\text{Ext}} = \frac{dL}{dt}$$



7. Giróscopos, trompos y el movimiento de precesión.

Si uno considera una vista superior del esquema, se tiene



La magnitud del cambio en el momento angular en un tiempo dt es $dL = Ld\phi$.

Tal que

$$\frac{dL}{dt} = L \frac{d\phi}{dt} \equiv L\Omega$$

donde Ω es la "frecuencia de precesión"

7. Giróscopos, trompos y el movimiento de precesión.

La segunda Ley de Newton para la rotación nos lleva a

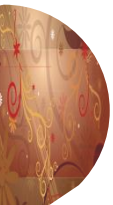
de donde $\tau_{Ext} = \frac{dL}{dt} \Rightarrow \tau_{Ext} = L\Omega$

$$\Omega = \frac{\tau_{Ext}}{L}$$

Frecuencia de precesión
para un giróscopo

En nuestro ejemplo, $\tau = Mgd$ y $L = I\omega$, con lo que la frecuencia de precesión resulta ser

$$\Omega = \frac{Mgd}{I\omega}$$

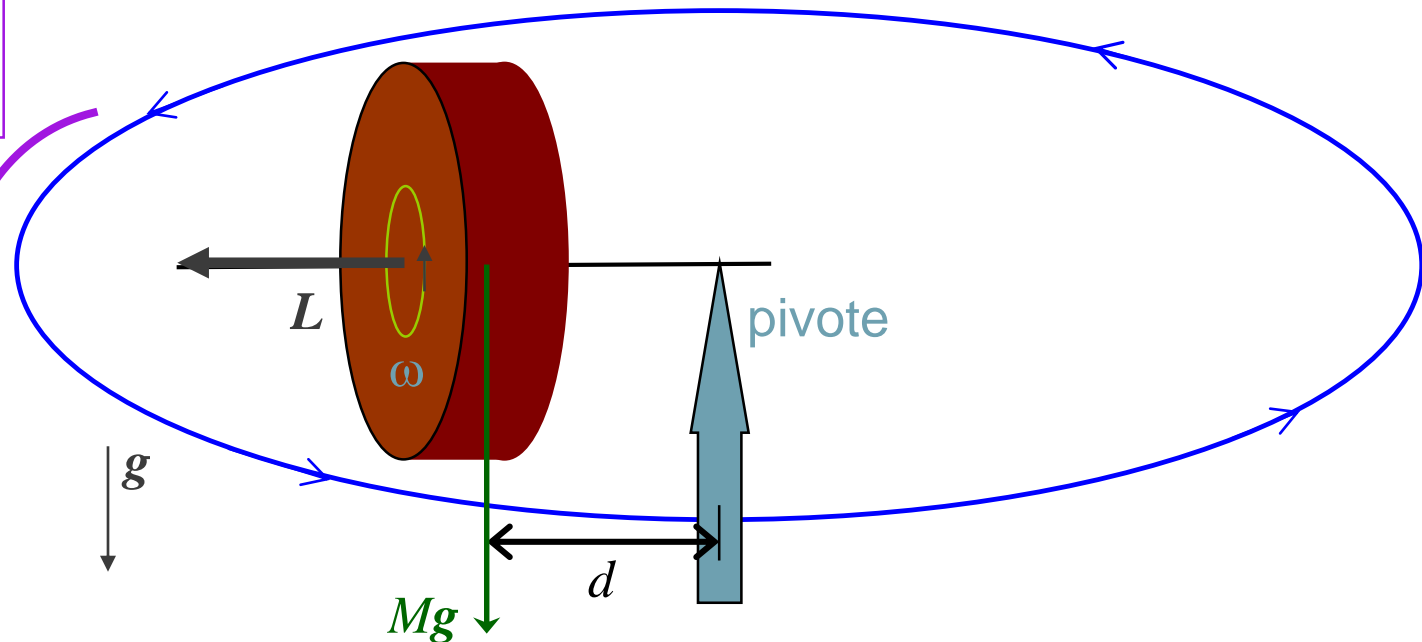


7. Giróscopos, trompos y el movimiento de precesión.

La dirección de la precesión está dada por la aplicación de la regla de la mano derecha para encontrar la dirección de τ_{Ext} y, por lo tanto, de $d\mathbf{L}/dt$.

En este caso:

$$\Omega = \frac{Mgd}{I\omega}$$



7. Giróscopos, trompos y el movimiento de precesión.

Este fenómeno también ocurre al hacer girar un trompo alrededor de su eje de simetría.

El momento angular es

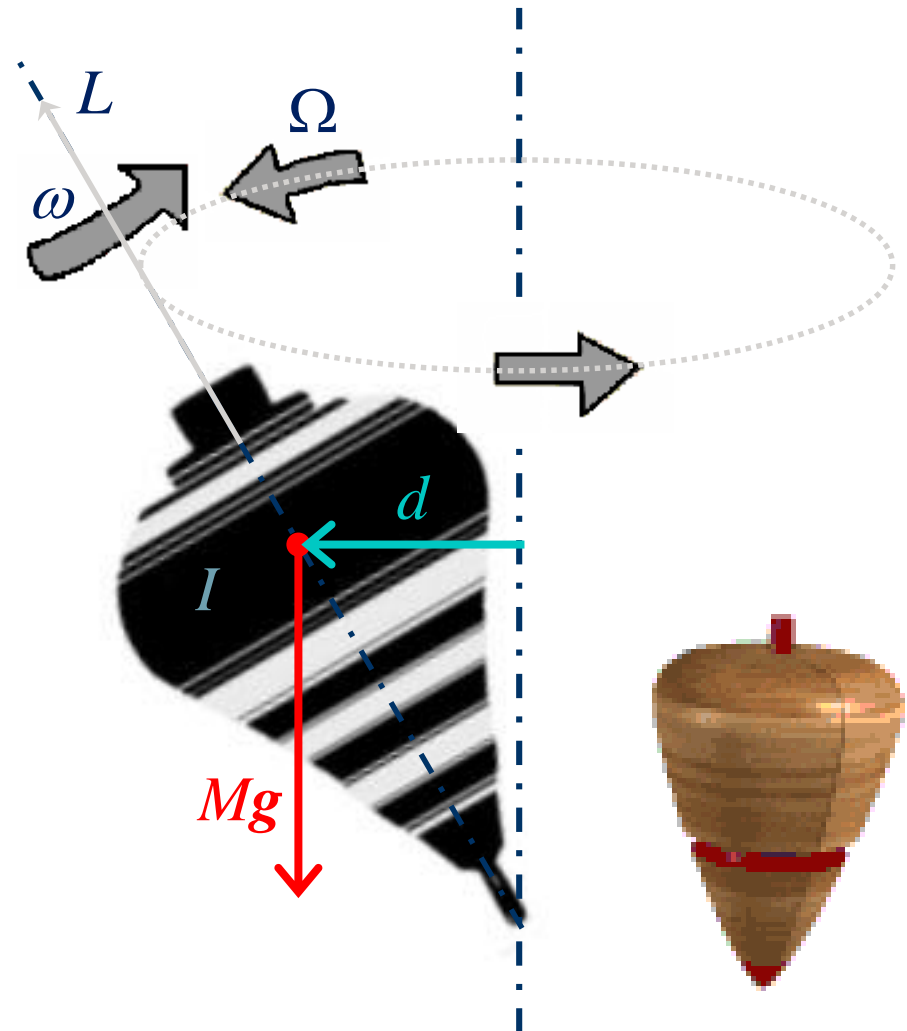
$$L = I\omega$$

mientras que la torca es

$$\tau = (d)(Mg)\text{Sen}90^\circ$$

por lo que la frecuencia de precesión resulta ser

$$\Omega = \frac{Mgd}{I\omega}$$

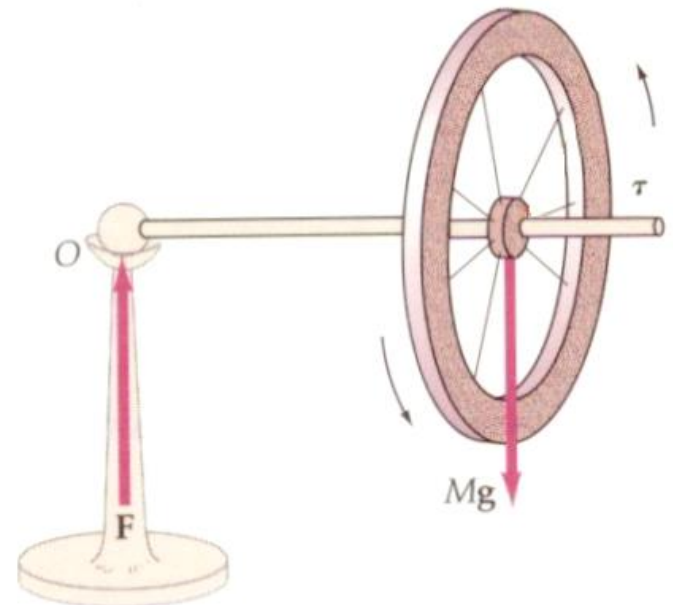


7. Giróscopos, trompos y el movimiento de precesión. Un ejemplo.

14.- La masa de un giróscopo es 2.5kg , y tiene un rotor cuyo momento de inercia es $0.005\text{kg}\cdot\text{m}^2$; la velocidad angular constante de este es $12,000\text{RPM}$. El aparato se coloca sobre un soporte, con su eje de giro propio horizontal, en estas condiciones el centro de masa del sistema está a 6.0cm del apoyo.

Halle la magnitud y dirección de

- El momento de inercia del giróscopo con respecto al soporte
- El momento angular inicial del rotor.
- La velocidad angular de precesión.





Universidad de Sonora
Departamento de Física



"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

Mecánica II

Dr. Roberto Pedro Duarte Zamorano

© 2021