Universidad de Sonora
Departamento de Física

¡Orgullosamente Búhos!

"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

Mecánica II

Dr. Roberto Pedro Duarte Zamorano

© 2021

Temario

1. Cinemática rotacional.
2. Dinámica rotacional.
3. Las leyes de Newton en sistemas de referencia acelerados.
4. La ley de la gravitación de Newton.
5. Oscilaciones.
6. Movimiento ondulatorio.
7. Ondas sonoras.

Temario

1. Cinemática rotacional.
    1. Desplazamiento, velocidad y aceleración angulares.
    2. Movimiento rotacional uniformemente acelerado.
    3. Rotación del cuerpo rígido.
        - i. Energía cinética rotacional.
        - ii. Cálculo del momento de inercia.
        - iii. Teorema de los ejes paralelos.

I. Desplazamiento, velocidad y aceleración angulares. Introducción.

En el estudio del movimiento lineal, los conceptos importantes son el desplazamiento Δx, la velocidad v, y la aceleración a, ya que la combinación de ellos nos permite hacer una descripción completa del movimiento de un objeto.

En lo que sigue veremos que cada uno de estos conceptos tiene su análogo en el movimiento rotacional, a saber, desplazamiento angular $\Delta\theta$, velocidad angular ω, y aceleración angular α.

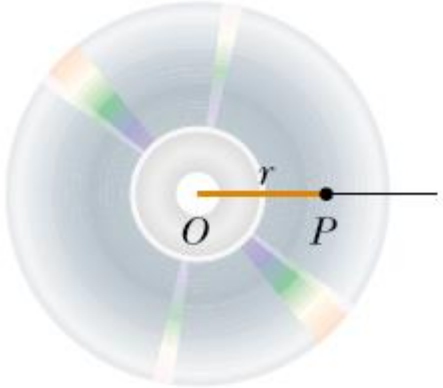
I. Desplazamiento, velocidad y aceleración angulares.

Cuando un objeto extendido, por ejemplo una rueda, rota sobre su eje, el movimiento no puede analizarse si el objeto se trata como partícula, porque en cualquier instante dado diferentes partes del objeto tienen velocidades y aceleraciones lineales diferentes.

Podemos, sin embargo, analizar este movimiento considerando que el objeto extendido está compuesto de una colección muy grande de partículas, cada una con su propia velocidad y aceleración lineales.

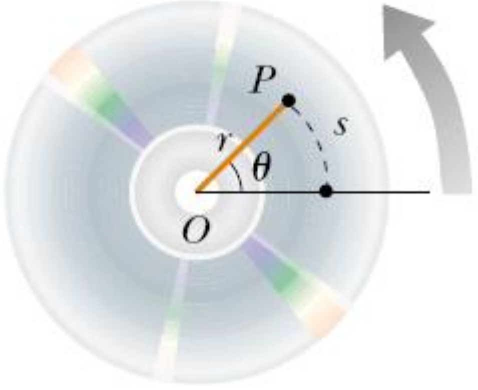
I. Desplazamiento, velocidad y aceleración angulares.

Consideremos, por ejemplo, la rotación de un disco compacto alrededor de un eje perpendicular al plano del mismo, que pasa por el punto O, llamado pivote, tal como se muestra.



(a)

Si analizamos el movimiento de una de las "partículas" que lo componen, ubicada en el punto P, advertimos que conforme el disco rota, dicha partícula se mueve sobre el arco de una circunferencia de radio r centrada en O.



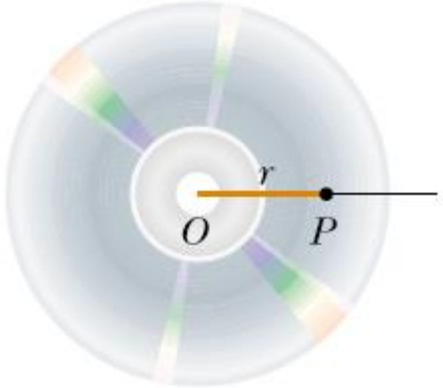
(b)

1. Desplazamiento, velocidad y aceleración angulares.

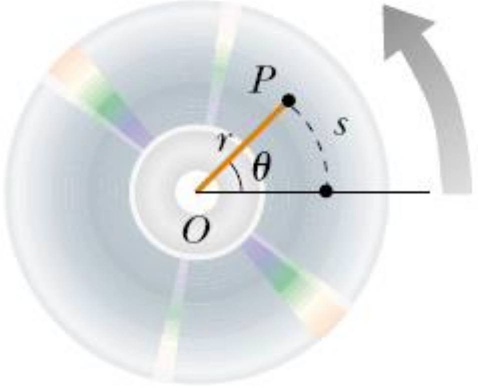
De hecho, todas las partículas del objeto realizan un movimiento circular alrededor del pivote.

Representando la posición de la partícula P en coordenadas polares (r, θ) donde r es la distancia del pivote al punto P, mientras que θ es el ángulo formado a partir del eje polar $(+x)$ medido en la dirección contrarreloj.

En este caso es fácil advertir que la única coordenada que cambia es el ángulo θ, ya que r permanece constante.



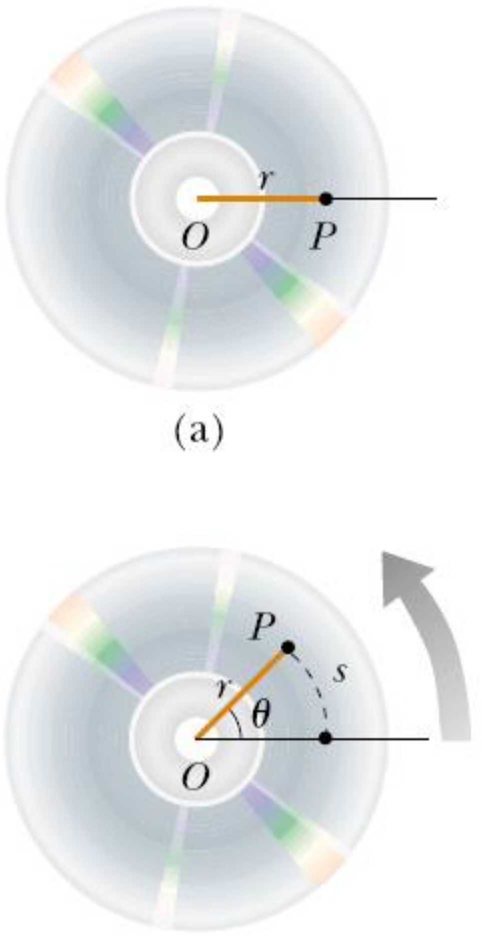
(a)



(b)

1. Desplazamiento, velocidad y aceleración angulares.

Conforme la partícula se mueve en su trayectoria circular esta describe un arco s a partir de una línea de referencia ($\theta = 0$), que también recibe el nombre de *eje polar*.



(a)
(b)

La longitud del arco s se relaciona con el ángulo θ mediante la expresión

$$s = r\theta$$

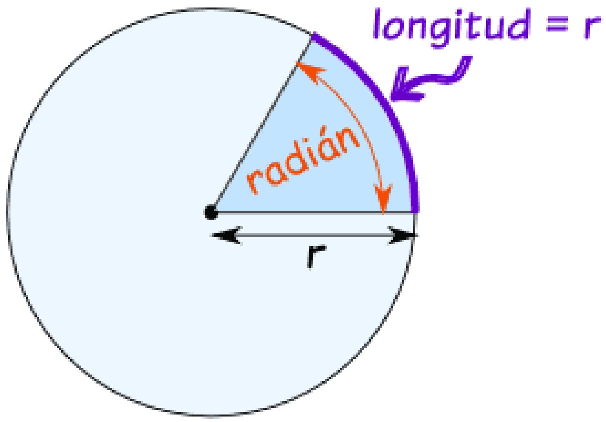
de donde

$$\theta = \frac{s}{r}$$

I.- Desplazamiento, velocidad y aceleración angulares.

A partir de esta última relación, θ resulta adimensional; sin embargo, comúnmente le agregamos la unidad artificial llamada radián (rad).

Se define un radian como el ángulo subtendido por un arco de longitud igual al radio de dicho arco



Tomando como referente que el perímetro de una circunferencia es $2\pi r$, tenemos que 360°, es decir una revolución completa, corresponden a un ángulo de $2\pi\ \mathrm{rad}$.

I. Desplazamiento, velocidad y aceleración angulares.

Es conveniente mencionar que aún cuando en el SI, la unidad para la posición angular θ es el radian (*rad*), en ocasiones se utilizan para cuantificarlo, de manera inexacta, las revoluciones (*rev*), de tal forma que

$$1 \text{ rev} = 360° = 2\pi \text{ rad}$$

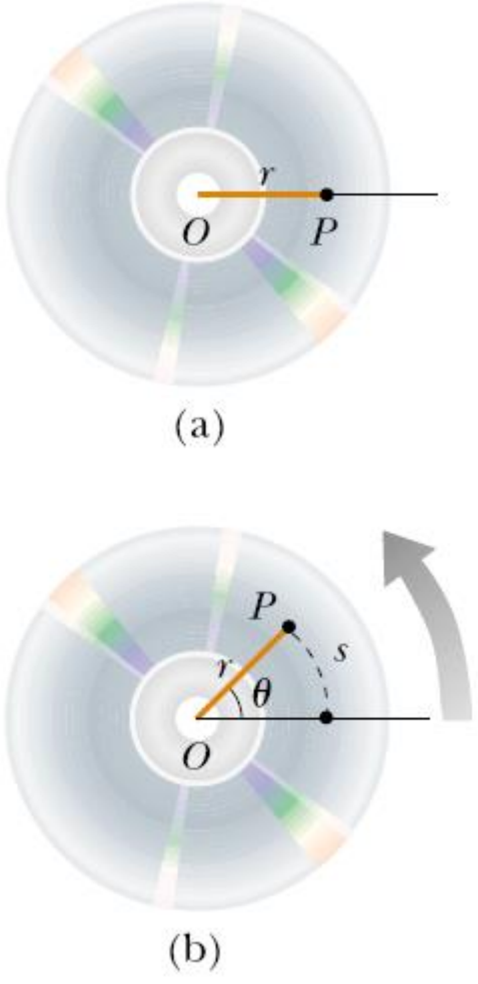
de donde

$$1 \text{ rad} \approx 57.2958°$$

1. Desplazamiento, velocidad y aceleración angulares.

Debido a que el disco analizado es un objeto rígido, conforme una partícula se mueve sobre una trayectoria circular, todas las demás partículas del disco también rotan el mismo ángulo θ, por lo que podemos asociar este ángulo θ, lo mismo a una partícula, que al disco entero.

Lo anterior, permite escoger una línea de referencia en el cuerpo y, a partir de ella, definir la posición angular del cuerpo rígido θ.



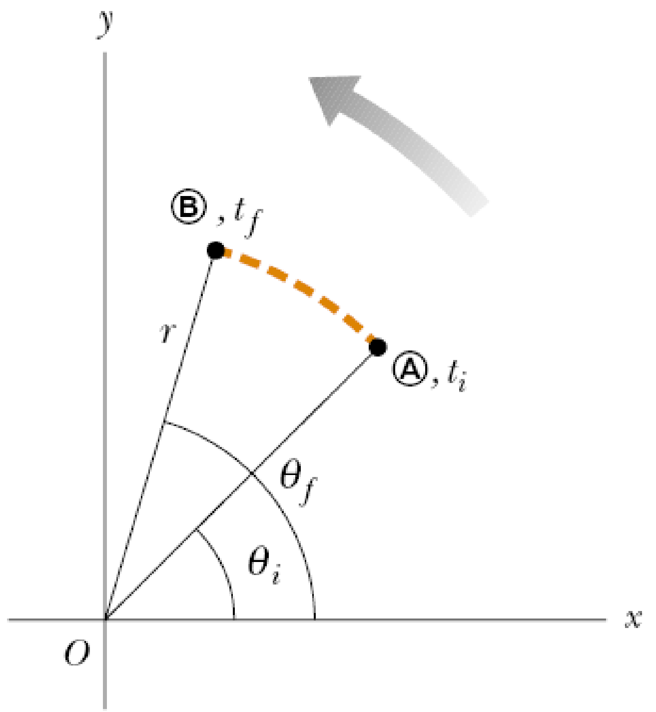
I. Desplazamiento, velocidad y aceleración angulares.

Conforme la partícula en cuestión viaja de la posición A a la posición B en un intervalo de tiempo Δt $(= t_f - ti)$, el radio vector r barre un ángulo $\Delta\theta$ $(= \theta_f - \theta_i)$.

Se define el *desplazamiento angular* del cuerpo rígido como la variación de su posición angular θ, a saber

$$\Delta\theta \equiv \theta_f - \theta_i$$

$$[\Delta\theta] = rad$$



Desplazamiento angular

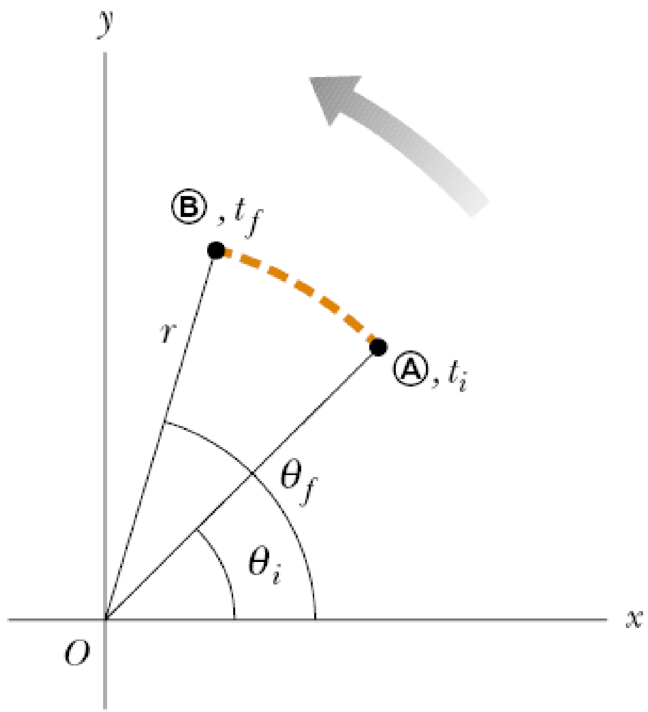
1. Desplazamiento, velocidad y aceleración angulares.

La rapidez con la que ocurre este desplazamiento puede variar, para cuantificar esta diferencia se introduce el concepto de rapidez angular.

Se define la *rapidez angular media* ω_m como el cociente del desplazamiento angular entre el intervalo de tiempo requerido, a saber

$$\omega_m \equiv \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$[\omega_m] = rad/s$$



Rapidez angular media

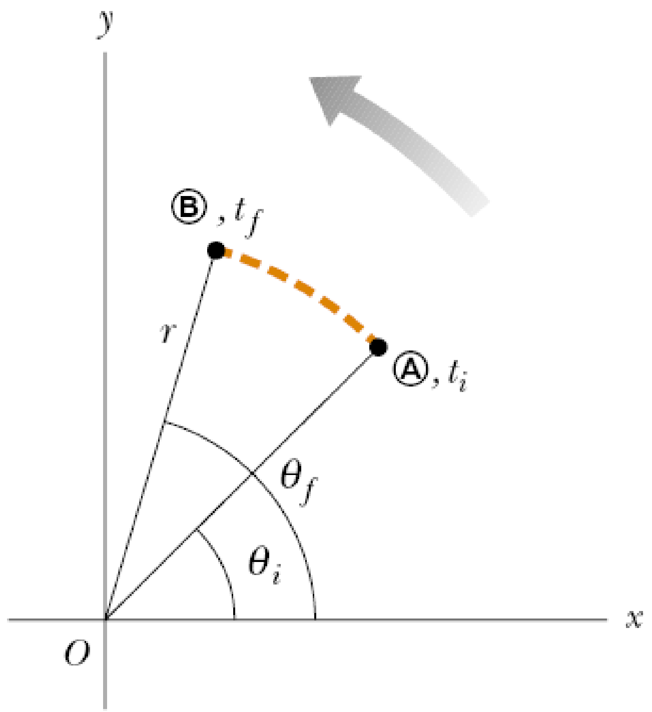
I. Desplazamiento, velocidad y aceleración angulares.

Si consideramos un intervalo de tiempo infinitamente pequeño podemos, en analogía con la rapidez lineal, definir la rapidez angular instantánea.

Se define la *rapidez angular instantánea* ω como el límite cuando Δt tiende a cero en la razón del desplazamiento angular entre el intervalo de tiempo, a saber

$$\omega \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

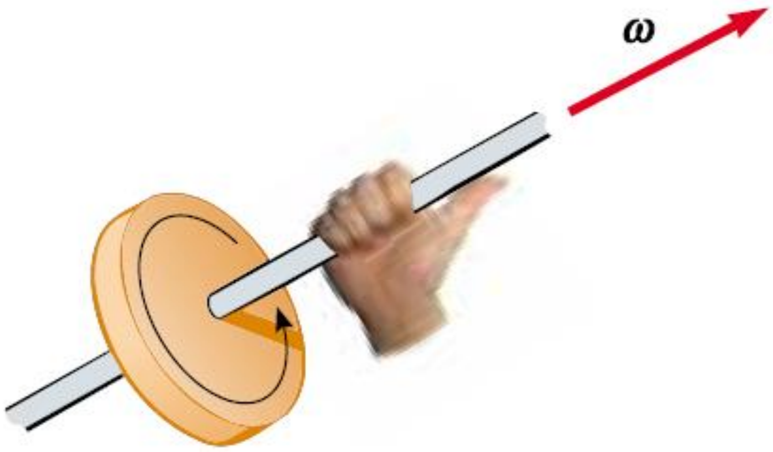
$$[\omega] = {rad}/{s}$$



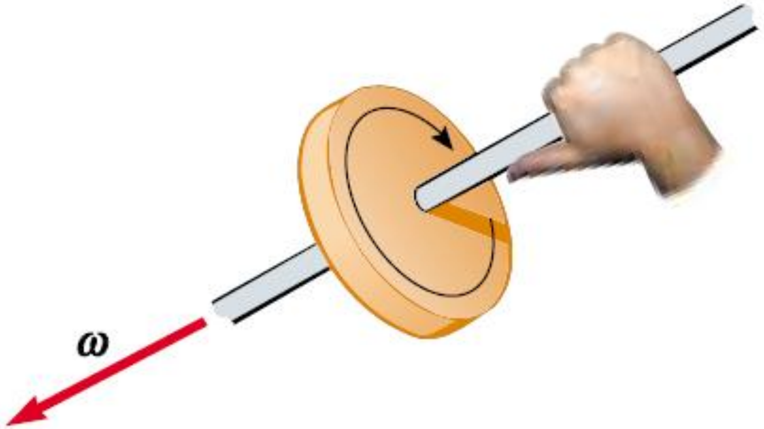
Rapidez angular instantánea

1. Desplazamiento, velocidad y aceleración angulares.

Como la velocidad es un vector, es necesario asociarle una dirección; para ello, se considera que



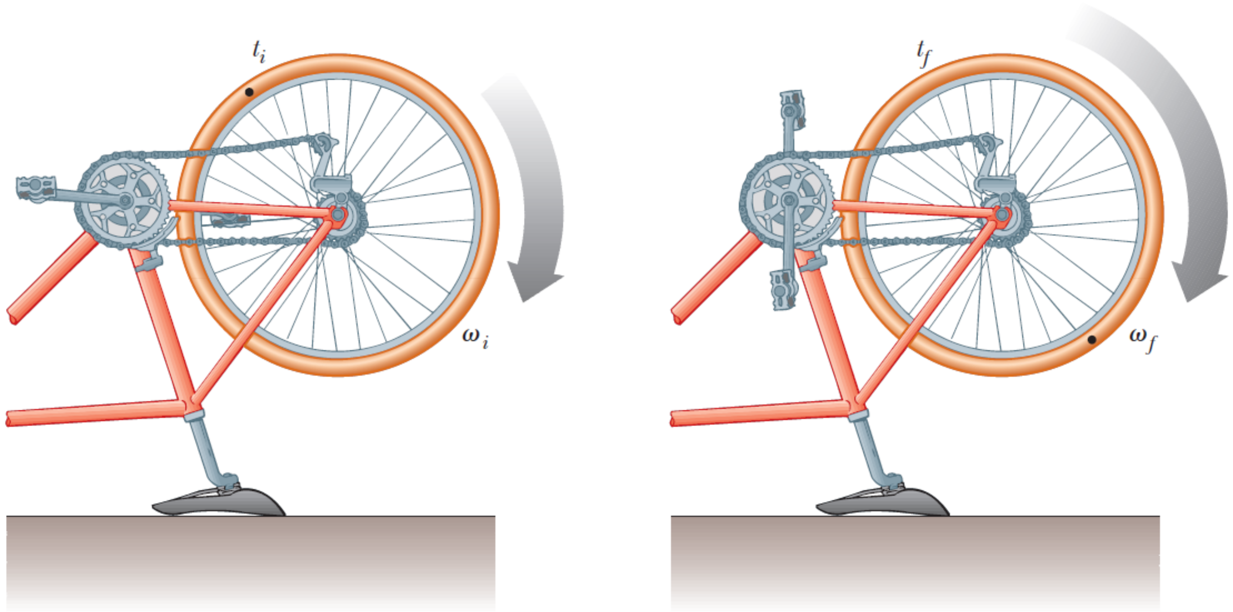
- La velocidad ω es positiva cuando $\Delta\theta$ aumenta (movimiento contrarreloj).
- La velocidad ω es negativa cuando $\Delta\theta$ decrece (movimiento a favor del reloj).



I. Desplazamiento, velocidad y aceleración angulares.

Finalmente, si la rapidez angular instantánea de un objeto cambia de ω_i a ω_f en el intervalo de tiempo Δt, entonces el objeto tiene una aceleración angular.

En el esquema, la rueda de la bicicleta está acelerada.

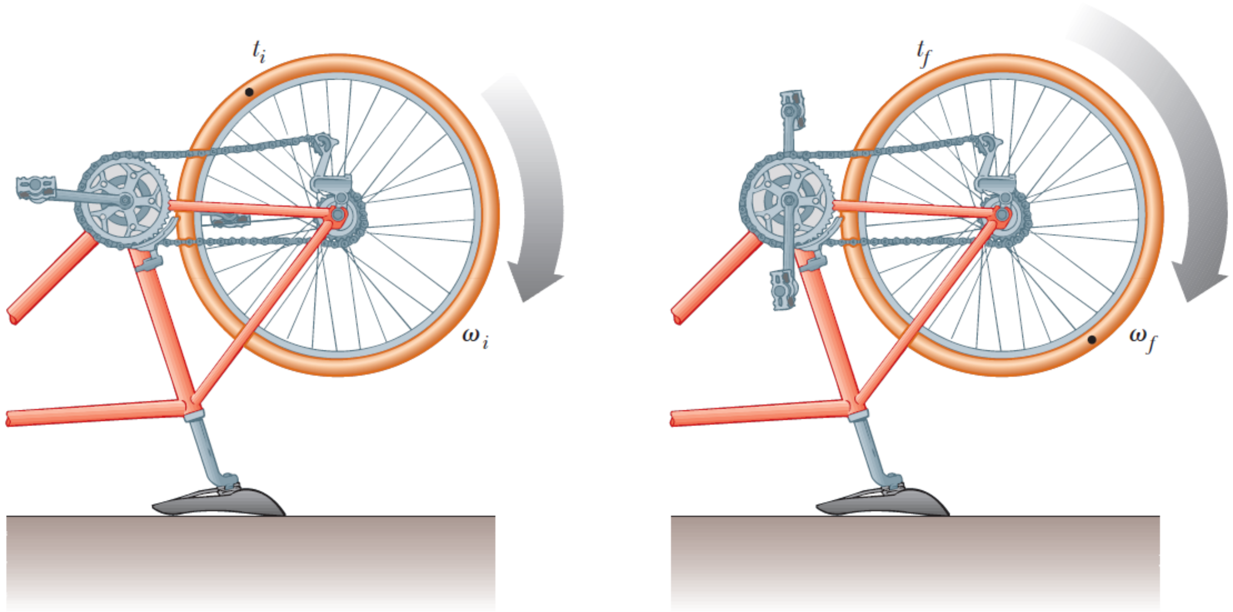


1. Desplazamiento, velocidad y aceleración angulares.

Se define la *aceleración angular media* α_m como el cociente del cambio de la rapidez angular entre el intervalo de tiempo requerido.

$$\alpha_m \equiv \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$[\alpha_m] = rad/s^2$$



I.- Desplazamiento, velocidad y aceleración angulares.

De nueva cuenta, si consideramos un intervalo de tiempo infinitamente pequeño podemos, en analogía con la aceleración lineal, definir la aceleración angular instantánea.

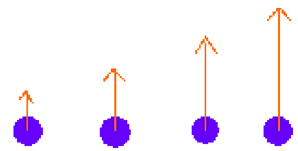
Se define la *aceleración angular instantánea* α como el límite cuando Δt tiende a cero en la razón del cambio de rapidez angular entre el intervalo de tiempo, a saber

$$\alpha \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

$$[\alpha] = rad/s^2$$

2.- Movimiento rotacional uniformemente acelerado.

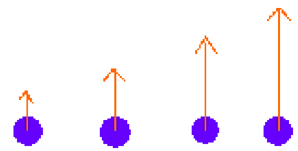
Cuando un cuerpo rígido rota alrededor de un eje fijo, todas y cada una de las partículas que lo componen giran con la misma rapidez angular ω y la misma aceleración angular α, por lo que estas cantidades (θ, ω y α) nos permiten describir el movimiento rotacional del cuerpo en su conjunto.



Usando estas cantidades podemos simplificar el análisis de la rotación de un cuerpo rígido.

2. Movimiento rotacional uniformemente acelerado.

Más adelante veremos que la posición angular (θ), rapidez angular (ω) y aceleración angular (α) son análogas a la posición lineal (x), rapidez lineal (v) y aceleración lineal (a).



De hecho, sólo difieren dimensionalmente entre sí, por un factor que tiene unidades de longitud.

2.- Movimiento rotacional uniformemente acelerado.

Partiendo de la definición de aceleración angular instantánea podemos escribir

$$d\omega = \alpha dt$$

que al integrar desde ω_i al tiempo 0 a ω_f al tiempo t, **considerando α constante**, nos lleva a la primera ecuación de la cinemática rotacional

$$\boxed{\omega_f = \omega_i + \alpha t} \qquad \text{Ecuación (I)}$$

Si a continuación sustituimos esta ecuación en la definición de rapidez angular instantánea tenemos

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_i + \alpha t$$

2.- Movimiento rotacional uniformemente acelerado.

es decir

$$d\theta = \left(\omega_i + \alpha t\right) dt$$

que al integrar desde θ_i al tiempo 0 a θ_f al tiempo t, **considerando que α y ω_i son constantes**, nos lleva a la segunda ecuación de la cinemática rotacional

$$\boxed{\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2} \qquad \text{Ecuación (II)}$$

A continuación, si de las ecuaciones (I) y (II) eliminamos el tiempo, obtenemos la tercera ecuación de la cinemática rotacional

$$\boxed{\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha\left(\theta_f - \theta_i\right)} \qquad \text{Ecuación (III)}$$

2. Movimiento rotacional uniformemente acelerado.

Finalmente, si de las ecuaciones (I) y (II) eliminamos la aceleración α, obtenemos la cuarta ecuación de la cinemática rotacional

$$\boxed{\theta_f = \theta_i + \tfrac{1}{2}\left(\omega_i + \omega_f\right)t} \qquad \text{Ecuación (IV)}$$

Resumiendo, las ecuaciones de la cinemática del Movimiento Rotacional Uniformemente Acelerado son

$$\begin{aligned}
\omega_f &= \omega_i + \alpha t \\
\theta_f &= \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\
\omega_f{}^2 &= \omega_i{}^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \\
\theta_f &= \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)\,t
\end{aligned}$$

2.- Movimiento rotacional uniformemente acelerado. Ejemplos.

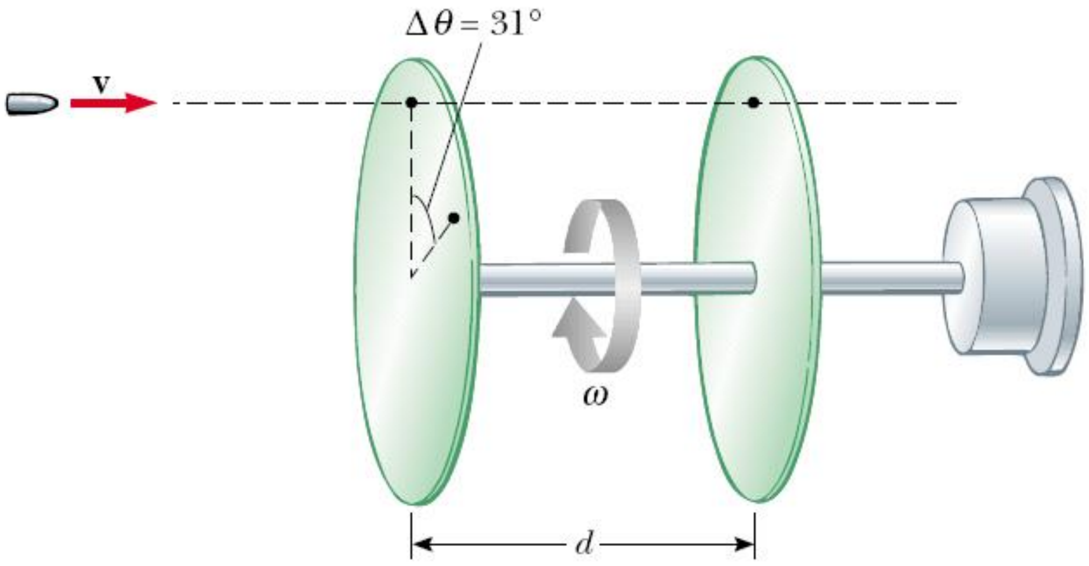
1.- La tina de una lavadora entra en su ciclo de giro, partiendo del reposo y adquiriendo rapidez angular de manera constante durante 8.00s, cuando está girando a 5.00rev/s. En este punto la persona que está lavando abre la tapa y un interruptor de seguridad apaga la lavadora. La tina se detiene suavemente hasta el reposo en 12.0s. ¿Durante cuántas revoluciones la tina gira mientras está en movimiento?

2. Movimiento rotacional uniformemente acelerado. Ejemplos.

2.- La rapidez de una bala en movimiento puede determinarse al permitir que esta atraviese dos discos giratorios de papel montados sobre un mismo eje y separados por una distancia d. A partir del desplazamiento angular $\Delta\theta$ de los agujeros de la bala en los discos y de la rapidez rotacional ω se puede determinar la rapidez v de la bala.

a) Encuentre la expresión para la rapidez de la bala; y

b) ¿Cuál es el valor de v para una situación en la que $d = 80cm$, $\omega = 900rev/\min$ y $\Delta\theta = 31.0°$?



2.- Movimiento rotacional uniformemente acelerado. Ejemplos.

3.- Un eje está girando con una rapidez de 65.0rad/s al tiempo cero. Tiempo después su aceleración angular está dada por

$$\alpha(t) = -10\, rad/s^2 - 5t\, rad/s^3$$

donde t es el tiempo transcurrido.

(a) Encuentre las expresiones para la rapidez y posición angulares,

(b) ¿Qué rapidez angular tiene cuando $t = 3.00s$?, y

(c) ¿Cuánto ha girado en estos 3 segundos?

2.- Movimiento rotacional uniformemente acelerado. Ejemplos.

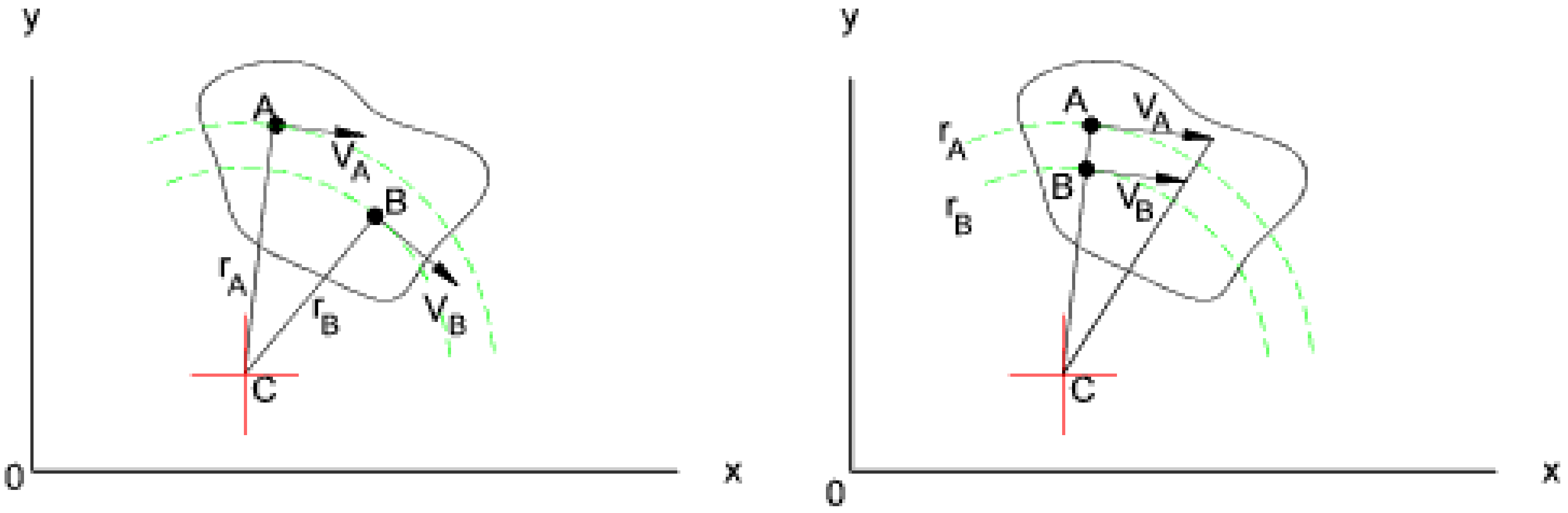
4.- Una centrifugadora en un laboratorio médico gira con una rapidez angular de 3600 rev/min. Cuando se apaga, rota 50.0 veces antes de detenerse. Encuentre la aceleración angular (supuesta constante) de la centrifugadora.

Cantidades Lineales y Angulares

Comparación entre las ecuaciones de movimiento	
Lineales	**Angulares**
$s = s_0 + v_m(t - t_0)$	$\theta = \theta_0 + \omega_m(t - t_0)$
$v = v_0 + a(t - t_0)$	$\omega = \omega_0 + a(t - t_0)$
$v_m = ½(v + v_0)$	$\omega_m = ½(\omega + \omega_0)$
$v^2 - {v_0}^2 = 2a(s - s_0)$	$\omega^2 - {\omega_0}^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$
$s = s_0 + v_0\, t + ½a(t - t_0)^2$	$\theta = \theta_0 + w_0\, t + ½\alpha(t - t_0)^2$
Nota: Para convertir cantidades angulares a lineales, las primeras deben de estar expresadas en *radianes*	

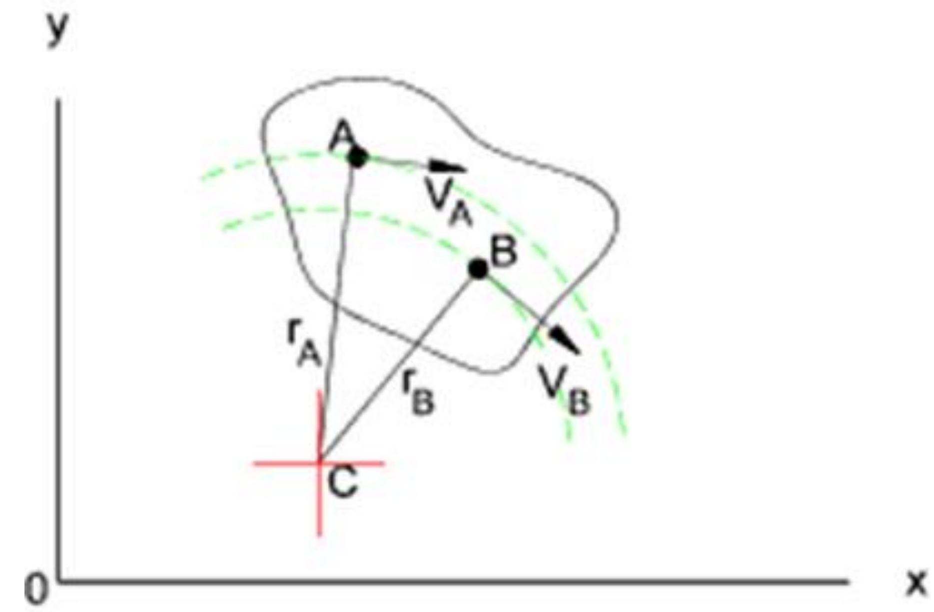
3.- Rotación del cuerpo rígido.

Cuando un objeto extendido rota sobre un eje, su movimiento no puede ser analizado tratándolo como partícula porque, en un instante dado, las diferentes partes del objeto tienen velocidades y aceleraciones lineales diferentes.



3.- Rotación del cuerpo rígido.

Sin embargo, podemos analizar el movimiento considerando que está compuesto por una colección de partículas, cada una con su propia velocidad y aceleración lineal, pero con la misma rapidez y aceleración angular.

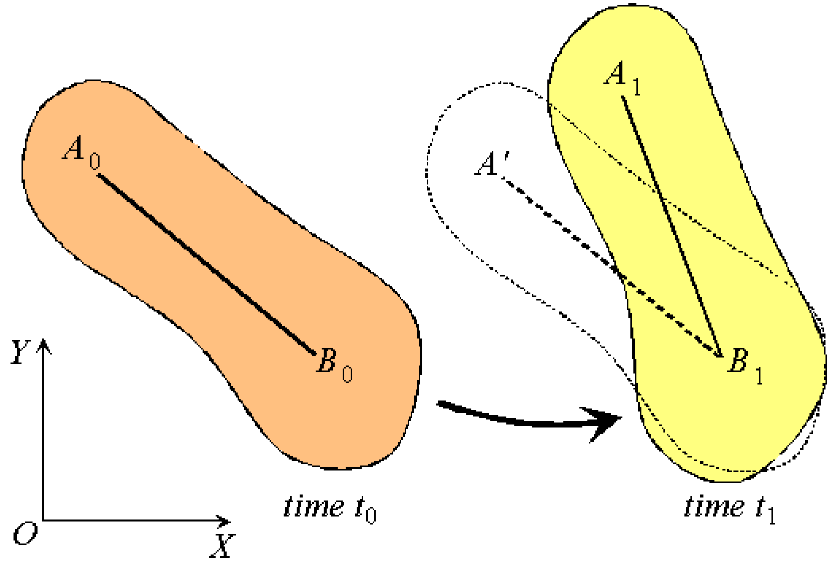


Con lo anterior, el análisis de un objeto que rota se simplifica sustancialmente si se asume que el objeto es rígido.

3.- Rotación del cuerpo rígido.

… pero ¿Qué es un cuerpo rígido?

Se llama *cuerpo rígido* al modelo idealizado que considera a un cuerpo como indeformable, es decir con tamaño y forma perfectamente definidos e inmutables.

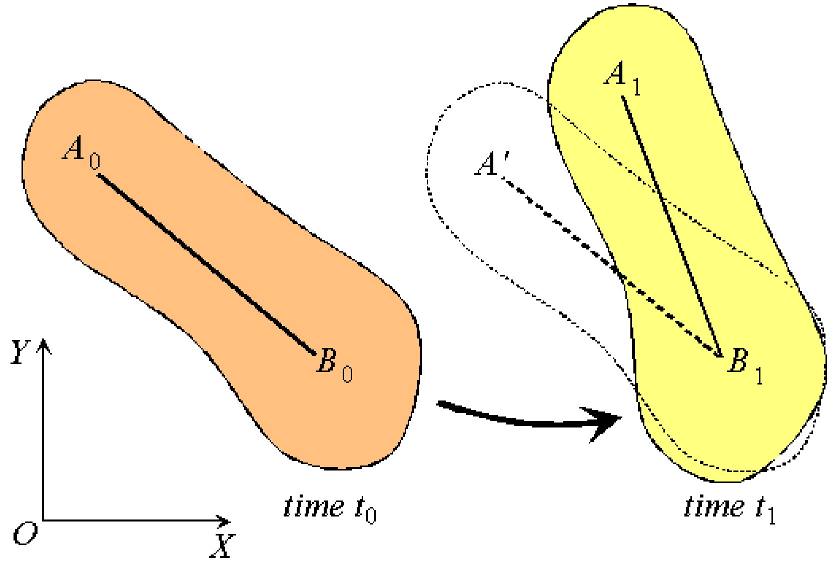


Esto implica que las posiciones relativas de todas las partículas que componen el objeto se mantienen constantes.

3.- Rotación del cuerpo rígido.

… pero ¿Qué es un cuerpo rígido?

En la vida real los cuerpos no son rígidos ya que son afectados por las fuerzas que actúan sobre ellos, pudiendo estirarlos, torcerlos, aplastarlos, etc.



Sin embargo, nuestro modelo de cuerpo rígido es útil en muchas situaciones en las que la deformación es insignificante o despreciable.

3.1.- Energía cinética rotacional.

Con anterioridad se ha definido la energía cinética de un objeto como la energía asociada a su movimiento a través del espacio. En particular, esta depende del cuadrado de la velocidad con que se desplace, a saber

$$\boxed{K = \frac{1}{2} m v^2}$$

donde K es la energía cinética (traslacional), m es la masa del objeto y v es su rapidez.

En la expresión anterior se ha usado que

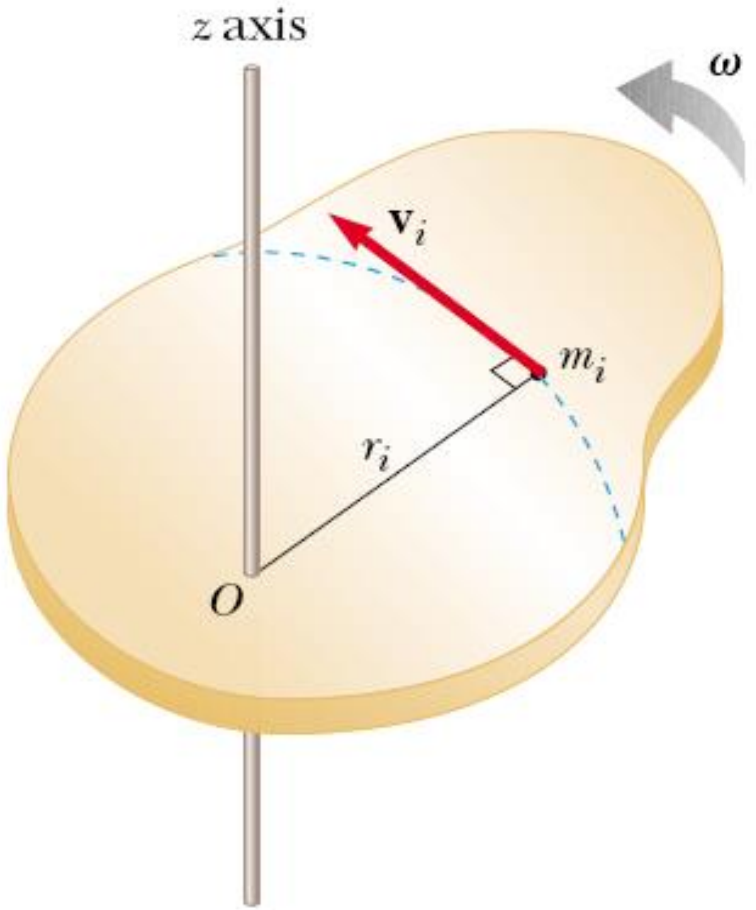
$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$$

3.1.- Energía cinética rotacional.

Un objeto que rota sobre un eje fijo permanece inmóvil en el espacio, por lo que no se le puede asociar energía cinética debida al movimiento de translación.

Sin embargo, cada una de las partículas que componen el objeto que rota se mueven a través del espacio siguiendo trayectorias circulares. Por lo tanto, debe haber energía cinética asociada al movimiento de rotación.

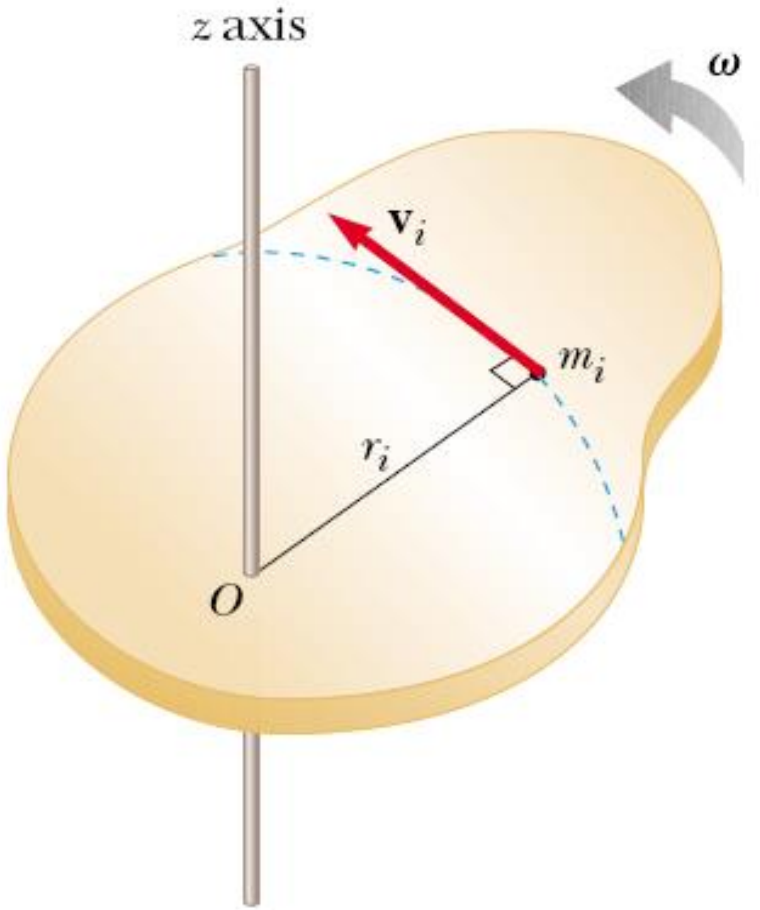
3.1.- Energía cinética rotacional.



Para el cálculo de la energía cinética rotacional de un cuerpo rígido una buena idea es considerarlo como una colección de partículas rotando alrededor del eje fijo z, con una rapidez angular ω.

En particular, resulta conveniente seleccionar una partícula de masa m_i ubicada a una distancia r_i del eje de rotación.

3.1.- Energía cinética rotacional.

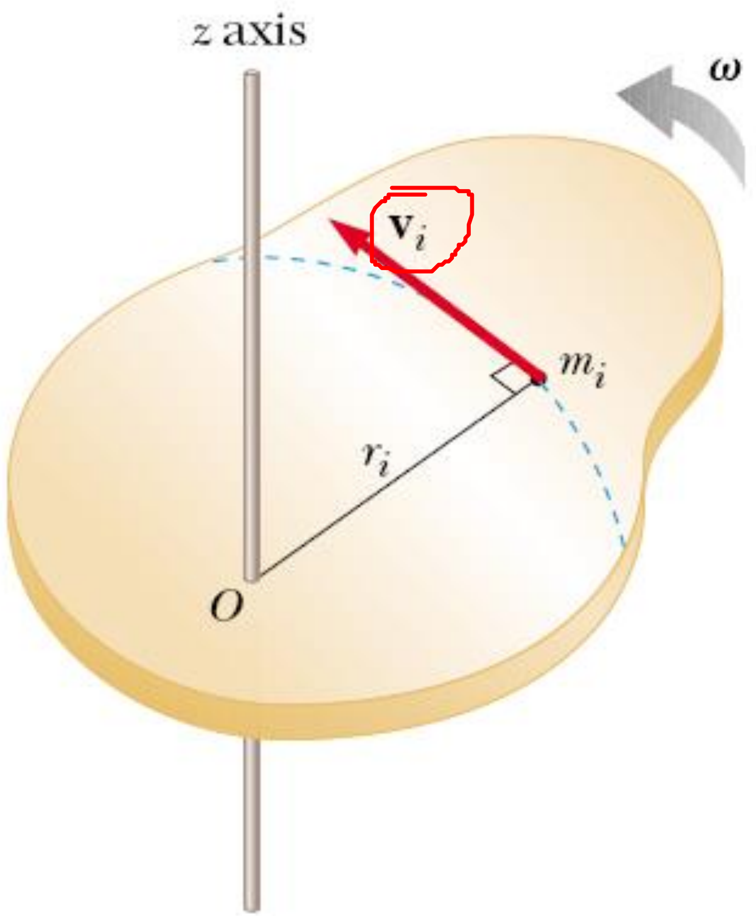


Cada una de tales partícula tiene una energía cinética determinada por su masa m y su rapidez tangencial v.

Si la masa de la i-ésima partícula es m_i y su rapidez tangencial es v_i, entonces su energía cinética está dada por

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

3.1.- Energía cinética rotacional.

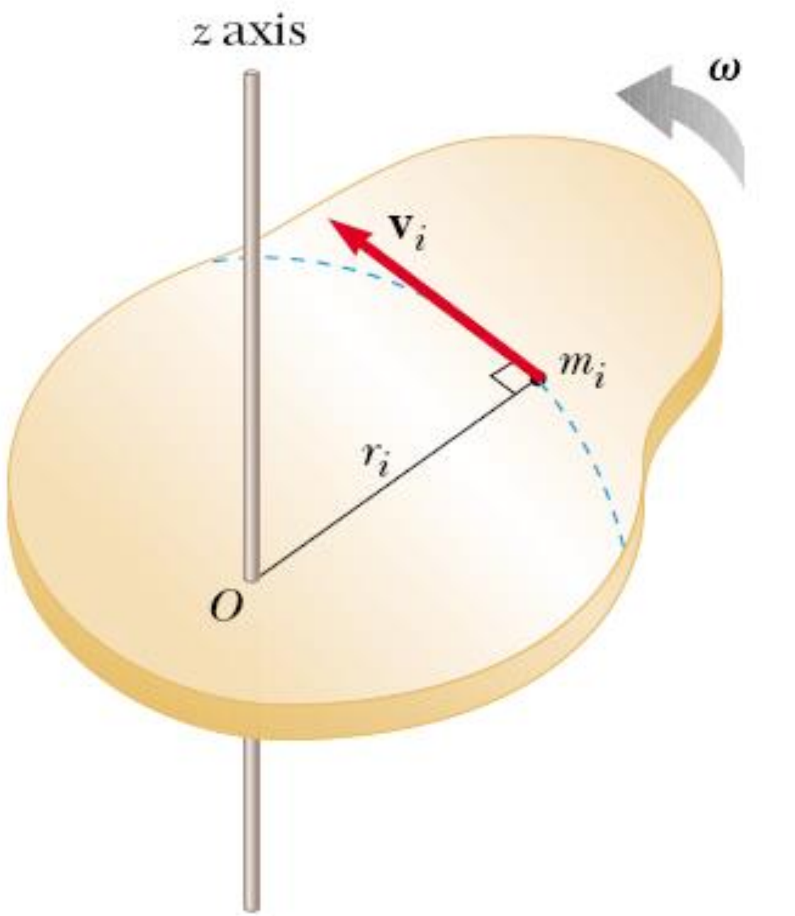


Si ahora usamos el hecho de que cada partícula en el cuerpo rígido tiene la misma velocidad angular ω , es posible escribir

$$K_i = \frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2$$

Con lo que la energía cinética total del cuerpo rígido que rota es la suma de las energías cinéticas de cada una de las partículas.

3.1.- Energía cinética rotacional.



La energía cinética rotacional total K_R está dada por

$$K_R = \sum_i \frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2$$

Reagrupando términos podemos escribir

$$K_R = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2$$

3.1.- Energía cinética rotacional.

Momento de inercia *I*

La expresión anterior se puede simplificar definiendo la cantidad entre paréntesis como el momento de inercia I, a saber:

$$I \equiv \sum_i m_i r_i^2$$

De esta definición vemos que el momento de inercia tiene dimensiones de ML² ($kg \cdot m^2$, en unidades del SI).

3.1.- Energía cinética rotacional.

Con esta definición, la energía cinética rotacional resulta ser

$$K_R = \frac{1}{2} I\omega^2$$

Aunque nos refiramos a esta cantidad como *energía cinética rotacional*, es importante mencionar que no es una nueva forma de energía. Es energía cinética ordinaria porque se obtiene de sumar las energías cinéticas de cada una de las partículas que forman el cuerpo rígido. Sin embargo, su forma matemática es conveniente cuando estudiamos el movimiento rotacional, con tal que sepamos calcular el momento de inercia I.

3.1.- Energía cinética rotacional.

Relación entre K_T y K_R

Antes de concluir, es importante revisar la analogía entre la energía cinética asociada con el movimiento lineal K_T y la energía cinética rotacional K_R. Las cantidades I y ω en el movimiento rotacional son análogas a m y a v en el movimiento lineal, respectivamente.

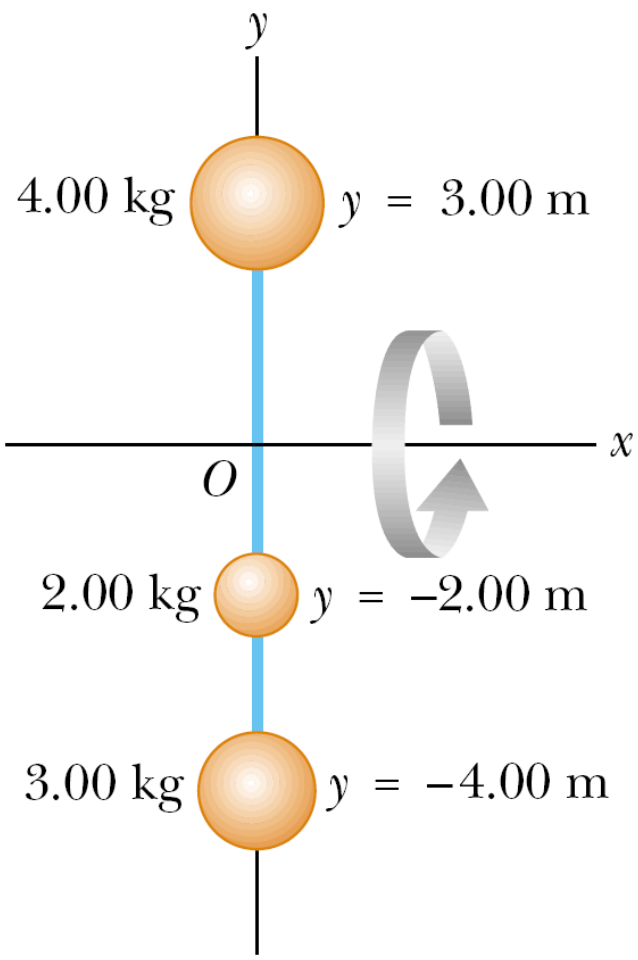
De hecho, el momento de inercia es una medida de la resistencia de un objeto a los cambios en su movimiento rotacional, al igual como la masa es una medida de la tendencia de un objeto a resistir cambios en su movimiento lineal.

3.1.- Energía cinética rotacional. Un ejemplo.

5.- Barras rígidas de masa despreciable se ubican a lo largo del eje y conectando tres partículas. Si el sistema rota alrededor del eje x con una velocidad angular de 2.00rad/s,

(a) encuentre el momento de inercia alrededor del eje x y la energía cinética rotacional; y

(b) evalúe la velocidad tangencial de cada partícula y la energía cinética total.



3.2.- Cálculo del momento de inercia.

Ahora veremos cómo se puede calcular el momento de inercia I para un cuerpo rígido.

Podemos evaluar el momento de la inercia de un cuerpo rígido extendido, imaginando que el cuerpo puede ser dividido en muchos elementos pequeños de volumen, cada uno con masa Δm_i, a continuación podemos utilizar la definición de I y tomar el límite de esta suma cuando Δm_i tiende a cero.

En este caso, la definición nos lleva a que el momento de inercia de cada elemento de volumen Δm_i ubicado a una distancia r_i del eje de rotación está dado por

$$\Delta I = \Delta m_i r_i^2$$

3.2.- Cálculo del momento de inercia.

Con lo anterior, la sumatoria se sustituye por una integral sobre el volumen del cuerpo, a saber

$$I = \sum_i \Delta I_i = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int_V r^2 dm$$

En la práctica es más usual calcular esta integral en términos del volumen, para ello se utiliza la definición de densidad de masa ρ dada por

$$\rho = \frac{m}{V}$$

3.2.- Cálculo del momento de inercia.

Con esto, es posible reescribir el diferencial de masa dm como

$$dm = \rho dV$$

Así que el momento de inercia I, en términos de la densidad y del volumen, resulta ser

$$\boxed{I = \int_V \rho r^2 dV}$$

donde ρ puede ser función de r (y, por lo tanto, de dV).

3.2.- Cálculo del momento de inercia.

La densidad dada por

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

a menudo se conoce como *densidad volumétrica de masa* porque representa la masa por unidad de volumen.

Sin embargo, existen otras formas de expresar la densidad, por ejemplo *densidad superficial de masa* o *densidad lineal de masa*.

3.2.- Cálculo del momento de inercia.

Por ejemplo, para el caso de una placa de espesor uniforme t, podemos definir una densidad superficial de masa σ, como

$$\sigma = \frac{m}{A} = \rho t$$

que representa la masa por unidad de área.

Las unidades de σ son, usando unidades del SI, kg/m^2.

3.2.- Cálculo del momento de inercia.

Finalmente, cuando la masa se distribuye a lo largo de una barra con una sección transversal de área A, utilizamos a veces la densidad lineal de masa λ definida como

$$\lambda = \frac{m}{L} = \rho A$$

que representa la masa por unidad de longitud.

Las unidades de λ son, usando unidades del SI, kg/m.

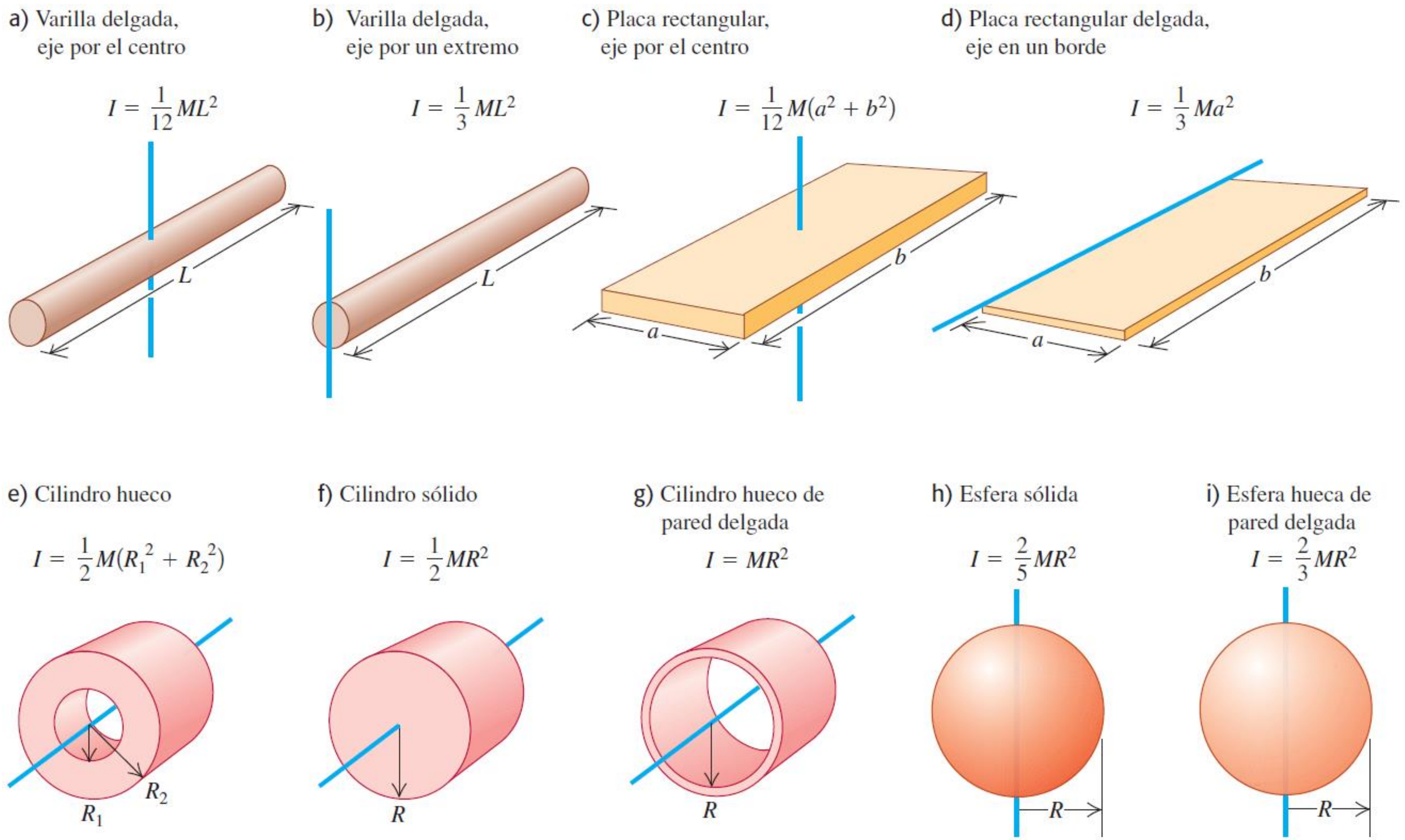
3.2.- Cálculo del momento de inercia. Un ejemplo.

6.- Dos partículas, cada una de masa m, están unidas entre sí y a un eje de rotación por dos varillas, cada una de longitud L y masa M. La combinación gira alrededor del eje de rotación, ubicado en el extremo libre de una varilla, con una rapidez angular ω. Obtenga las expresiones algebraicas para

(a) la inercia de rotación del arreglo en torno al pivote O; y

(b) la energía cinética de rotación en torno a O.

3.2.- Cálculo del momento de inercia. Algunos resultados.



3.3.- Teorema de ejes paralelos.

Los momentos de inercia de cuerpos rígidos con una geometría simple (es decir, con alta simetría) son relativamente fáciles de calcular cuando el eje de rotación coincide con uno de los ejes de simetría.

Sin embargo, el cálculo del momento de inercia alrededor de un eje arbitrario puede ser complicado, incluso para un objeto altamente simétrico.

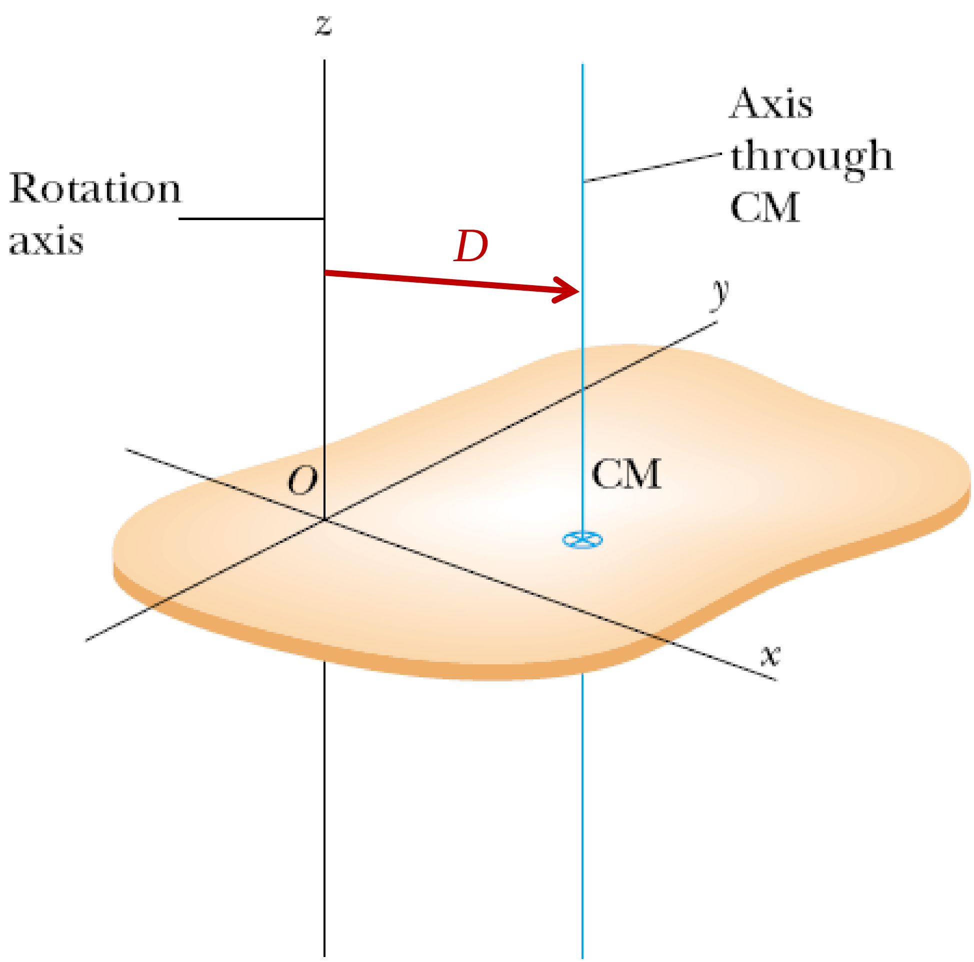
3.3.- Teorema de ejes paralelos.

Afortunadamente, el uso de un teorema importante, llamado "teorema de ejes paralelos", simplifica a menudo el cálculo.

Suponiendo que el momento de inercia sobre un eje que pasa a través del centro de masa de un objeto es I_{CM}, el teorema de ejes paralelos establece que el momento de inercia alrededor de cualquier eje paralelo a, y a una distancia D, de dicho eje está dado por

$$\boxed{I = I_{CM} + MD^2}$$

3.3.- Teorema de ejes paralelos.



Esquema del Teorema de ejes paralelos para un cuerpo rígido arbitrario

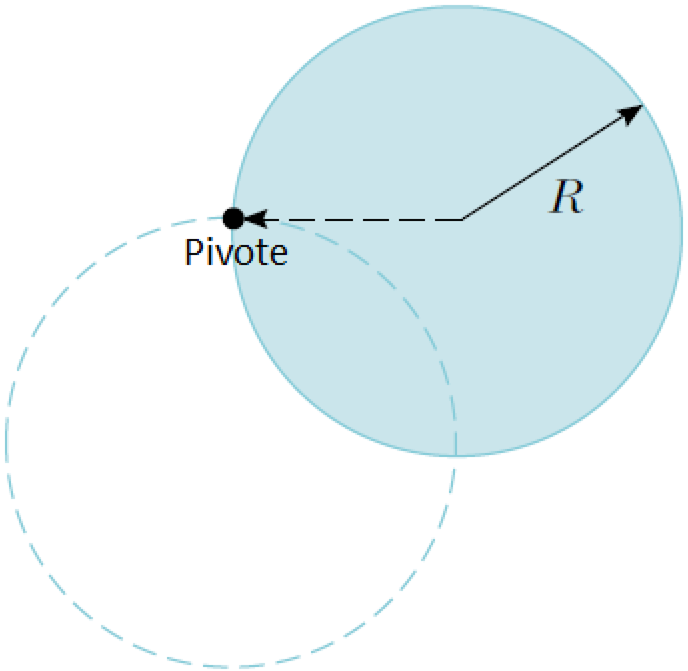
$$I = I_{CM} + MD^2$$

3.3.- Teorema de ejes paralelos. Un ejemplo.

7.- Usando el teorema de ejes paralelos calcule el momento de inercia, alrededor del eje mostrado, del siguiente objeto, considerando que es:

a) Disco de masa M y radio R

b) Esfera de masa M y radio R



Universidad de Sonora
Departamento de Física

"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

¡Orgullosamente Búhos!

Mecánica II

Dr. Roberto Pedro Duarte Zamorano

© 2021